УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александар Шебековић

УНУТРАШЊЕ И СПОЉАШЊЕ СИМЕТРИЈЕ У РИМАНОВОЈ ГЕОМЕТРИЈИ

Докторска дисертација

Крагујевац, 2016. година

I. Аутор

Име и презиме: **Александар Шебековић**
Датум и место рођења: **06.04.1974. године, Нови Пазар**
Садашње запослење: **Факултет техничких наука у Чачку**

II. Докторска дисертација

Наслов: **Унутрашње и спољашње симетрије у Римановој геометрији**
Број страница: **88**
Број слика: **11**
Број библиографских података: **57**
Установа и место где је рад израђен: **Природно-математички факултет у Крагујевцу**
Научна област (УДК):
Ментор: **Проф. др Мирослава Петровић-Торгашев**

III. Оцена и одбрана

Датум пријаве теме:
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:
Комисија за оцену подбности теме и кандидата: **Проф. др Мирослава Петровић-Торгашев,** Природно-математички факултет у Крагујевцу **Проф. др Зоран Ракић,** Математички факултет у Београду **Др Емилија Нешовић, ванр. проф.** Природно-математички факултет у Крагујевцу
Комисија за оцену докторске дисертације: **Проф. др Зоран Ракић,** Математички факултет у Београду **Проф. др Мирјана Ђорић,** Математички факултет у Београду **Др Емилија Нешовић, ванр. проф.** Природно-математички факултет у Крагујевцу
Комисија за одбрану докторске дисертације: **Проф. др Зоран Ракић,** Математички факултет у Београду **Проф. др Мирјана Ђорић,** Математички факултет у Београду **Др Емилија Нешовић, ванр. проф.** Природно-математички факултет у Крагујевцу
Датум одбране докторске дисертације:

Предговор

Овај рад припада области диференцијалне геометрије која се назива Риманова геометрија и односи се на теорију подмногострукости Римановых многострукости, прецизније, у раду се проучавају класичне и скорије уведене симетрије у диференцијалној геометрији подмногострукости, посебно на тзв. идеалним подмногострукостима.

Глава 1 представља кратак преглед Риманове геометрије. У њој је дата дефиниција метричког тензора, а и уведене су локалне компоненте метричког тензорског поља. Такође, описана је конексија Леви-Чивите ∇ на Римановој многострукости (M, g). Једно од централних места у овој глави представља дефиниција и особине Риман-Кристофеловог тензора кривине. Овде је дата и његова геометријска интерпретација. Истовремено су уведени и појмови скаларне кривине многострукости и секционе кривине, као и Ричијевог (0,2)-тензора S и Вејловог (0,4)-тензора C. Већи део Главе 1 је посвећен симетријама тензора кривине R. Помоћу паралелног транспорта су описани локално симетрични простори ($\nabla R = 0$) и семи-симетрични простори ($R \cdot R = 0$). Такође, дата је и геометријска интерпретација Тачибаниног (0,6)-тензора и као још једно битно место истиче се увођење појма псеудо-симетричних простора, које, с обзиром на круцијалну улогу у њиховом проучавању, врло често називамо и псеудо-симетрични простори у смислу Дешча, односно Дешч симетрични простори. Подмногострукости Риманових многострукости су разматране у последњем делу Главе 1. Осим основних појмова, овде су наведене и Гаусова и Вајнгартенова формула, као и основне једначине Гауса, Кодација и Ричија. Такође је дат и појам скаларне кривине подмногострукости, као и теорема Чена и Окумуре из 1973. године.

У Глави 2 разматрамо релације између унутрашњих и спољашњих величина подмногострукости дате Риманове многострукости. Једну од првих веза између унутрашњих и спољашњих инваријанти на површи у $\mathbb{E}^3$ дао је Ојлер (1760. године), кроз чувену неједнакост $K \leq H^2$, где је K унутрашња Гаусова кривина површи у $\mathbb{E}^3$, а H^2 је спољашњи квадрат средње кривине дате површи. Каснија уопштења ове неједнакости дали су Винтген (1979. године), Руксел (1981. године) и Гвадалупе-Родригез (1983. године). Посебно место заузима уопштење Винтгенове неједнакости које су дали Де Смет, Дилен, Вранкен и Верштрален (1999. године) за n-димензионе подмногострукости M^n у реалним просторним формама $R^{n+2}(c)$. У њиховом раду је дато и када важи једнакост у Винтгеновој неједнакости. Такође су формулисали и хипотезу (ДДВВ хипотеза) да Винтгенова неједнакост важи за све подмногострукости M^n у реалним просторним формама $\tilde{M}^{n+m}(c)$. Ову хипотезу доказали су независно један од других, Чои и Лу, као и Ге и Танг. Такође је окарактерисан и случај када важи једнакост у датој неједнакости, и такве подмногострукости се називају Винтгеновим идеалним подмногострукостима. Централни део Главе 2 заузимају Дешчове симетрије Винтгенових идеалних подмногострукости. Ту су дати оригинални резултати, у којима су описани услови под којима је Винтгенова идеална подмногострукост M^n $(n \geq 4)$ у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+m}(c)$ Дешч симетрична (Теорема 2.3), а такође и када је Ричи-Дешч симетрична (Теорема 2.4). У Теореми 2.5 је показано да Винтгенова идеална подмногострукост има псеудо-симетричан Вејлов конформни тензор кривине C. Један део Главе 2 се бави Винтгеновим идеалним подмногострукостима које су Ротерови простори. Ту је доказано да је Винтгенова идеална подмногострукост M^n у реалној просторној форми Дешч симетрична ако и само ако је M^n Ротеров простор (Теорема 2.6). Последњи део Главе 2 даје кратак приказ теорије о Казоратијевом оператору и Казоратијевој кривини. Показано је (Теорема 2.9) да се главни правци спољашњег Казоратијевог оператора A^C поклапају са главним правцима унутрашњег Ричијевог оператора S на Винтгеновим идеалним подмногострукостима M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$.

Глава 3 проучава уопштене Винтгенове идеалне подмногострукости. Ту је уведен појам хермитске метрике, помоћу које су дефинисане хермитске многострукости, а након тога и Келерове многострукости. Дати су и Риманов и Ричијев тензор кривине на Келеровој многострукости. Уведен је појам холоморфне секционе кривине, помоћу које су дефинисане комплексне просторне форме $\tilde{M}(c)$. Дефинисане су Сасакијеве просторне форме, као и Лежандрове многострукости. На Лежандровим многострукостима је дат Риманов тензор кривине, као и скаларна нормална кривина. У раду Ј. Михаија је дата неједнакост између нормализоване скаларне кривине ρ, нормализоване нормалне кривине ρ_N и квадрата средње кривине за Лежандрове подмногострукости M^n у Сасакијевим просторним формама $\tilde{M}^{2n+1}(c)$. Такође је дата и форма оператора облика у случају када важи једнакост у датој неједнакости, и на тај начин су дефинисане уопштене Винтгенове идеалне Лежандрове подмногострукости M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$. Централно место Главе 3 представљају оригинални резултати који се баве условима када је Винтгенова идеална Лежандрова подмногострукост M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ Дешч симетрична. Такође је показано да се и код ових подмногострукости Казоратијеви и Ричијеви главни правци подударају (Теорема 3.8). Последњи део ове главе представља доказ тврђења да су Винтгенове идеалне Лежандрове подмногострукости M^n у Сасакијевим просторним формама $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ Дешч симетричне ако и само ако су Ротерови простори.

Рад на овој тези је био инспиративан и креативан процес, који би, понекад, постајао спор и тежак. У сваком тренутку сам имао несебичну и велику подршку, и зато бих желео да изразим посебну и велику захвалност свом ментору проф. др Мирослави Петровић-Торгашев на дугогодишњој сарадњи и упознавању са проблематиком овог рада, као и на огромној помоћи у изради ове дисертације. Посебну захвалност дугујем и проф. др Леополду Верштралену, са Католичког универзитета у Лувену (Белгија), на свим инспиративним предавањима које је одржао и којима сам присуствовао, и начину увођења у најсавременије токове диференцијалне геометрије током свих ових година. Захвалио бих се и члановима Комисије, проф. др Зорану Ракићу и проф. др Мирјани Ђорић са Математичког факултета у Београду и проф. др Емилији Нешовић са ПМФ-а у Крагујевцу, који су својим конструктивним сугестијама унапредили овај рад. Овом приликом се захваљујем и проф. др Драгану Ђурчићу и др Ралету Николићу за помоћ у најтежим тренуцима у којима сам се налазио током израде ове тезе, као и мр Младену Јањићу за несебичну помоћ у сређивању овог материјала и пуно корисних инструкција да ова дисертација добије добар изглед. На крају, желим да се захвалим родитељима и брату за бескрајно поверење и подршку, супрузи Ани и ћерки Ангелини за бескрајне сате разговора и море љубави из ког сам црпео снагу да истрајем и заједно савладамо све потешкоће на које сам наилазио.

Април 2016. године Аутор

Садржај

1 Увод **1**

1.1 Римановe многострукости 1

1.2 Конексија Леви-Чивите 4

1.3 Тензор кривине 6

1.4 Симетрије тензора кривине R 12

1.5 Тачибана тензор $Q(g, R)$ 17

1.6 Дешч-симетрични простори 19

1.7 Ричијева и скаларна кривина 23

1.8 Вејлов конформни тензор кривине 25

1.9 Подмногострукости Риманових многострукости 28

1.10 Једначине Ричија, Гауса и Кодација 31

2 Винтгенове идеалне подмногострукости **35**

2.1 Неједнакости између унутрашњих и спољашњих кривина 35

2.2 Дешчове симетрије Винтгенових идеалних подмногострукости 40

2.3 Винтгенове идеалне подмногострукости које су Ротерови простори 49

2.4 Казоратијеви и Ричијеви главни правци 53

2.5 Казоратијеви и Ричијеви главни правци Винтгенових идеалних подмногострукости 58

3 Уопштене Винтгенове идеалне подмногострукости 63

3.1 Подмногострукости хермитских многострукости 63

3.2 Тотално реалне подмногострукости 65

3.3 Подмногострукости у Сасакијевим просторним формама 67

3.4 Уопштене Винтгенове неједнакости за Лежандрове подмногострукости 69

3.5 Дешчове симетрије Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости 72

3.6 Казоратијеви и Ричијеви главни правци Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости 76

3.7 Ротерово својство Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости 80

Глава 1

Увод

1.1 Риманове многострукости

Нека је M тополошки простор. Уређен пар (U, x), где је U неки отворен скуп на $M (U \subset M)$, а x хомеоморфизам са U на $\mathscr{X}(U) \subset \mathbb{R}^n$ се назива координатни систем (карта). Ако запишемо $x(p) = (x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p))$, за свако $p \in U$, тада се одговарајуће функције x^i називају координатне функције и n је димензија простора. За два координатна система кажемо да се глатко преклапају ако су функције $x \circ y^{-1}, y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обе глатке. Колекција ових координатних система на M, таквих да је свака тачка садржана у домену неког од тих система и да се сви глатко преклапају, назива се атлас $\mathcal{A}$ на M. Кажемо да је атлас $\mathcal{A}$ на M комплетан ако садржи сваки координатни систем (карту) на M која се глатко преклапа са сваким координатним системом на $\mathcal{A}$. На тај начин се сваки атлас садржи у јединственом комплетном атласу $\mathcal{A}$ на M.

Глатка многострукост M је паракомпактан, Хауздорфов простор снадбевен комплетним атласом.

Кроз овај рад, све многострукости које се проучавају, биће коначно димензионе, глатке и повезане, и све функције над тим многострукостима ће такође бити глатке.

Нека је M n-димензиона многострукост класе C^∞, која је покривена системом координатних околина $\{U, x^h\}$. *Тангентни простор* T_pM^n од M^n у тачки p је дефинисан као скуп свих тангентних вектора у тачки p. Под тангентним вектором подразумевамо било који вектор који је у тачки $p \in M^n$ тангентан на неку криву на многострукости M^n.

Означимо са $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ базисне векторе на координатној околини $\{U, x^h\}$. Ако су X и Y два векторска поља на M^n, тада у околини U имамо да је

$$X = \sum_{h=1}^{n} X^h \partial_h, \qquad Y = \sum_{h=1}^{n} Y^h \partial_h,$$

при чему су X^h и Y^h локалне компоненте векторских поља X и Y, респективно, с обзиром на природни репер ∂_h. Претходне једнакости, користећи се Ајнштајновом нотацијом, према којој исти индекс записан једном у горњем а други пут у доњем реду, означава сумирање по том индексу, можемо записати у облику:

$$X = X^h \partial_h, \qquad Y = Y^h \partial_h.$$

Са dx^i означавамо елементе дуалне базе, дуалног простора $(T_pM^n)^*$, које дефинишемо на следећи начин:

$$dx^i\Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Билинеарна форма $dx^i|_p \otimes dx^j|_p$ се дефинише у облику њеног дејства на базу, тј.

$$\left(dx^i|_p \otimes dx^j|_p\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k|_p}, \frac{\partial}{\partial x^h|_p}\right) = \delta^i_k \delta^j_h = \begin{cases} 1, & i = k \text{ и } j = h, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Метрички тензор g на многострукости M^n је симетрично, недегенерисано $(0,2)$-тензорско поље на M^n константног индекса. Многострукост M^n са метричким тензором g се назива *семи-Риманова многострукост.*

Дефиниција 1.1. Риманова метрика g на многострукости M^n је $(0,2)$-тензорско поље ($g : T_pM^n \times T_pM^n \to \mathbb{R}$) које задовољава следеће услове:

(1) $g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$, за свако X, Y (симетричност);

(2) $g_p(X,X) > 0$, за свако $X \neq 0$ (позитивна дефинитност);

(3) коефицијенти g_{ij} у свакој локалној репрезентацији $g_p = g_{ij}(p)dx^i\big|_p \otimes dx^j\big|_p$ су диференцијабилне функције (диференцијабилност).

Заједничка вредност ν индекса g_p, $p \in M$, на семи-Римановој многострукост (M^n, g) назива се *индексом многострукости* M. Притом је $0 \leq \nu \leq n$. Ако је $\nu = 0$, тада је (M^n, g) *Риманова многострукост*; ако је $\nu = 1$ и $n \geq 2$, тада се (M^n, g) назива *Лоренцова многострукост.*

Ако је $x^1, \ldots, x^n$ координатни систем од $U \subset M^n$, тада су за координатна базисна векторска поља $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, компоненте метричког тензора g на U дате са:

$$g_{ij} = g\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right), \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

За било која два векторска поља X, Y на M^n важи:

$$g(X,Y) = g(X^i\partial_i, Y^j\partial_j) = g_{ij}X^iY^j.$$

Како је квадратна форма $g(X,X)$ позитивно дефинитна, детерминанта $g = \|g_{ij}\|$, образована од локалних компоненти g_{ij} од g је увек позитивна и отуда постоји систем величина g^{ih} такав да је:

$$g_{ij}g^{ih} = \delta_j^h = \begin{cases} 1, & i = h, \\ 0, & i \neq h. \end{cases}$$

Чланови g^{ih} су контраваријантне, а g_{ij} коваријантне компоненте метричког тензора g.

1.2 Конексија Леви-Чивите

Нека су X и Y диференцијабилна векторска поља на M^n и $f : M^n \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Релацијом

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

се дефинише векторско поље $[X,Y]$ које се назива Лијева заграда од X и Y, или Лијева деривација $\mathcal{L}_X Y$ од Y у смеру векторског поља X. Ако су X, Y, Z векторска поља на M^n, α и β реалне константе и $f, h : M^n \to \mathbb{R}$ диференцијабилне функције, тада Лијева заграда има следеће особине:

1) $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z]$,
2) $[X,Y] = -[Y,X]$,
3) $[fX, hY] = fh[X,Y] + f(Xh)Y - h(Yf)X$,
4) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$,
5) $[\partial_i, \partial_j] = 0$, за сваки координатни систем $(x^1, \ldots, x^n)$.

Релација 4) се назива *Јакобијевим идентитетом* за Лијеву заграду.

Афина конексија на многострукости M^n је пресликавање

$$\nabla : T(M^n) \times T(M^n) \to T(M^n),$$

које је линеарно и задовољава Лајбницово својство, тј. важи:

(i) $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$,
(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
(iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Тензор торзије конексије ∇ на многострукости M^n је $(1,2)$-тензорско поље T дефинисано са

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Теорема 1.1 ([47]). *На семи-Римановој многострукости M постоји јединствена афина конексија ∇ таква да је:*

(*iv*) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$,

(*v*) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

за $X, Y, Z \in T(M)$. $\square$

Ово је један од фундаменталних резултата семи-Риманове геометрије. Афина конексија семи-Риманове многострукости (M^n, g) која задовољава особине (iv) и (v) назива се *конексија Леви-Чивите*. Особина (iv) означава симетричност или непостојање торзије, док својство (v) представља компатибилност конексије ∇ са метриком g.

Нека је (U, x) координатни систем на семи-Римановој многострукости (M^n, g). Тада су одговарајући Кристофелови симболи дефинисани са:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_h \Gamma^h_{ij}\partial_h = \Gamma^h_{ij}\partial_h,$$

$$g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_h) = \Gamma_{h,ij}; \qquad \Gamma^h_{ij} = g^{kh}\Gamma_{k,ij}.$$

Како је $[\partial_i, \partial_j] = 0$, то важи $\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ji}$. У облику компоненти метричког тензора g Кристофелови симболи прве врсте су дати са:

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

За свако векторско поље Y коваријантни извод од Y дуж векторског поља X је одређен са:

$$\nabla_x Y = \sum_{i,j} X^i \nabla_{\partial_i}(Y^j \partial_j) = \sum_i \left(\sum_j X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \sum_h Y^h \Gamma^i_{jh} \right) \right).$$

Очигледно је да Кристофелови симболи мере како се природна деривација векторских поља на уопштеној многострукости M^n разликује од деривације по правцу у стандардном еуклидском и простору $\mathbb{E}^n$.

За уопштено тензорско поље T типа $(1,2)$ коваријантни извод $\nabla_X T$ дуж векторског поља X је тензорско поље истог типа дефинисано са:

$$(\nabla_X T)(Y, U) = \nabla_X(T(Y,U)) - T(\nabla_X Y, U) - T(Y, \nabla_X U).$$

Дефиниција 1.2. (1) Векторско поље Y је *паралелно* ако је $\nabla_X Y = 0$, за свако $X \in T_p M^n$.

(2) Векторско поље Y дуж регуларне криве c је паралелно ако је $\nabla_{c'} Y = 0$ (и ово не зависи од параметризације).

(3) Регуларна крива c је геодезија ако је $\nabla_{c'} c' = 0$, при чему је c параметризована дужином лука.

1.3 Тензор кривине

Нека је M^n Риманова n-димензиона многострукост са метричким тензором g и конексијом Леви-Чивите ∇.

$(1,3)$-тензорско поље

$$R : T(M^n) \times T(M^n) \times T(M^n) \to T(M^n),$$

дефинисано са

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

се назива *Риман-Кристофелов тензор кривине.*

Одговарајући Риман-Кристофелов оператор кривине типа $(1,1)$, $R(X,Y) : T(M^n) \to T(M^n)$, дефинисан је са:

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

За природна координатна векторска поља $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial x^j}$ важи $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$. Риман-Кристофелов кривински тензор носи све локалне особине Риманове многострукости M^n.

Преласком на локалне координате, претходне релације постају:

$$\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} z^h - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} z^h = R^h_{kji} z^i,$$

где су

$$R^h_{kji} = \partial_k \Gamma^h_{ji} - \partial_j \Gamma^h_{ki} + \Gamma^h_{kt} \Gamma^t_{ji} - \Gamma^h_{jt} \Gamma^t_{ki}$$

локалне компоненте тензора кривине R.

Риман-Кристофелов тензор кривине има следеће особине:

a) R je билинеарно, тј.
$R(\alpha X+\beta Y,Z)=\alpha R(X,Z)+\beta R(Y,Z)$,
$R(X,\alpha Y+\beta Z)=\alpha R(X,Y)+\beta R(X,Y)$,

b) $R(X,Y)$ je линеарни оператор, тј.
$R(X,Y)(\alpha Z+\beta W)=\alpha R(X,Y)Z+\beta R(X,Y)W$,

c) $R(X,Y)=-R(Y,X)$,

d) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$,

где су $X,Y,Z,W\in TM^n$, $\alpha,\beta\in C^\infty(M^n)$.

$(0,4)$-Риман-Кристофелов тензор кривине се такође означава са R и дефинисан je придруживањем реалних функција

$$R(X,Y;Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

за било која векторска поља $X,Y,Z,W\in TM^n$.

Алгебарске особине *c*) и *d*) сада, редом, имају следеће облике:

1) $R(X,Y;Z,W)=-R(Y,X;Z,W)$,
2) $R(X,Y;Z,W)+R(Y,Z;X,W)+R(Z,X;Y,W)=0$.

Осим горе наведених, Риман-Кристофелов тензор кривине задовољава и следеће особине:

3) $R(X,Y;Z,W)-R(Z,W;X,Y)=0$,
4) $R(X,Y;Z,W)+R(X,Y;W,Z)=0$,
5) $(\nabla_X R)(Y,Z)+(\nabla_Y R)(Z,X)+(\nabla_Z R)(X,Y)=0$.

Особине 2) и 5) представљају, редом, *први и други Бјанкијев идентитет*. У локалним координатама, релације 1), 2), 3), 4), 5) имају следећи облик:

1.1) $R_{kjih}+R_{jkih}=0$,
1.2) $R_{kjih}+R_{jikh}+R_{ikjh}=0$,
1.3) $R_{kjih}-R_{ihkj}=0$,

1.4) $R_{kjih} + R_{kjhi} = 0$,

1.5) $\nabla_{\partial_l} R^h_{kji} + \nabla_{\partial_k} R^h_{jli} + \nabla_{\partial_j} R^h_{lki} = 0$,

где је $R_{kjih} = R^t_{kji} g_{th}$.

Како је Риман-Кристофелов тензор кривине веома компликован, било је неопходно дефинисати једноставније реалне функције, које би у потпуности одредиле тензор R.

Нека су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ два линеарно независна вектора у тачки p (семи-)Римановe многострукости (M^n, g), $n \geq 2$, и нека је π раванска секција одређена са ова два вектора. Тада је секциона кривина од M^n у тачки p за раванску секцију π одређена са

$$K(p,\pi) = \frac{R(\vec{x},\vec{y},\vec{y},\vec{x})}{G(\vec{x},\vec{y},\vec{y},\vec{x})},$$

при чему је са G означен Номицу-Кулкарнијев $(0,4)$-тензор.

Номицу-Кулкарнијев тензор је дефинисан са

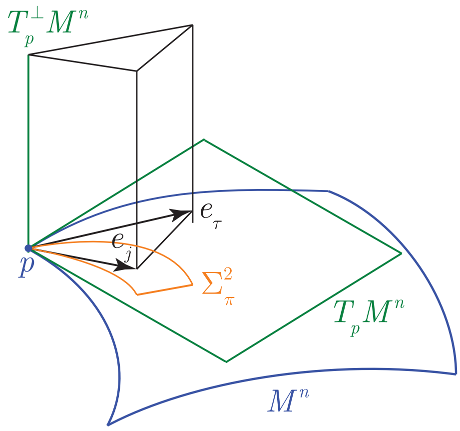
$$G(X,Y,Z,W) = g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W),$$

тј. $G = \frac{1}{2} g \wedge g$, и то је најпростији $(0,4)$-тензор са истим алгебарским особинама као и тензор кривине R. Број $K(p,\pi)$ је независан од избора вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Такође, $K(\pi)$ представља кривину у тачки p површи формиране помоћу свих геодезијских линија на M у тачки p, које су тангентне на π.

Ако је Σ^2_π дводимензиона нормална секција подмногострукости M^n из $\mathbb{E}^{n+m}$, која одговара равни π, формирана као пресек од M^n са афиним $(2+m)$-димензионим подпростором простора $\mathbb{E}^{n+m}$ генерисаним са π и $T^\perp_p M^n$, где је $T^\perp_p M^n$ нормални простор од M^n у тачки p (Слика 1.1). Тада, *секциона кривина* $K(\pi)$ подмногострукости M^n у $\mathbb{E}^{n+m}$, за било коју раванску секцију π, у било којој њеној тачки p, једнака је *Гаусовој кривини у тачки* p одговарајуће дводимензионе нормалне секције Σ^2_π од

M^n у $\mathbb{E}^{n+m}$. Такође, било која секциона кривина многострукости M^n у $\mathbb{E}^{n+m}$ је одређена помоћу кривина од највише две придружене еуклидске раванске криве [37].



Слика 1.1

За семи-Риманову многострукост (M^n, g), $n \geq 2$, кажемо да је *простор константне кривине* ако је њена секциона кривина $K(\pi)$ константна за све равни π у простору T_pM^n, у свакој тачки $p \in M^n$.

Теорема 1.2 (Шур 1886, [47]). *Ако је M^n повезана многострукост димензије $n \geq 3$, и у свакој тачки $p \in M^n$, секциона кривина $K(\pi)$ не зависи од $\pi \in T_pM^n$, тада она не зависи ни од тачке p, тј. она је глобална константа.* □

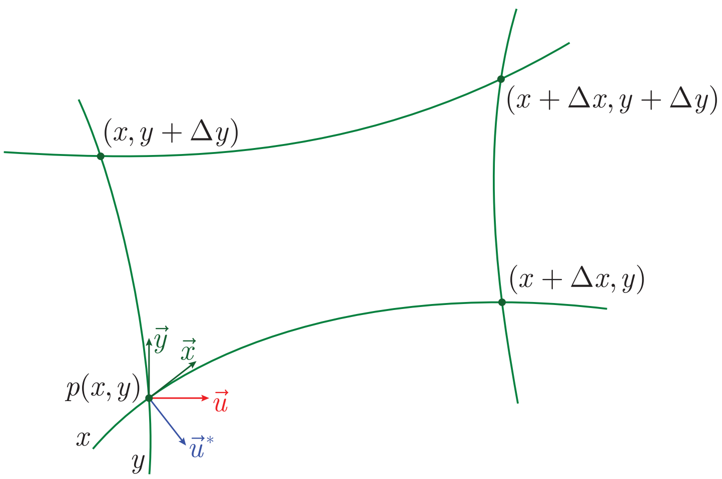
Ако је (M^n, g) простор контантне кривине c, тада је њен тензор кривине R дат следећом формулом

$$R(X, Y)Z = c(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

Е. Картан [3] је показао да је Риман-Кристофелов тензор кривине многострукости M^n у потпуности одређен познавањем свих секционих кривина $K(p, \pi)$ многострукости M^n.

Једну од првих геометријских интерпретација Риман-Кристофеловог тензора кривине дао је Схоутен 1918. године. Нека је p произвољна тачка са M^n, а Σ дводимензиона површ кроз p у M^n, са координатним линијама x и y. Уочимо паралелограм конструисан од координатних кривих са природним тангентним векторима у p $\left(\vec{x} = \frac{\partial}{\partial x}(p), \vec{y} = \frac{\partial}{\partial y}(p)\right)$ (Слика 1.2). Паралелним померањем вектора $\vec{u} \in T_pM^n$ (није неопходно да буде тангентан на Σ) око паралелгорама добијамо „неки нови“ вектор $\vec{u}^*$ који је са почетним вектором повезан релацијом:

$$\vec{u}^* = \vec{u} - [R(\vec{x}, \vec{y})\vec{u}]\Delta x \Delta y.$$



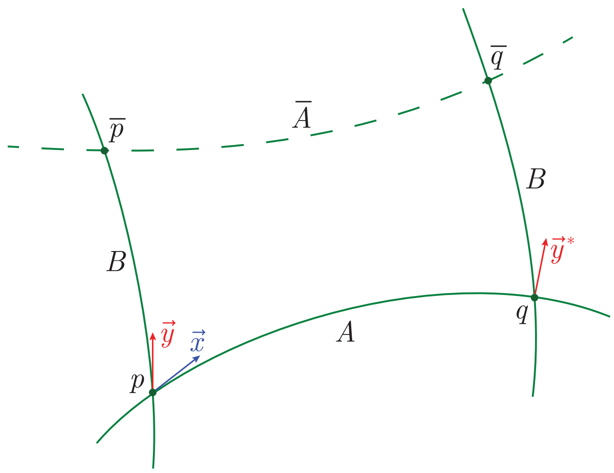
Слика 1.2: Паралелно померање вектора свуда око координатног паралелограма.

У еуклидској равни, паралелним померањем вектора $\vec{u}$ по правоугаонику описаном са Декартовим координатама (x, y) вратили би се у његов почетни, оригинални положај без икакве промене. Наиме, дати тангентни вектор $\vec{v}$ у тачки $p \in M^n$ се, помоћу конексије ∇, може транспортовати дуж било које криве α у M^n кроз $p = \alpha(0)$, тако да постоји јединствено векторско поље V дуж α такво да је $V(0) = \vec{v}$ и које је паралелно дуж криве α, тј. $\nabla_{\alpha'} V = 0$. Његова вредност $V(t)$ у тачки $q = \alpha(t)$

се назива паралелно померање вектора $\vec{v}$ од p до q дуж криве α. За разлику од еуклидске геометрије, где је паралелно померање вектора на неки начин апсолутно (нема промене), у Римановој геометрији то није случај. Паралелни транспорт вектора чува њихове дужине, али не и њихове правце. Ову промену правца при паралелном транспорту Картан је назвао *холономијом.* У складу са Схоутеновим резултатом, долази се до закључка да се $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{u}$ може дефинисати као *мера промене правца при паралелном транспорту вектора око координатног паралелограма.* Ако на Римановој многострукости правци вектора након паралелног транспорта око координатног паралелограма остају непромењени, тада се ове многострукости називају *локално равним* или *локално еуклидским просторима* ($R = 0$) [35].

Видели смо да су секционе кривине веома битне скаларне изометријске инваријанте на Римановој многострукости. Прву геометријску интерпретацију секционе кривине дали су Леви-Чивита 1917. године, помоћу тзв. *паралелограмоида.* Наиме, нека су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ два линеарно независна јединична вектора у тачки $p \in M^n$. Уочимо геодезијску линију кроз p, при чему је $\vec{x}$ њен вектор брзине, тј. тангентан је на уочену геодезијску линију. На геодезијској линији на геодезијском растојању A од тачке p, уочимо тачку q. У тачки q уочавамо јединични вектор $\vec{y}^*$ добијен паралелним померањем вектора $\vec{y}$ дуж геодезијске линије pq. Кроз тачку q постоји јединствена геодезијска линија, чији је вектор брзине $\vec{y}^*$, и на њој уочавамо тачку $\bar{q}$ на геодезијском растојању B од тачке q. Истовремено, кроз тачку p постоји јединствена геодезијска линија, чији је вектор брзине једнак $\vec{y}$, и на њој тачка $\bar{p}$ на геодезијском растојању B од тачке p (Слика 1.3).

Ако са $\bar{A}$ означимо дужину која одговара геодезијској линији која пролази кроз тачке $\bar{p}$ и $\bar{q}$, тада се фигура $pq\bar{q}\bar{p}$ назива *паралелограмоид*



Слика 1.3: Паралелограмоид Леви-Чивите.

Леви-Чивите и притом важи

$$K(p, \vec{x} \wedge \vec{y}) \approx \frac{A^2 - \bar{A}^2}{(AB \sin \varphi)^2},$$

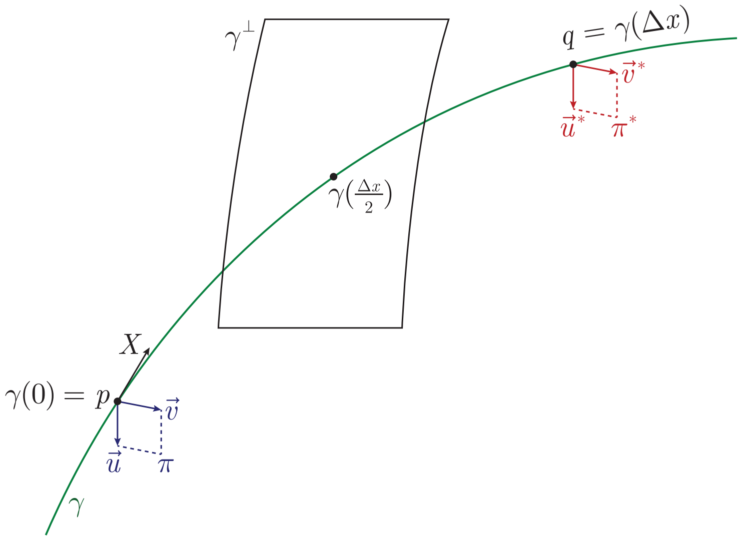
где је $K(p, \vec{x} \wedge \vec{y})$ секциона кривина равни одређене векторима $\vec{x}$ и $\vec{y}$ у тачки p, а φ угао између јединичних вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Простори са константном секционом кривином су простори са највећим могућим степеном симетрије, тј. ови простори изгледају исто у свим тачкама, и у свакој тачки ови простори су „искривљени" исто у свим правцима.

1.4 Симетрије тензора кривине R

У даљем трагању за просторима просторима са што више симетрије дошло се на идеју о паралелном транспорту било које тангентне равни $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$, генерисане векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$ [35]. Нека је $\gamma(x)$ крива на M^n таква да је $\gamma(0) = p \in M^n$ и тангентно векторско поље X од $\gamma(x)$. Не губећи на општости, можемо претпоставити да су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортонормирани вектори (секциона кривина не зависи од базних вектора равни).

Паралелним померањем равни π дуж криве $\gamma(x)$ од тачке p до тачке q добија се раван π^* (Слика 1.4), и притом важи

$$K(q, \pi^*) = K(p, \pi) + [(\nabla_{\gamma'(0)} R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u})]\Delta x.$$



Слика 1.4

Дакле, на многострукости M^n секциона кривина се чува при паралелном транспорту дуж криве ако и само ако је $\nabla R = 0$, тј. када је тензор кривине паралелан. Многострукости за које важи услов $\nabla R = 0$ називају се *локално симетричним просторима.* Карактеризацију локално симетричних простора дао је Леви (1925. године). Она се геометријски може интерпретирати као чување секционе кривине при „симетрији огледала“. Наиме, равни π и π^*, која је добијена при паралелном транспорту равни дуж криве од тачке p до тачке q, могу се посматрати као слике у хиперраванском огледалу $\gamma^\perp$ управном на γ, постављеном на средишњој тачки између p и q.

У дводимензионом случају, локално симетрични простори су еквивалентни просторима константне кривине. Код вишедимензионих многострукости локално симетрични простори образују одговарајућу екстензију реалних просторних форми.

Следећи корак у паралелном транспорту је транспорт равни око координатног паралелограма [35]. У тачки $p \in M^n$ уочавамо дводимензиону површ Σ са локалним координатама x и y. Нека је на Σ конструисан паралелограм од координатних кривих са тангентним векторским пољима X и Y. Ако је π раван кроз p (није неопходно да буде тангентна на Σ) која је генерисана векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$, тј. $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$, тада паралелним транспортом равни π око координатног паралелограма добијамо:

$$\begin{aligned}\vec{u}^* &= \vec{u} - [R(\vec{x}, \vec{y})\vec{u}]\Delta x \Delta y + \mathscr{O}^2(\Delta x, \Delta y),\\ \vec{v}^* &= \vec{v} - [R(\vec{x}, \vec{y})\vec{v}]\Delta x \Delta y + \mathscr{O}^2(\Delta x, \Delta y),\end{aligned}$$

па је тада

$$\begin{aligned}R(\vec{u}^*, \vec{v}^*, \vec{v}^*, \vec{u}^*) = R(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}) &+ [(R \cdot R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y})]\Delta x \Delta y\\ &+ \mathscr{O}^2(\Delta x, \Delta y),\end{aligned} \tag{1.1}$$

где је $(0,6)$-тензор $R \cdot R$ добијен деловањем кривинског оператора $R(X,Y)$ као деривације на $(0,4)$-тензор кривине R, тј.

$$\begin{aligned}&(R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = (R(X,Y) \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4) =\\ &= -R(R(X,Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_1, R(X,Y)X_2, X_3, X_4) -\\ &- R(X_1, X_2, R(X,Y)X_3, X_4) - R(X_1, X_2, X_3, R(X,Y)X_4),\end{aligned}$$

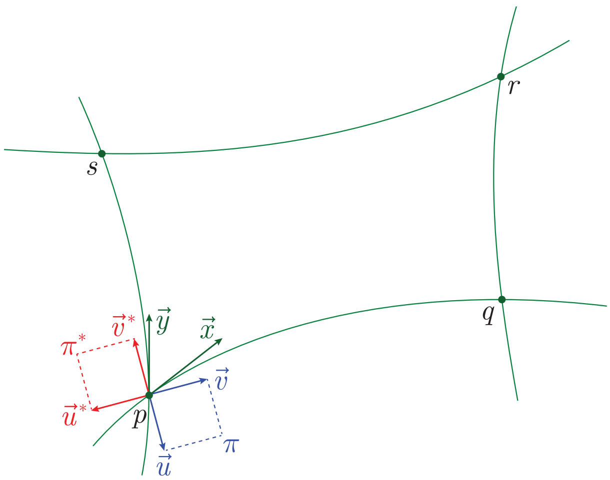
при чему су X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y произвољна тангентна векторска поља на M^n.

С обзиром да је конексија Леви-Чивите метричка, ако посматрамо ортонормиране векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$, тада из релације (1.1) добијамо:

$$K(p, \pi^*) = K(p, \pi) + [(R \cdot R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y})]\Delta x \Delta y + \mathscr{O}^2(\Delta x, \Delta y),$$

где је $\pi^* = \vec{u}^* \wedge \vec{v}^*$ (Слика 1.5) раван генерисана векторима $\vec{u}^*$ и $\vec{v}^*$.

Из последњег услова је очигледно да се секциона кривина при паралелном транспорту око координатног паралелограма неће променити једино ако је $R \cdot R = 0$ [35]. Многострукости за које важи услов $R \cdot R = 0$ називају се *семи-симетричним просторима* или *Сабо симетричним просторима*.



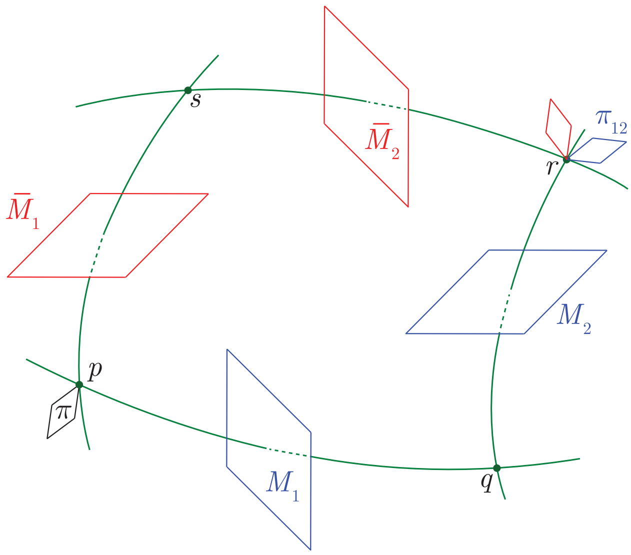
Слика 1.5: Паралелни пренос равни свуда око координатног паралелограма.

У периоду од 1982. године до 1984. године З. Сабо је дао потпуну унутрашњу класификацију семи-симетричних Риманових многострукости [52, 53].

Сви локално симетрични простори су аутоматски и семи-симетрични. Такође, све Риманове површи M^n су семи-симетричне, стога семи-симетричност посматрамо за многострукости M^n $(n \geq 3)$ и сматрамо их природним проширењем локалне симетричности.

Семи-симетрични простори се могу геометријски интерпретирати као комутација симетрија помоћу дуплог огледала [35]. Наиме, ако у средишњој тачки дужи pq поставимо огледало M_1, у средишту дужи qr огледало M_2, на средишту ps огледало $\bar{M}_1$, а у средишту sr огледало $\bar{M}_2$ и посматрамо рефлексије у равни π кроз огледала M_1 и M_2, односно

$\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$, тада се у тачки r добијају резултујуће равни π_{12} и $\bar{\pi}_{12}$. Код симетричних простора секционе кривине $K(r, \pi_{12})$ и $K(r, \bar{\pi}_{12})$ су једнаке (Слика 1.6).



Слика 1.6: Симетрија „дуплог огледала“.

Особине $(0,6)$-тензора $R \cdot R$ дате су у следећој леми.

Лема 1.1 ([35]). *Тензор $R \cdot R$ има следеће алгебарске особине:*

$$
\begin{aligned}
i)\ (R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= -(R\cdot R)(X_2,X_1,X_3,X_4;X,Y)\\
&= -(R\cdot R)(X_1,X_2,X_4,X_3;X,Y)\\
&= (R\cdot R)(X_3,X_4,X_1,X_2;X,Y),\\
ii)\ (R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &+ (R\cdot R)(X_1,X_3,X_4,X_2;X,Y)+\\
&+ (R\cdot R)(X_1,X_4,X_2,X_3;X,Y) = 0,\\
iii)\ (R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= -(R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;Y,X),\\
iv)\ (R\cdot R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &+ (R\cdot R)(X_3,X_4,X,Y;X_1,X_2)+\\
&+ (R\cdot R)(X,Y,X_1,X_2;X_3,X_4) = 0.
\end{aligned}
$$

Доказ: Особине *i*-*iii* аутоматски следе из симетрија Риман-Кристофеловог тензора кривине. Особина *iv* се лако доказује заменом сваког вектора облика $R(U,V)W$, који учествује у члановима $R \cdot R$, са њиховим разлагањем у односу на ортонормирани репер $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. $\square$

1.5 Тачибана тензор $Q(g, R)$

Најпростији $(0,6)$-тензор на Римановој многострукости M^n $(n \geq 3)$ који има исте алгебарске особине као и тензор $R \cdot R$ је тензор $Q(g,R)$ кога је проучавао Тачибана (1974. године). Тачибана тензор $Q(g,R)$ је дефинисан са:

$$
\begin{aligned}
&Q(g,R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = \\
&= ((X \wedge_g Y) \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4) = \\
&= -R((X \wedge_g Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_1, (X \wedge_g Y)X_2, X_3, X_4) - \\
&\quad - R(X_1, X_2, (X \wedge_g Y)X_3, X_4) - R(X_1, X_2, X_3, (X \wedge_g Y)X_4),
\end{aligned}
$$

при чему је $\wedge_g = \wedge$ метрички ендоморфизам дефинисан са:

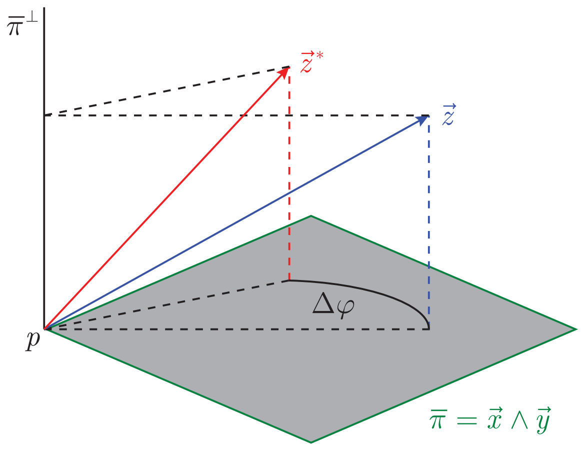
$$(X \wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y.$$

Геометријски се овај ендоморфизам може интерпретирати на следећи начин [35]. Нека су $\vec{x}, \vec{y} \in T_pM^n$ ортонормирани вектори и нека су $\{\vec{e}_3, \vec{e}_4, \ldots, \vec{e}_n\}$ вектори такви да је $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \ldots, \vec{e}_n\}$ ортонормирана база од T_pM^n. Тада се произвољан вектор $\vec{z} \in T_pM^n$ разлаже помоћу вектора ове базе на следећи начин:

$$\vec{z} = g(\vec{z}, \vec{x})\vec{x} + g(\vec{z}, \vec{y})\vec{y} + \sum_{i=3}^{n} g(\vec{z}, \vec{e}_i)\vec{e}_i.$$

Ротацијом пројекције вектора $\vec{z}$ у равни π, која је генерисана векторима $\vec{x}$ и $\vec{y}$ за неки веома мали угао $\Delta\varphi$, при чему држимо фиксираном пројекцију од $\vec{z}$ на $(n-2)$-простор генерисан са $\{\vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$, добијамо нови вектор $\vec{z}^*$ за који важи:

$$\vec{z}^* = \vec{z} - [(\vec{x} \wedge_g \vec{y})\vec{z}]\Delta\varphi + \mathscr{O}(\Delta\varphi).$$



Слика 1.7: Геометријска интерпретација ендоморфизма $\wedge_g$.

Дакле, вектор $(\vec{x} \wedge_g \vec{y})\vec{z}$ мери промену вектора $\vec{z}$ након инфинитезималне ротације од $\vec{z}$ у равни $\overline{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ и тачки p (Слика 1.7).

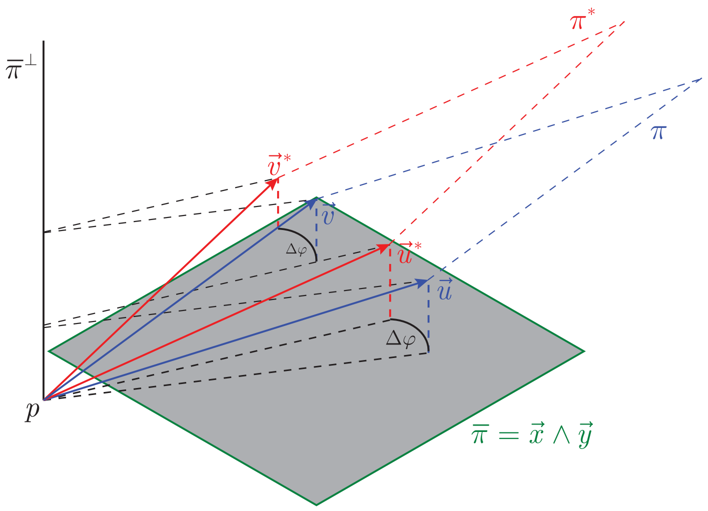
Ако се искористи ова геометријска интерпретација, онда се на природан начин долази до геометријске интерпретације компоненти Тачибана тензора $Q(g, R)$: ако су $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \ldots, \vec{e}_n\}$ вектори ортонормиране базе од T_pM^n и нека су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортонормирани вектори у T_pM^n. Тада инфинитезималном ротацијом вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ у равни $\overline{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ добијају се вектори $\vec{u}^*$ и $\vec{v}^*$ за које важи:

$$\vec{u}^* = \vec{u} - [(\vec{x} \wedge_g \vec{y})\vec{u}]\Delta\varphi + \mathscr{O}^1(\Delta\varphi),$$
$$\vec{v}^* = \vec{v} - [(\vec{x} \wedge_g \vec{y})\vec{v}]\Delta\varphi + \mathscr{O}^1(\Delta\varphi),$$

Упоређујући секционе кривине равни $\pi = \vec{u} \wedge \vec{v}$ и $\pi^* = \vec{u}^* \wedge \vec{v}^*$, добија се:

$$K(p, \pi^*) = K(p, \pi) + [Q(g, R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y})]\Delta\varphi + \mathscr{O}^1(\Delta\varphi).$$

Компоненте Тачибана тензора $Q(g, R)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}, \vec{u}; \vec{x}, \vec{y})$ мере промене секционе кривине при инфинитезималним ротацијама у односу на тачку



Слика 1.8: Геометријска интерпретација компоненти Тачибана тензора.

p (*тачка* p *је центар ротације*). На неки начин ове компоненте представљају нормализацију компоненти од $R \cdot R$, које мере промену секционе кривине након паралелног померања равни око инфинитезималног паралелограма у околини тачке p.

Пропозиција 1.1 ([30]). *Риманова многострукост* (M^n, g) *је простор константне кривине ако и само ако је Тачибана тензор* $Q(g, R) = 0$. $\square$

1.6 Дешч-симетрични простори

Рад К. Номицуа [46] из 1968. године на класификацији семи-симетирчних хиперповрши еуклидских простора био је почетна тачка великог броја нових истраживања, како у унутрашњој тако и у спољашњој диференцијалној геометрији. Рад Б. J. Чена [7] из 1980. године о тотално амбиличким подмногострукостима симетричних простора, одиграо је кључну улогу у настанку појма псеудо-симетричности. Након овог рада могло се видети да се псеудо-симетричност може интерпретирати као природна генерализација семи-симетричности.

Даље ћемо, на два начина, један из унутрашње и други из спољашње геометрије многострукости, описати како се дошло до појма *псеудо-симетрије у смислу Р. Дешча.* Након тога ће бити дате прецизне дефиниције ових псеудо-симетрија. Ова истраживања су спроводили В. Грицак, А. Адамов, М. Хотлош, Ф. Дефевер, П. Венци, Ј. Микеш и Р. Дешч.

Први резултат у настајању појма псеудо-симетрије је следећи.

Теорема 1.3 ([7])**.** *Ако постоји геодезијско пресликавање са Риманове многострукости M на семи-симетричну Риманову многострукости $\tilde{M}$, тада M мора бити псеудо-симетрична.* □

Следећи резултат, који генералише теорему Б. Ј. Чена на тотално амбиличким подмногострукостима локално симетричних простора, добијен је независно од З. Олшака, и може се сматрати као прави почетак у истраживању појма псеудо-симетрија.

Теорема 1.4 ([48])**.** *Нека је M тотално амбиличка подмногострукост семи-симетричне Риманове многострукости $\tilde{M}$. Тада је M конформно равна или псеудо-симетрична многострукост.* □

Семи-Риманова многострукост (M^n, g) је *псеудо-симетрична* [18] ако су у свакој тачки из M^n тензори $R \cdot R$ и $Q(g, R)$ линеарно зависни, тј. ако важи:

$$R \cdot R = L_R Q(g, R), \tag{1.2}$$

где је L_R функција на скупу $U_R = \{x \in M \mid Q(g, R)(x) \neq 0\}$.

С обзиром да је највећи допринос увођењу и проучавању појма псеудо-симетрије дао Ричард Дешч, врло често се за многострукости које задовољавају релацију (1.2) каже да су *псеудо-симетричне у смислу Дешча*, или *Дешч-симетричне подмногострукости* [54].

Јасно је да су семи-симетричне многострукости такође псеудо-симетричне. Обрнуто не важи. Постоје многе псеудо-симетричне многострукости које нису семи-симетричине. У радовима Р. Дешча је дато много таквих примера.

Напоменимо да су М.Ц. Чаки и М. Тарафдар такође увели известан појам псеудо-симетрије, који је потпуно различит од појма псеудо-симетрије који се разматра у овом раду.

Нека су у тачки $p \in U_R$ дате равни $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$, $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y} \subset T_pM^n$. Кажемо да је раван π кривински зависна у односу на $\bar{\pi}$ ако је $Q(g,R)(\vec{v},\vec{w},\vec{w},\vec{v};\vec{x},\vec{y}) \neq 0$. Ова дефиниција не зависи од избора база за π и $\bar{\pi}$. Сада се може дефинисати *дупла секциона кривина* или *секциона кривина Дешча*, $L_R(p,\pi,\bar{\pi})$, као:

$$L_R(p,\pi,\bar{\pi}) = \frac{(R\cdot R)(\vec{v},\vec{w},\vec{w},\vec{v};\vec{x},\vec{y})}{Q(g,R)(\vec{v},\vec{w},\vec{w},\vec{v};\vec{x},\vec{y})}.$$

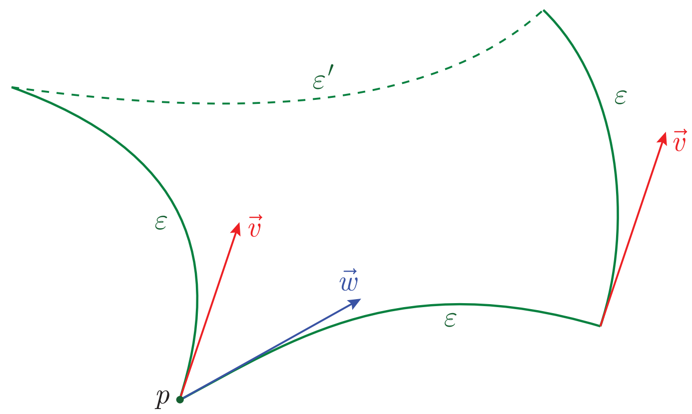
Ова дефиниција такође не зависи од избора база тангентних равни π и $\bar{\pi}$ [35].

Теорема 1.5 ([35])**.** *У свакој тачки $p \in U_R$ тензор $R \cdot R$ Риманове многострукости M^n је комплетно одређен дуплом секционом кривином $L_R(p,\pi,\bar{\pi})$ кривински зависних равни $\pi,\bar{\pi} \in T_pM^n$.* □

Геометријска интерпретација дупле секционе кривине је дата помоћу паралелног транспорта око паралелограмоида Леви-Чивите и инфинитезималних ротација [35]: нека су $\vec{v}$ и $\vec{w}$ ортонормирани вектори у тачки p такви да је $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w} \subset T_pM^n$. Посматрајмо сквероид Леви-Чивите одређен са $\vec{v}$ и $\vec{w}$, стране ε (Слика 1.9). Тада је секциона кривина за π у тачки p дата са

$$K(p,\pi) \approx \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}{\varepsilon^4},$$

где је ε' дужина геодезијске линије која „затвара“ сквероид.



Слика 1.9: Сквероид Леви-Чивите

Паралелним транспортом вектора $\vec{v}$ и $\vec{w}$ око координатног паралелограма P добијају се вектори $\vec{v}^*$ и $\vec{w}^*$. Конструишу се сквероиди Леви-Чивите од вектора $\{\vec{v}^*, \vec{w}^*\}$ исте геодезијске дужине ε. Ако са $\varepsilon^{*\prime}$ означимо геодезијску дужину геодезијске линије која затвара сквероид, тада добијамо

$$(R \cdot R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}) \approx \frac{(\varepsilon^{*\prime})^2 - (\varepsilon')^2}{\varepsilon^4} \cdot \frac{1}{\Delta x \Delta y}.$$

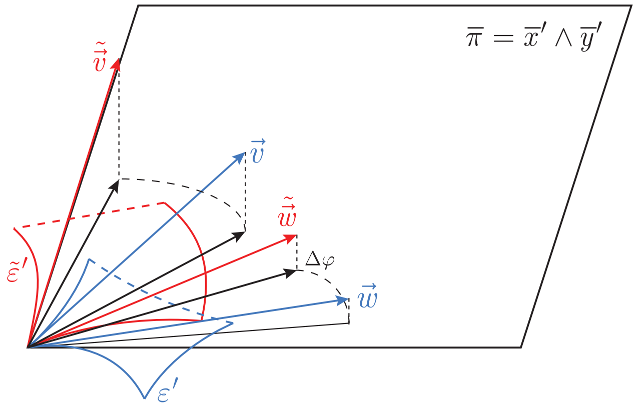
Нека су даље $\tilde{\vec{v}}$ и $\tilde{\vec{w}}$ вектори добијени инфинитезималном ротацијом пројекција од $\vec{v}$ и $\vec{w}$ у равни $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$. Конструишу се сквероиди Леви-Чивите од вектора $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ и $\{\tilde{\vec{v}}, \tilde{\vec{w}}\}$, респективно, тако да оба буду исте дужине стране ε, а да им дужине геодезијских линија које их „комплетирају" буду редом ε' и $\tilde{\varepsilon}'$ (Слика 1.10).

Тада важи

$$Q(g, R)(\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}, \vec{v}; \vec{x}, \vec{y}) \approx \frac{(\tilde{\varepsilon}')^2 - (\varepsilon')^2}{\varepsilon^4} \cdot \frac{1}{\Delta \varphi}.$$

Отуда је секциона кривина Дешча за раван $\pi = \vec{v} \wedge \vec{w}$ у односу на $\bar{\pi} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ у тачки p дата са

$$L(p, \pi, \bar{\pi}) \approx \frac{(\varepsilon^{*\prime})^2 - (\varepsilon')^2}{(\tilde{\varepsilon}')^2 - (\varepsilon')^2} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta x \Delta y}.$$



Слика 1.10

Слично, као што су информације о свим секционим кривинама $K(p,\pi)$ неке многострукости садржане у њеном Риман-Кристофеловом тензору R, тако су и све информације о дуплим секционим кривинама $L(p,\pi,\bar{\pi})$ садржане у тензору $R \cdot R$.

Теорема 1.6 ([35])**.** *Риманова многострукост M^n $(n \geq 3)$ је псеудо-симетрична у смислу Дешча ако и само ако за сваку њену тачку $p \in U_R$ све дупле секционе кривине $L_R(p,\pi,\bar{\pi})$ су исте, тј. за све кривински-зависне равни π и $\bar{\pi}$ у p, важи $L_R(p,\pi,\bar{\pi}) = L_R(p)$ за неку функцију $L_R : M \to \mathbb{R}$.* □

Очигледно је, да код *семи-симетричних* многострукости дупла секциона кривина ишчезава, тј. $L_R(p,\pi,\bar{\pi}) = 0$, за свако M^n и сваки пар кривински зависних равни $\pi, \bar{\pi} \subset T_pM^n$.

1.7 Ричијева и скаларна кривина

Нека су $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ локално ортонормирана векторска поља на M^n. Тада прва контракција тензора кривине $R(X,Y)Z$ дефинише *Ри-*

чијев $(0,2)$ *тензор* $S(Z,Y)$. Ричијев оператор кривине S се дефинише као траг линеарног пресликавања $Z \to R(Z,X)Y$, тј.

$$S(Y,Z) = tr(X \to R(X,Y)Z) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,Y)Z,e_i), \tag{1.3}$$

или у локалним компонентама

$$S_{ij} = R^t_{tij} = g^{ts}R_{tijs}.$$

Ричијева кривина $S(X) = S(X,X)$ тако представља средњу вредност свих секционих кривина равни које су одређене, тј. које садрже векторско поље X.

Скаларна кривина τ представља контракцију Ричијевог тензора, тј.

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i), \quad \text{тј.}$$
$$\tau = g^{ij}S_{ij},$$

и она се може посматрати као средња вредност секционих кривина 2-равни од M^n. За $n=2$ важи $K = \frac{\tau}{2}$.

За (семи-)Риманову многострукост M^n кажемо да је *Ајнштајнов простор* ако је $S = \lambda g$, за неко $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$. За $n > 2$ Ајнштајнови простори имају константну скаларну кривину τ.

$(0,4)$-тензор $R \cdot S$ се добија дејством оператора $R(X,Y)$ као деривације на $(0,2)$-симетрични Ричијев тензор:

$$\begin{aligned}(R\cdot S)(X,Y;Z,W) &= (R(Z,W)\cdot S)(X,Y) = \\ &= -S(R(Z,W)X,Y) - S(X,R(Z,W)Y),\end{aligned}$$

за $X,Y,Z,W \in T(M^n)$.

За многострукост M^n кажемо да је *Ричи семи-симетрична* ако је $R \cdot S = 0$. Свака семи-симетрична многострукост је и Ричи семи-симетрична. Обрнуто не важи [27].

Најједноставнији $(0,4)$-тензор на M^n који има исте алгебарске особине као и $R \cdot S$ је *Ричи Тачибана тензор* $Q(g,S)$ дефинисан са:

$$\begin{aligned} Q(g,S)(X,Y;Z,W) &= ((Z \wedge_g W) \cdot S)(X,Y) = \\ &= -S((Z \wedge_g W)X,Y) - S(X,(Z \wedge_g W)Y). \end{aligned}$$

Лако се може видети да је многострукост M^n *Ајнштајнова* ако и само ако је $Q(g,S) = 0$.

За Риманову многострукост M^n $(n \geq 3)$ кажемо да је *Ричи псеудосиметрична у смислу Дешча* ако је у свакој тачки из M^n:

$$(R \cdot S)(p) = L_S(p) Q(g,S)(p).$$

где је L_S функција на скупу $U_s = \{x \in M \mid Q(g,S)(x) \neq 0\}$.

1.8 Вејлов конформни тензор кривине

На n-димензионој Римановој многострукости M^n, $(0,4)$ *Вејлов конформни тензор кривине* C је дат са:

$$\begin{aligned} C(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) + \frac{1}{n-2}\Big\{g(X,Z)S(Y,W) + \\ &+ g(Y,W)S(X,Z) - g(X,W)S(Y,Z) - g(X,Z)S(X,W)\Big\} + \\ &+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\Big\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\Big\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Многострукост M^n је *конформно равна* ако и само је $C \equiv 0$, $(n \geq 4)$ [55].

Дејством оператора кривине R као деривације на $(0,4)$-Вејлов конформни тензор кривине C, добија се $(0,6)$-тензор $R \cdot C$ дефинисан са:

$$\begin{aligned} (R \cdot C)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= (R(X,Y) \cdot C)(X_1,X_2,X_3,X_4) = \\ = -C(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4) &- C(X_1,R(X,Y)X_2,X_3,X_4) - \\ - C(X_1,X_2,R(X,Y)X_3,X_4) &- C(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4). \end{aligned}$$

Тензор $R \cdot C$ има потпуно исте алгебарске особине као и тензор $R \cdot R$.

Најједноставнији $(0, 6)$-тензор на Римановој многострукости M^n са истим алгебарским особинама као и $R \cdot C$ је *Вејл-Тачибана тензор* $Q(g, C)$, дефинисан са:

$$\begin{aligned} Q(g,C)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= ((X\wedge_g Y)\cdot C)(X_1,X_2,X_3,X_4) = \\ = -C((X\wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4) &- C(X_1,(X\wedge_g Y)X_2,X_3,X_4) - \\ - C(X_1,X_2,(X\wedge_g Y)X_3,X_4) &- C(X_1,X_2,X_3,(X\wedge_g Y)X_4). \end{aligned}$$

Пропозиција 1.2 ([38])**.** *Риманова многострукост* (M^n, g) $(n \geq 4)$ *је конформно равна ако и само ако је њен Вејл-Тачибана тензор идентички једнак нули.*

Доказ: На основу класичних резултата Вејла, Риманова многострукост димензије веће или једнаке 4, је конформно равна ако и само ако је њен конформни тензор кривине C једнак нули. То имплицира да је $Q(g, C) \equiv 0$.

С друге стране, ако је $Q(g, C) \equiv 0$, то значи да су секционе кривине K Риманове многострукости константне, а то имплицира да је Вејлова секциона кривина $K_C = C(X, Y, Y, X)$ константна. Због тога је траг од C једнак нули, а то значи да је Риманова многострукост конформно равна. □

За Риманову многострукост M^n $(n \geq 4)$ кажемо да је *Вејл псеудо-симетрична у смислу Дешча* ако постоји скаларна фунцкија L_C таква да је:

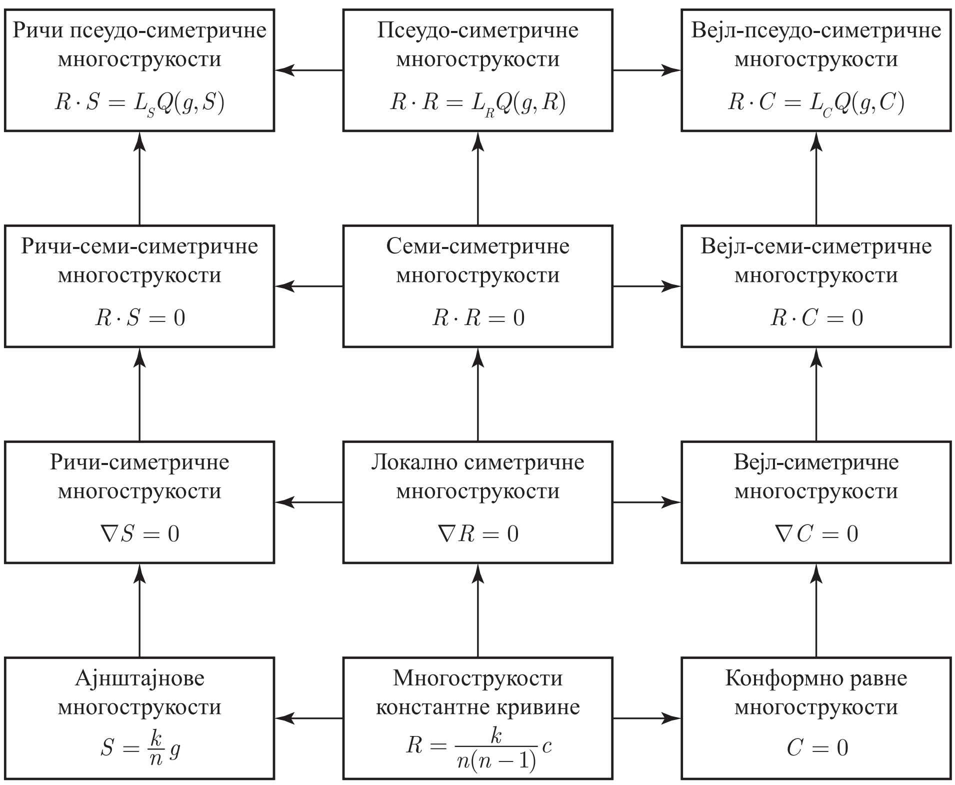
$$R \cdot C = L_C Q(g, C).$$

Свака псеудо-симетрична многострукост аутоматски је и Ричи-псеудо-симетрична и Вејл-псеудо-симетрична. Обрнуто тврђење у општем случају не важи [18].

Потпуно аналогно, можемо дефинисати $(0,6)$-тензор кривине $C \cdot C$, на следећи начин:

$$\begin{aligned}(C \cdot C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &= (C(X,Y) \cdot C)(X_1, X_2, X_3, X_4) = \\ = -C(C(X,Y)X_1, X_2, X_3, X_4) &- C(X_1, C(X,Y)X_2, X_3, X_4) - \\ - C(X_1, X_2, C(X,Y)X_3, X_4) &- C(X_1, X_2, X_3, C(X,Y)X_4).\end{aligned}$$

Из досад наведеног је очигледно да локално симетрични простори $(\nabla R = 0)$ образују уопштење реалних просторних форми. Слично, семи-симетрични простори $(R \cdot R = 0)$ су уопштење локално-симетричних, а псеудо-симетрични простори $(R \cdot R = L_R Q(g, R))$ формирају уопштење семи-симетричних простора.



Слика 1.11

Сличан ланац се може конструисати полазећи од Ајнштајнових многострукости ($S = \frac{\tau}{n} g$), преко Ричи-симетричних ($\nabla S = 0$), Ричи-семи-симетричних простора ($R \cdot S = 0$), па све до Ричи-псеудо-симетричних простора ($R \cdot S = L_S Q(g, S)$).

И на крају, још један сличан ланац се добија ако се пође од конформно равних простора ($C = 0$) и конформно-симетричних ($\nabla C = 0$), Вејл-семи-симетричних ($R \cdot C = 0$) и Вејл-псеудо-симетричних ($R \cdot C = L_C Q(g, C)$).

Све то је приказано дијаграмом (Слика 1.11), при чему стрелице у дијаграму означавају праве инклузије. Димензија многострукости у свим случајевима је већа од 3.

1.9 Подмногострукости Риманових многострукости

Нека су (M^n, g) и $(N^m, \tilde{g})$, $(m > n)$, Риманове многострукости и нека је $i : M^n \to N^m$ утапање, тада кажемо да је i изометрична имерзија ако су метрике од M^n и N^m повезане са i тако да је $\tilde{g}(i_*(X), i_*(Y)) = g(X, Y)$, за све векторе $X, Y \in M^n$, где је са i_* означено изводно пресликавање од i. При разматрању многострукости у Римановој геометрији увек претпостављамо да је утапање изометрично.

Нека је многострукост N покривена системом координатних околина $\{V, u^\alpha\}$, а многострукост M покривена системом координатних околина $\{u, x^h\}$, где је $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in \{1, 2, \dots, m\}$, а $i, j, k, h, \dots \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тада се M може локално представити са $u^\alpha = u^\alpha(x^h)$. Очигледно је да се могу идентификовати векторска поља из M и њихове слике при диференцијабилном пресликавању, тј. може се идентификовати векторско поље X (са многострукости M) са његовом сликом $i_*(X)$, при чему је i имерзија са M у N. Ако је X векторско поље на T_pM, тада се оно може локално представити као $X = X^h \partial_h$, где је $\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}$. Такође, X има и локалну репрезентацију облика $X = B_h^\alpha X^h \partial_\alpha$ у N, где је $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, $B_h^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^h}$.

Ако је X векторско поље на M, тада је $\tilde{X}$ екстензија од X на многострукост N, ако је његова рестрикција на подмногострукост M управо векторско поље X. Ако је N Риманова многострукост са Римановом метриком $\tilde{g}$, тада је подмногострукост M такође Риманова многострукост са Римановом метриком g, која је дефинисана са

$$g(X, Y) = \tilde{g}(X, Y),$$

за било која векторска поља X и Y на M.

Риманова метрика g се назива *индукована метрика на* M. Вектор $\zeta_p \in TN$, за који важи $\tilde{g}(X_p, \zeta_p) = 0$ за сваки вектор $X \in TM$, се назива нормалним вектором на M у N у тачки p. Са $T^\perp M$ означавамо векторско раслојење свих нормалних векторских поља од M у N. Очигледно је да важи

$$TN_{|M} = TM + T^\perp M,$$

тј. било који вектор $\vec{v} \in T_pM$ се може на јединствен начин декомпоновати као $\vec{v} = \vec{v}^\perp + \vec{v}^\top$, где је $\vec{v}^\top \in T_pM$, а $\vec{v}^\perp \in T_p^\perp M$.

Са $\tilde{\nabla}$ означавамо конексију Леви-Чивите на N у односу на метрику $\tilde{g}$, а са ∇ конексију Леви-Чивите на M у односу на индуковану метрику g. За векторска поља X и Y на M, са $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ означавамо њихове екстензије на N. Тада је $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\restriction M} = [X, Y]$. Због тога има смисла причати о $\tilde{\nabla}_X Y$ као о векторском пољу у TN дуж M, па се као такво може декомпоновати на свој тангентни и нормални део. Тангентни део од $\tilde{\nabla}_X Y$ се поклапа са $\nabla_X Y$, тј. $(\tilde{\nabla}_X Y)^\top = \nabla_X Y \in TM$, док је нормални део од $\tilde{\nabla}_X Y$ познат као *друга фундаментална форма* h од M у N, тј. h је тензор дефинисан са:

$$h : TM \times TM \to T^{\perp}M,$$
$$h(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^{\perp} = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Последња релација представља *Гаусову формулу*, тј.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y). \tag{1.5}$$

Подмногострукост M је *тотално геодезијска* ако је $h \equiv 0$.

На сличан начин се може и декомпоновати $\tilde{\nabla}_X \zeta$, $\zeta \in T_p^{\perp}M$, тј. $\tilde{\nabla}_X \zeta = (\tilde{\nabla}\zeta)^{\top} + (\tilde{\nabla}_X \zeta)^{\perp}$. Тангентни део у овој декомпозицији је $(\tilde{\nabla}_X \zeta)^{\top} = -A_{\zeta}(X)$, при чему је $A_{\zeta} : TM \to TM$ ендоморфизам од TM за који важи $g(A_{\zeta}(X), Y) = \tilde{g}(h(X,Y), \zeta)$ и који се назива *оператор облика* од M у смеру ζ. За одређивање нормалног дела декомпозиције дефинише се пресликавање $\nabla^{\perp} : TM \times T^{\perp}M \to T^{\perp}M$, са:

$$\nabla^{\perp}_X \zeta = (\tilde{\nabla}_X \zeta)^{\perp}.$$

Пресликавање $\nabla^{\perp}$ је мултилинеарно и задовољава Лајбницово својство производа, и у складу је са геометријском структуром на N, тј.

$$X(\tilde{g}(\zeta,\eta)) = \tilde{g}(\nabla^{\perp}_X \zeta, \eta) + \tilde{g}(\zeta, \nabla^{\perp}_X \eta).$$

Ово пресликавање се назива *нормалном конексијом* од M у N.

Тада важи и *Вајнгартенова формула*:

$$\tilde{\nabla}_X \zeta = -A_{\zeta}(X) + \nabla^{\perp}_X \zeta. \tag{1.6}$$

За нормално векторско поље ζ кажемо да је паралелно у нормалној конексији када је $\nabla^{\perp}_X \zeta = 0$, за свако $X \in TM$.

У било којој тачки $p \in M$ и за било који нормалан вектор $\zeta_p \in T_p^{\perp}M$, A_{ζ_p} се може дијагонализовати, тј. постоји ортонормирана база $\{e_1, \ldots, e_n\} \in T_pM$ таква да је:

$$A_{\zeta_p}(e_i) = \lambda_i(\zeta_p) e_i.$$

У том случају $\lambda_i(\zeta_p)$ су *главне кривине*, а e_i *главни правци* у односу на ζ_p. За нормалну секцију ζ на M, ако је A_ζ свуда пропорционално идентичкој трансформацији I, тј. $A = \rho I$, за неку функцију ρ, кажемо да је ζ *амбиличка секција* на M, тј. да је M *амбиличко у односу на* ζ. Ако је подмногострукост амбиличка у односу на сваку локално нормалну секцију на M, тада је M *тотално амбиличко*.

За ортонормирани репер $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset TM$ важи

$$\mathrm{tr} h = \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i),$$

и тако дефинишемо вектор средње кривине са:

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \mathrm{tr}\ h \in T^{\perp}M. \tag{1.7}$$

Подмногострукост је *минимална* ако је вектор средње кривине $\vec{H} = 0$. Ако постоји функција λ на подмногострукости M таква да је $\tilde{g}(h(X,Y), \vec{H}) = \lambda g(X,Y)$, за било која векторска поља X, Y на M, тада се она назива *псеудо-амбиличка подмногострукост*.

1.10 Једначине Ричија, Гауса и Кодација

Тензор кривине многострукости N је дат са

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Z} \tag{1.8}$$

за векторска поља $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in TN$. Ако су $X, Y, Z \in TM$, где је M подмногострукост од N, тада је:

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z. \tag{1.9}$$

Нека су $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-n}$ ортонормирана векторска поља на M која чине базу простора $T^{\perp}M$ и нека је h^X одговарајућа друга фундаментална форма, тј.

$$h(X,Y) = h^X(X,Y)\zeta_X,$$

при чему је h друга фундаментална форма подмногострукости M. Применом Гаусове једначине на релацију (1.9) добија се:

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \big\{(\nabla_Y h^X)(X,Z) - (\nabla_X h^X)(Y,Z)\big\}\zeta_X -\\ - h^X(Y,Z)A_X(X) + h^X(X,Z)A_X(Y) +\\ + h^X(Y,Z)\nabla^\perp_X\zeta_X - h^X(X,Z)\nabla^\perp_Y\zeta_X,\end{aligned} \tag{1.10}$$

тј. за било које векторско поље $W \in TM$ важи:

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + \tilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)) - \tilde{g}(h(X,W),h(Y,Z)). \tag{1.11}$$

Једнакост (1.11) се назива *Гаусовом једначином.*

Из релације (1.10) је очигледно да важи:

$$\begin{aligned}(\tilde{R}(X,Y)Z)^\perp = \big\{(\nabla_X h^X)(Y,Z) - (\nabla_Y h^X)(X,Z)\big\}\zeta_X +\\ + h^X(Y,Z)\nabla^\perp_X\zeta_X - h^X(X,Z)\nabla^\perp_Y\zeta_X,\end{aligned} \tag{1.12}$$

а ово представља *Кодацијеву једначину* на подмногострукости M.

Коваријантни извод за другу фундаменталну форму h, који означавамо са $\bar{\nabla}_X h$, је дат са:

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) &= \nabla^\perp_X(h^X(Y,Z)\zeta_X - [h^X(\nabla_X Y,Z) + h^X(Y,\nabla_X Z)]\zeta_X\\ &= (\nabla h^X)(Y,Z)\zeta_X + h^X(Y,Z)\nabla^\perp_X\zeta_X,\end{aligned} \tag{1.13}$$

Сада се Кодацијева једначина (1.12) може представити као

$$\tilde{R}^\perp(X,Y)Z = (\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z). \tag{1.14}$$

Нормалној конексији $\nabla^\perp$ на нормалном раслојењу $T^\perp M$ подмногострукости M можемо придружити нормални тензор кривине $R^\perp : TM \times TM \times T^\perp M \to T^\perp M$, на следећи начин:

$$R^\perp(X,Y)\zeta = [\nabla^\perp_X, \nabla^\perp_Y]\zeta - \nabla^\perp_{[X,Y]}\zeta,$$

где су $X, Y \in TM$, а $\zeta \in T^\perp M$.

Тада је:

$$\tilde{R}^{\perp}(X,Y;\zeta,\eta) = R^{\perp}(X,Y;\zeta\eta) + g([A_{\eta},A_{\zeta}]X,Y), \tag{1.15}$$

при чему је $R^{\perp}(X,Y;\zeta,\eta) = g(R^{\perp}(X,Y)\zeta,\eta)$.

Релација (1.15) се назива *једначином Ричија*.

Ако је амбијентни простор N простор константе секционе кривине, тада је

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} = c(\tilde{g}(\tilde{Z},\tilde{Y})\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{Z},\tilde{X})\tilde{Y}),$$

за векторска поља $\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}$ са N.

За векторска поља X,Y,Z са M, $\tilde{R}(X,Y)Z$ је тангентно на M, па једначине Гауса, Ричија и Кодација редом постају:

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) = c(g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)) + \\ + \tilde{g}(h(X,W),h(Y,Z)) - \tilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)), \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$R^{\perp}(X,Y,\zeta,\eta) = g([A_{\zeta},A_{\eta}]X,Y), \tag{1.17}$$

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y h)(X,Z). \tag{1.18}$$

Сада наводимо фундаменталну теорему за подмногострукости.

Теорема 1.7 ([1]). *Нека је M просто повезана n-димензиона Риманова многострукост, са Римановим q-равним раслојењем E над M снадбевена са другом фундаменталном формом h и одговарајућим другим фундаменталним тензором A. Ако M задовољава једначине Ричија, Гауса и Кодација, тада M може бити изометријски утопљена у $(n+q)$-димензиону просторну форму $M^{n+q}(k)$ кривине k са нормалним раслојењем E.* □

Локални изрази за једначине (1.16), (1.17) и (1.18) су дати респективно следећим једначинама:

$$R_{kjih} = c(g_{kh}g_{ij} - g_{jh}g_{ik}) + (h^x_{kh}h_{ijx} - h^x_{jh}h_{ikx}), \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} &\nabla_k l^x_{jy} - \nabla_j l^x_{ky} - h^x_{kt}h^t_{jy} + h^x_{jt}h^t_{ky} + l^x_{kz}l^z_{jy} - l^x_{jz}l^z_{ky} = 0 \\ &\bar{\nabla}_k h^x_{ji} = \bar{\nabla}_j h^x_{ki}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

где је $\nabla^{\perp}_j \zeta_y = l^x_{jy}\zeta_x$, $l^x_{jy} = -l^y_{jx}$.

За подмногострукост M^n утопљену у Риманову многострукост N^m константне кривине c, нека су x_i локалне координате око тачке $p \in M$, такве да $X_i = \partial_i$ чине ортонормирану базу од T_pM у тачки p. Ако су ζ_X ортонормирана векторска поља од M, тада је $h(X_i, X_j) = h^X_{ij}\zeta_X$, и важи $h^X_{ij} = h^X_{ji}$, па је дужина друге фундаменталне форме дата са $\|h\|^2 = h^X_{ji}h^{ji}_X$, где је $h^{ji}_X = g^{jt}g^{is}X^X_{ts}$. Тада на основу Гаусове једначине имамо да важи:

$$\tau = n^2\|\vec{H}\|^2 - \|h\|^2 + n(n-1)c,$$

где је τ скаларна кривина, а $\vec{H}$ вектор средње кривине.

Теорема 1.8 ([6]). *Нека је M^n подмногострукост простора константне кривине $N^m(c)$, $(m > n)$. Ако скаларна кривина τ задовољава неједнакост*

$$\tau \geq (n-2)\|h\|^2 + (n-2)(n-1)c,$$

у тачки $p \in M^n$, тада је секциона кривина од M^n ненегативна у тачки p. □

Глава 2

Винтгенове идеалне подмногострукости

2.1 Неједнакости између унутрашњих и спољашњих кривина

Гаусова „Theorema egregium“ направила је разлику између унутрашњих и спољашњих величина површи у тродимензионом еуклидском простору. Унутрашња геометријска природа ових површи садржана је у једној скаларној инваријанти - Гаусовој кривини површи. Риман је показао да је за општу m-димензиону многострукост неопходан Риман-Кристофелов тензор кривине у одређивању унутрашње природе многострукости. 1873. године, неколико година након публиковања Риманове тезе, Шалафи је поставио хипотезу да свака n-димензиона Риманова многострукост може бити локално и изометрично утопљена у m-димензиони еуклидски простор димензије $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. Ову хипотезу су доказали М. Жанет (1926.) и Е. Картан (1927.). Димензија у Картан-Жанетовој теореми је најбоље могуће одабрана. Наиме, не може свака n-димензиона Риманова многострукост M бити изометрично утопљена у $\mathbb{E}^m$, где је $m < \frac{1}{2}n(n+1)$, а такође, постоје и Риманове многострукости које се не могу локално и изометрично утопити у неки еуклидски простор димензије $m \leq \frac{1}{2}n(n+1)$. Неш (1956.) је показао да се свака Риманова многострукост глобално и изометрично може утопити у еуклидски простор довољно велике кодимензије. Сврха ових резултата је била да се проблеми који се односе на Риманове многострукости пренесу на проблеме подмногострукости у еуклидским просторима. То је створило потребу за релацијама између унутрашњих и спољашњих инваријанти.

Једну од првих таквих неједнакости дао је Ојлер. За површи M^2 у еуклидском тродимензионом простору $\mathbb{E}^3$ важи чувена *Ојлерова неједнакост* $K \leq H^2$, где је K Гаусова кривина (унутрашња инварјанта) од M^2, а H^2 је квадрат средње кривине (спољашња инваријанта) од M^2 у $\mathbb{E}^3$. Ова неједнакост је очигледна из чињенице да је $K = k_1k_2$, а $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, где су k_1 и k_2 главне кривине од M^2 у $\mathbb{E}^3$. Такође, једнакост у Ојлеровој неједнакости ће важити ако и само ако је површ M^2 тотално амбиличка у $\mathbb{E}^3$, тј. ако је $k_1 = k_2$ у свим тачкама од M^2. То по Мејснијевој теореми значи да ће једнакост у датој неједнакости важити само ако је M^2 део равни $\mathbb{E}^2$ или сфере S^2 у $\mathbb{E}^3$.

Разматрајући сличне неједнакости које укључују додатно и спољашње елементе скаларне нормалне кривине, посебно се истиче резултат Винтгена [56] из 1979. године, у коме је доказао да за површи M^2 у 4-димензионом еуклидском простору $\mathbb{E}^4$ важи тзв. *Винтгенова неједнакост*

$$K \leq H^2 - K^{\perp},$$

где је K (унутрашња) Гаусова кривина површи M^2, H^2 (спољашњи) квадрат средње кривине и $K^{\perp}$ (спољашња) нормална кривина. Такође је показао да једнакост у датој неједнакости важи ако и само ако је кривинска елипса E_p круг. Ако је M^2 оријентисана површ утопљена у $\mathbb{E}^4$ и ако је $\{e_1, e_2\}$ ортонормирана база од T_pM, тада је за сваку тачку

$p \in M$ *кривинска елипса* дефинисана са

$$E_p = \Big\{ h(X,X) \in T_p^{\perp}M \mid X \in T_pM \text{ и } \|X\| = 1 \Big\},$$

где је h друга фундаментална форма површи M.

Ову фундаменталну неједнакост између најважније унутрашње и спољашњих кривина површи M^2 у $\mathbb{E}^4$ касније су уопштили Б. Руксел [51] (1981.) и Гвадалупе-Родригез [33] (1983.) за површи у реалним просторним формама опште кодимензије.

Након ове екстензије *Винтгенове неједнакости* за подмногострукости димензије 2 и кодимензије 2, у подмногострукости димензије 2 и произвољне кодимензије $m \geq 2$, 1999. године су Де Смет, Дилен, Вранкен и Верштрален [17] дошли до још једног уопштења Винтгенове неједнакости.

Нека је M^n n-димензиона Риманова многострукост у $\mathbb{E}^m$ и нека је $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ортонормирана база од T_pM^n. Тада је *нормализована скаларна кривина* од M^n дата са:

$$\rho = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} R(e_i, e_j, e_j, e_i), \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Као што смо већ видели, помоћу Ричијеве једначине нормални тензор кривине је дефинисан са (1.17), где је A_ζ оператор облика Вајнгартеновог пресликавања од M у односу на нормално векторско поље ζ. Тада је *нормализована нормална скаларна кривина* $\rho^{\perp}$ од M^n у тачки p дефинисана са:

$$\rho^{\perp}(p) = \frac{2}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{i<j=1}^{n} \sum_{r<s=1}^{m-n} \Big(R^{\perp}(e_i, e_j, \zeta_r, \zeta_s) \Big)^2},$$

где је $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{m-n}\}$ ортонормирана база нормалног простора у тачки p. Такође је познато да је $\rho^{\perp} = 0$ ако и само ако је нормална секција равна, што је еквивалентно са истовременом дијагонализабилношћу свих оператора облика (Е. Картан).

Теорема 2.1 ([17]). *Нека је M^n n-димензиона подмногострукост у реалној просторној форми $R^{n+2}(c)$ константне секционе кривине c. Тада у свакој тачки p важи:*

$$\|H\|^2 \geq \rho + \rho^{\perp} - c. \tag{2.1}$$

Штавише, једнакост у датој неједнакости важи у некој тачки $p \in M$ ако и само ако постоји ортонормирана база $\{e_1, \ldots, e_n\}$ тангентног простора и ортонормирана база $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ нормалног простора тако да важи:

$$A_{\zeta_1} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}, \qquad A_{\zeta_2} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

За $n = 2$ неједнакост (2.1) постаје оригинална Винтгенова неједнакост и у том случају дефиниција нормалне скаларне кривине сагласна је са дефиницијом нормалне кривине површи коју је дао Винтген (за $m = 4$). У датом раду су аутори поставили хипотезу да дата неједнакост (2.1) важи за све подмногострукости M^n у просторним формама $\tilde{M}^{n+m}(c)$ контантне секционе кривине c. Ова хипотеза је позната као ДДВВ хипотеза, или *хипотеза о Винтгеновој неједнакости*. Ову хипотезу су доказали Чои и Лу [12], као и Ге и Танг [31]. Они су такође окарактерисали и случај једнакости у датој Винтгеновој неједнакости помоћу друге фундаменталне форме.

Теорема 2.2 ([12, 31]). *Нека је M^n подмногострукост од реалне просторне форме $\tilde{M}^{n+m}(c)$. Тада важи неједнакост*

$$\|H\|^2 \geq \rho + \rho^{\perp} - c. \tag{2.2}$$

Једнакост у неједнакости (2.2) *важи ако и само ако, у односу на погодно одабрану ортонормирану базу $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ на M^n у*

$\tilde{M}^{n+m}(c)$, *оператори облика ове подмногострукости имају облик:*

$$A_{\zeta_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad A_{\zeta_2} = \begin{bmatrix} \lambda_2 + \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{\zeta_3} = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = A_5 = \cdots = A_m = 0. \quad \square \tag{$*$}$$

Подмногострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$, за које важи $\rho = H^2 - \rho^{\perp} + c$, у Винтгеновој неједнакости (2.2), називају се *Винтгеновим идеалним подмногострукостима.* У случају подмногострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$ *са равном нормалном конексијом* и, према томе, специјално, за *хиперповрши* ($m = 1$) *Винтгенова неједнакост* $\rho \leq H^2 - \rho^{\perp} + c$ своди се на *Ченову неједнакост* $\rho \leq H^2 + c$, дату у раду [8], при чему су одговорајуће идеалне подмногострукости, тзв. *Ченове идеалне подмногострукости* M, у ствари тотално амбиличке у $\tilde{M}$ и, према томе, простори константне кривине. Скорије објављена књига Б. Ј. Чена [10] даје приказ оптималних неједнакости између различитих спољашњих и унутрашњих карактеристика подмногострукости.

Мотивација за ову терминологију је у следећем: за било које изометријско утапање Риманове многострукости M^n у реалну просторну форму $\tilde{M}^{n+m}(c)$, помоћу неједнакости (2.2), вредност унутрашње нормализоване скаларне кривине ρ од M^n поставља „доњу границу“ за могућу вредност спољашње „тензије“ $H^2 - \rho^{\perp} + c$ коју M^n у било којем случају не може превазићи као подмногострукост у амбијентном простору

$\tilde{M}^{n+m}(c)$. Са те тачке гледишта, свака Винтгенова идеална подмногострукост M^n реализује такав облик у $\tilde{M}^{n+m}(c)$ тако да је овај спољашњи утицај (тензија) свуда теоретски најмањи могућ, што је одређено вредношћу ρ. База $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$, са одговарајућим операторима облика датим у претходној теореми, назива се *Чои-Лу репер од* M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$, а тангентна раван $e_1 \wedge e_2$ се назива *Чои-Луова раван* Винтгенове идеалне подмногострукости.

2.2 Дешчове симетрије Винтгенових идеалних подмногострукости

Дешчовим симетријама у Винтгеновим идеалним подмногострукостима, између осталих, бавили су се и Л. Верштрален, М. Петровић-Торгашев, З. Шентурк, Р. Дешч. У радовима [49, 23] издвајају се следећи резултати.

Теорема А ([49])**.** *Винтгенова идеална подмногострукост M^3 у реалној просторној форми $\tilde{M}^{3+m}(c)$ је Дешч симетрична ако и само ако:*

- (I) *M^3 је тотално амбиличка подмногострукост са Дешчовом секционом кривином $L = 0$ (M^3 је тада простор константне секционе кривине K), или*
- (II) *M^3 је минимална подмногострукост или псеудо-амбиличка продмногострукост са Дешчовом секционом кривином $L = \sup K = c + H^2$, или*
- (III) *M^3 је окарактерисано са $\inf \mathrm{Ric} = 2K_{\check{C}oi\text{-}Lu} = 2 \inf K$ и Дешчова секциона кривина је $L = \inf K$.* $\square$

Теорема Б ([49])**.** *Винтгенова идеална подмногострукост M^n димензије $n > 3$ и кодимензије $m = 2$ у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+2}(c)$ је Дешч симетрична ако и само ако:*

(I) *M^n је тотално амбиличка подмногострукост са Дешчовом секционом кривном $L = 0$ (M^n постаје простор константне секционе кривине K), или*

(II) *M^n је минимална подмногострукост, при чему је Дешчова секциона кривина $L = c$.* □

Теорема В ([23])**.** *Винтгенова идеална подмногострукост M^n димензије $n > 3$ и кодимензије 2 у реалној просторној форми M^{n+2} је Дешч симетрична ако и само ако је Ричи-Дешч симетрична.* □

Теорема Г ([23])**.** *Свака Винтгенова идеална подмногострукост M^n димензије $n > 3$ и кодимензије 2 у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+2}(c)$ има псеудо-симетричан конформни Вејлов тензор кривине C. Винтгенова идеална подмногострукост M^n ($n > 3$), у $\tilde{M}^{n+2}(c)$ је минимална ако и само ако је $L_C = \frac{n-3}{(n-1)(n-2)}(c - \inf K)$.* □

Посматрајмо сада Винтгенове идеалне подмногострукости M^n ($n \geq 4$) у амбијентном простору $\tilde{M}^{n+m}(c)$ произвољне кодимензије $m \geq 3$. Нека је $\{e_1, \ldots, e_n\}$ локално ортонормирана база од TM и $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ локално ортонормирана база $T^{\perp}M$. Тада су матрице друге фундаменталне форме, које одговарају пољима ζ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), дате у Теореми 2.2. Знајући Гаусову једначину (1.16), или у локалним компонентама

$$R_{ijkl} = c(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) + \sum_{t=1}^{m}(h^t_{il}h^t_{jk} - h^t_{ik}h^t_{jl}),$$

а на основу датих матрица у Теореми 2.2, добијамо да су једине не-нула компоненте Риман-Кристофеловог тензора кривине R од M^n облика:

$$\begin{aligned} R_{1221} &= c(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}) + \sum_{t=1}^{m}(h^t_{11}h^t_{22} - h^t_{12}h^t_{21}) = \\ &= c + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\mu^2 = \\ &= c_1 - 2\mu^2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где је $c_1 = c + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$,

$$\begin{aligned} R_{1kk1} &= c(\delta_{11}\delta_{kk} - \delta_{1k}\delta_{k1}) + \sum_{t=1}^{m}(h_{11}^t h_{kk}^t - h_{1k}^t h_{k1}^t) = \\ &= c + \lambda_1^2 + \lambda_2(\lambda_2 + \mu) + \lambda_3^2 = \\ &= c_1 + \lambda_2\mu, \qquad (k \geq 3), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} R_{1kk2} &= c(\delta_{12}\delta_{kk} - \delta_{1k}\delta_{k2}) + \sum_{t=1}^{m}(h_{12}^t h_{kk}^t - h_{1k}^t h_{k2}^t) = \\ &= \lambda_1\mu, \qquad (k \geq 3), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} R_{2kk2} &= c(\delta_{22}\delta_{kk} - \delta_{2k}\delta_{k2}) + \sum_{t=1}^{m}(h_{22}^t h_{kk}^t - h_{2k}^t h_{k2}^t) = \\ &= c + \lambda_1^2 + \lambda_2(\lambda_2 - \mu) + \lambda_3^2 = \\ &= c_1 - \lambda_2\mu, \qquad (k \geq 3), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} R_{kllk} &= c(\delta_{kk}\delta_{ll} - \delta_{kl}\delta_{lk}) + \sum_{t=1}^{m}(h_{kk}^t h_{ll}^t - h_{kl}^t h_{lk}^t) = \\ &= c + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \\ &= c_1, \qquad (k \neq l,\ k, l \geq 3). \end{aligned} \tag{2.7}$$

У односу на дату тангентну базу $\{e_1, \ldots, e_n\}$ израчунавају се компоненте (0,6) тензора $R \cdot R$ и $Q(g, R)$. Користећи горе добијене компоненте Риман-Кристофеловог тензора кривине R, добија се да су једине не-нула компоненте оба тензора следеће:

1) $(R \cdot R)(e_1, e_3, e_3, e_1; e_1, e_2) = -R(R_{121}, e_3, e_3, e_1) - R(e_1, R_{123}, e_3, e_1) -$
$-R(e_1, e_3, R_{123}, e_1) - R(e_1, e_3, e_3, R_{121}) = 2\lambda_1\mu(c_1 - 2\mu^2)$,

$Q(g, R)(e_1, e_3, e_3, e_1; e_1, e_2) = -R((e_1 \wedge e_2)e_1, e_3, e_3, e_1) -$
$-R(e_1, (e_1 \wedge e_2)e_3, e_3, e_1) - R(e_1, e_3, (e_1 \wedge e_2)e_3, e_1) -$
$-R(e_1, e_3, e_3, (e_1 \wedge e_2)e_1) = 2\lambda_1\mu$,

где смо искористили чињеницу да је $R_{123} = 0$, $R_{121} = R_{1212}e_2 = -R_{1221}e_2$, $(e_1 \wedge e_2)e_1 = -e_2$, $(e_1 \wedge e_2)e_3 = 0$.

2) $(R \cdot R)(e_1, e_3, e_3, e_2; e_1, e_2) = -R(R_{121}, e_3, e_3, e_2) - R(e_1, R_{123}, e_3, e_2) - R(e_1, e_3, R_{123}, e_2) - R(e_1, e_3, e_3, R_{121}) = 2\lambda_2\mu(c_1 - 2\mu^2)$,

$Q(g, R)(e_1, e_3, e_3, e_2; e_1, e_2) = -R((e_1 \wedge e_2)e_1, e_3, e_3, e_2) - R(e_1, (e_1 \wedge e_2)e_3, e_3, e_2) - R(e_1, e_3, (e_1 \wedge e_2)e_3, e_2) - R(e_1, e_3, e_3, (e_1 \wedge e_2)e_2) = -2\lambda_2\mu$,

где смо искористили $R_{122} = R_{122}e_1$, $(e_1 \wedge e_2)e_2 = e_1$.

3) $(R \cdot R)(e_1, e_2, e_1, e_3; e_2, e_3) = -R(R_{231}, e_2, e_1, e_3) - R(e_1, R_{232}, e_1, e_3) - R(e_1, e_2, R_{231}, e_3) - R(e_1, e_2, e_1, R_{233}) = \lambda_1^2\mu^2 - \mu(c_1 - \lambda_2\mu)(\lambda_2 + 2\mu)$,

$Q(g, R)(e_1, e_2, e_1, e_3; e_2, e_3) = -R((e_2 \wedge e_3)e_1, e_2, e_1, e_3) - R(e_1, (e_2 \wedge e_3)e_2, e_1, e_3) - R(e_1, e_2, (e_2 \wedge e_3)e_1, e_3) - R(e_1, e_2, e_1, (e_2 \wedge e_3)e_3) = -\mu(\lambda_2 + 2\mu)$,

јер је $R_{231} = R_{2313}e_3 = R_{1332}e_3$, $R_{232} = R_{2323}e_3 = -R_{2332}e_3$, $R_{233} = R_{2331}e_1 + R_{2332}e_2 = -R_{1332}e_1 + R_{2332}e_2$, $(e_2 \wedge e_3)e_1 = 0$, $(e_2 \wedge e_3)e_2 = -e_3$, $(e_2 \wedge e_3)e_3 = e_2$.

4) $(R \cdot R)(e_1, e_4, e_3, e_4; e_1, e_3) = -R(R_{131}, e_4, e_3, e_4) - R(e_1, R_{134}, e_3, e_4) - R(e_1, e_4, R_{133}, e_4) - R(e_1, e_4, e_3, R_{134}) = \lambda_1^2\mu^2 + \lambda_2\mu(c_1 + \lambda_2\mu)$,

$Q(g, R)(e_1, e_4, e_3, e_4; e_1, e_3) = -R((e_1 \wedge e_3)e_1, e_4, e_3, e_4) - R(e_1, (e_1 \wedge e_3)e_4, e_3, e_4) - R(e_1, e_4, (e_1 \wedge e_3)e_3, e_4) - R(e_1, e_4, e_3, (e_1 \wedge e_3)e_4) = \lambda_2\mu$,

јер је $R_{133} = R_{1331}e_1 + R_{1332}e_2$, $(e_1 \wedge e_3)e_1 = -e_3$, $(e_1 \wedge e_3)e_4 = 0$, $(e_1 \wedge e_3)e_3 = e_1$.

5) $(R \cdot R)(e_1, e_4, e_3, e_4; e_2, e_3) = -R(R_{231}, e_4, e_3, e_4) - R(e_1, R_{234}, e_3, e_4) -$
$-R(e_1, e_4, R_{233}, e_4) - R(e_1, e_4, e_3, R_{234}) = c_1\lambda_1\mu,$

   $Q(g, R)(e_1, e_4, e_3, e_4; e_2, e_3) = -R((e_2 \wedge e_3)e_1, e_4, e_3, e_4) -$
   $-R(e_1, (e_2 \wedge e_3)e_4, e_3, e_4) - R(e_1, e_4, (e_2 \wedge e_3)e_3, e_4) -$
   $-R(e_1, e_4, e_3, (e_2 \wedge e_3)e_4) = \lambda_1\mu,$

   јер је $R_{234} = 0$.

6) $(R \cdot R)(e_2, e_4, e_3, e_4; e_2, e_3) = -R(R_{232}, e_4, e_3, e_4) - R(e_2, R_{234}, e_3, e_4) -$
$-R(e_2, e_4, R_{233}, e_4) - R(e_2, e_4, e_3, R_{234}) = \lambda_1^2\mu^2 - \lambda_2\mu(c_1 - \lambda_2\mu),$

   $Q(g, R)(e_2, e_4, e_3, e_4; e_2, e_3) = -R((e_2 \wedge e_3)e_2, e_4, e_3, e_4) -$
   $-R(e_2, (e_2 \wedge e_3)e_4, e_3, e_4) - R(e_2, e_4, (e_2 \wedge e_3)e_3, e_4) -$
   $-R(e_2, e_4, e_3, (e_2 \wedge e_3)e_4) = -\lambda_2\mu,$

   при чему је $R_{232} = R_{2323}e_2 = -R_{2332}e_3$.

Теорема 2.3 ([14]). *Винтгенова идеална подмногострукост M^n димензије $n \geq 4$ и кодимензије $m \geq 2$ у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+m}(c)$ је Дешч симетрична Риманова многострукост ако и само ако је:*

- (*i*) *тотално амбиличка (са $L = 0$), или*
- (*ii*) *минимална, или*
- (*iii*) *псеудо-амбиличка подмногострукост (са $L = c + H^2$) ове просторне форме $\tilde{M}^{n+m}(c)$.*

Доказ: Дешчов услов псеудо-симетричности, $R \cdot R = LQ(g, R)$, на Винтгеновој идеалној подмногострукости у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+m}(c)$ ће важити ако и само ако је задовољен систем једначина:

$$
\begin{cases}
\lambda_1\mu(c_1 - 2\mu^2) = L\lambda_1\mu \\
\lambda_2\mu(c_1 - 2\mu^2) = L\lambda_2\mu \\
\lambda_1^2\mu^2 - \mu(c_1 - \lambda_2\mu)(\lambda_2 + 2\mu) = -L\mu(\lambda_2 + 2\mu) \\
\lambda_1^2\mu^2 + \lambda_2\mu(c_1 + \lambda_2\mu) = L\lambda_2\mu \\
c_1\lambda_1\mu = L\lambda_1\mu \\
\lambda_1^2\mu^2 - \lambda_2\mu(c_1 - \lambda_2\mu) = -L\lambda_2\mu
\end{cases}
$$

Сређивањем дати систем једначина постаје:

$$
\begin{cases}
\lambda_1\mu(2\mu^2 + L - c_1) = 0 \\
\lambda_2\mu(2\mu^2 + L - c_1) = 0 \\
\lambda_1^2\mu^2 + \mu(\lambda_2 + 2\mu)(\lambda_2\mu + L - c_1) = 0 \\
\lambda_1^2\mu^2 + \lambda_2\mu(\lambda_2\mu - L + c_1) = 0 \\
\lambda_1\mu(L - c_1) = 0 \\
\lambda_1^2\mu^2 + \lambda_2\mu(\lambda_2\mu + L - c_1) = 0
\end{cases}
$$

Последњи систем једначина је задовољен само у следећа два случаја, тј. ако је

(*i*) $\mu = 0$, што значи да је $L = 0$ (подмногострукост је тотално амбилична), или

(*ii*) $\mu \neq 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, при чему је $L = c + \lambda_3^2$. □

Знајући да је Ричијев (0,2) тензор S дат са (1.3), или у локалним компонентама

$$
S_{jk} = \sum_{i=1}^{n} R_{ijki} = \sum_{i=1}^{n}\Big\{c(\delta_{ii}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{ji}) + \sum_{t=1}^{m}(h_{ii}^t h_{jk}^t - h_{ik}^t h_{ji}^t)\Big\},
$$

где су $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ вектори ортонормиране базе од TM^n, то на основу релација (2.3)–(2.7) добијених за компоненте Риман-Кристофеловог тензора кривине Винтгенових идеалних подмногострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$, добијају се следеће нетривијалне компоненте Ричијевог тензора кривине:

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= \sum_{i=1}^{n} R_{i11i} = R_{2112} + (n-2)R_{k11k} = \\
&= R_{1221} + (n-2)R_{1kk1} = (n-1)c_1 + (n-2)\lambda_2\mu - 2\mu^2, \\
S_{22} &= \sum_{i=1}^{n} R_{i22i} = R_{1221} + (n-2)R_{2kk2} = \\
&= (n-1)c_1 - (n-2)\lambda_2\mu - 2\mu^2, \\
S_{12} &= \sum_{i=1}^{n} R_{i12i} = (n-2)R_{1kk2} = (n-2)\lambda_1\mu, \\
S_{kk} &= \sum_{i=1}^{n} R_{ikki} = R_{1kk1} + R_{2kk2} + (n-3)R_{kllk} = (n-1)c_1,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

где је $k, l \geq 3$, $k \neq l$.

На исти начин, користећи се горе добијеним компонентама, добијамо уопштење Теореме В.

Теорема 2.4 ([14]). *Било која Винтгенова идеална подмногострукост M^n у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+m}(c)$ димензије $n \geq 3$ и кодимензије $m \geq 2$ је Дешч симетрична ако и само ако је Ричи-Дешч симетрична.* □

Користећи нетривијалне компоненте Ричијевог (0,2)-тензора S, добијамо израз за скаларну кривину Винтгенове идеалне подмногострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$, у бази Чои-Луа, на следећи начин:

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S_{ii} = S_{11} + S_{22} + (n-2)S_{kk},$$

тј.

$$\tau = n(n-1)c_1 - 4\mu^2.$$

Користећи се не-нула компонентама Риман-Кристофеловог (0,4)-тензора R и Ричијевог (0,2)-тензора S, на Винтгеновој идеалној подмногострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$, добијамо да су не-нула компоненте (0,4) Вејловог конформног тензора кривине C дате са:

$$
\begin{aligned}
C_{1221} &= R_{1221} - \frac{1}{n-2}(S_{11}+S_{22}) + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} = \\
&= -\frac{2(n-3)}{n-1}\mu^2, \\
C_{1kk1} &= R_{1kk1} - \frac{1}{n-2}(S_{11}+S_{kk}) + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} = \\
&= \frac{2(n-3)}{(n-1)(n-2)}\mu^2, \qquad (k \geq 3) \\
C_{2kk2} &= C_{1kk1}, \qquad (k \geq 3), \\
C_{kllk} &= R_{kllk} - \frac{2}{n-2}S_{kk} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} = \\
&= -\frac{4}{(n-1)(n-2)}\mu^2, \qquad (k \neq l,\ k,l \geq 3).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Из матрица оператора облика $(*)$ из Теореме 2.2 очигледно је да је свака Винтгенова идеална подмногострукост M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$ $(n \geq 4$, $m \geq 3)$ конформно равна ако и само ако је $\mu = 0$.

Теорема 2.5 ([14])**.** *Нека је M^n Винтгенова идеална подмногострукост реалне просторне форме $\tilde{M}^{n+m}(c)$ $(n \geq 4)$.*

(*i*) *M^n је конформно равно ако и само ако је M^n тотално амбиличка подмногострукост у $\tilde{M}^{n+m}(c)$ и према томе је M^n само за себе реална просторна форма.*

(*ii*) *M^n увек поседује псеудо-симетричан Вејлов конформни тензор кривине C, тј. $C \cdot C = L_C Q(g, C)$, и одговарајућа функција псеудо-симетрије је дата са $L_C = \frac{2(n-3)}{(n-1)(n-2)}\mu^2$.*

Доказ: Компоненте (0,6)-тензора $C \cdot C$ и $Q(g, C)$ које нису тривијалне су:

1) $(C\cdot C)(e_2,e_3,e_1,e_2;e_1,e_3) = -C(C_{132},e_3,e_1,e_2) - C(e_3,C_{133},e_1,e_2) -$
$-C(e_2,e_3,C_{131},e_2) - C(e_2,e_3,e_1,C_{132}) = \frac{4(n-3)^2}{(n-1)(n-2)^2}\mu^4,$

$Q(g,C)(e_2,e_3,e_1,e_2;e_1,e_3) = -C((e_1\wedge e_3)e_2,e_3,e_1,e_2) -$
$-C(e_2,(e_1\wedge e_3)e_3,e_1,e_2) - C(e_2,e_3,(e_1\wedge e_3)e_1,e_2) -$
$-C(e_2,e_3,e_1,(e_1\wedge e_3)e_2) = \frac{2(n-3)}{n-2}\mu^2,$

где је $C_{132}=0$, $C_{133}=C_{1331}e_1$, $C_{131}=C_{1313}e_3=-C_{1331}e_3$.

2) $(C\cdot C)(e_1,e_4,e_3,e_4;e_1,e_3) = -C(C_{131},e_4,e_3,e_4) - C(e_1,C_{134},e_3,e_4) -$
$-C(e_1,e_4,C_{133},e_4) - C(e_1,e_4,e_3,C_{134}) = \frac{4(n-3)}{(n-1)(n-2)^2}\mu^4,$

$Q(g,C)(e_1,e_4,e_3,e_4;e_1,e_3) = -C((e_1\wedge e_3)e_1,e_4,e_3,e_4) -$
$-C(e_1,(e_1\wedge e_3)e_4,e_3,e_4) - C(e_1,e_4,(e_1\wedge e_3)e_3,e_4) -$
$-C(e_1,e_4,e_3,(e_1\wedge e_3)e_4) = \frac{2}{n-2}\mu^2.$

Услов псеудо-симетрије $C\cdot C = L_C Q(g,C)$ за Винтгенове идеалне подмногострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$ $(n\geq 4,\ m\geq 3)$ важи ако и само ако је испуњено:

$$\frac{4(n-3)^2}{(n-1)(n-2)^2}\mu^4 = L_C\frac{2(n-3)}{n-2}\mu^2,$$

тј.

$$\frac{2(n-3)}{n-2}\mu^2\left(\frac{2(n-3)}{(n-1)(n-2)}\mu^2 - L_C\right) = 0.$$

Последња једначина је задовољена ако је $\mu=0$ или $L_C=\frac{2(n-3)}{(n-1)(n-2)}\mu^2$.

□

Како за посматрану Винтгенову идеалну подмногострукост M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$ важи:

$$\inf K = K_{12} = c + \lambda_1^2 - \mu^2 + \lambda_2^2 - \mu^2 + \lambda_3^2 = c_1 - 2\mu^2$$

и како је $\tau = n(n-1)c_1 - 4\mu^2$, то се добија да је

$$\mu^2 = \frac{1}{2(n+1)(n-2)}[\tau - n(n-1)\inf K],$$

па се функција псеудо-симетрије из Теореме 2.5 може записати у облику

$$L_C = \frac{n-3}{(n-1)(n+1)(n-2)^2}\big[\tau - n(n-1)\inf K\big].$$

2.3 Винтгенове идеалне подмногострукости које су Ротерови простори

Са алгебарске тачке гледишта, Ротерови простори се могу посматрати као најједноставније Риманове многострукости после реалних просторних форми. Према ([19, 20]), Риманова многострукости M^n $(n \geq 3)$ се назива *Ротеровим простором*, ако се њен тензор кривине R може представити као линеарна комбинација:

$$R = \tilde{\lambda}(g \wedge g) + \tilde{\mu}(g \wedge S) + \tilde{\nu}(S \wedge S) \qquad (\triangle)$$

за неке функције $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} : M \to \mathbb{R}$.

Очигледно је да:

(*i*) су реалне просторне форме кривине c Ротерови простори при чему је $\tilde{\lambda} = \frac{c}{2}$ и $\tilde{\mu} = \tilde{\nu} = 0$;

(*ii*) Ајнштајнови Ротерови простори су реалне просторне форме;

(*iii*) Све тродимензионе Риманове многострукости и све конформно равне Риманове многострукости димензије $n \geq 4$ су Ротерови простори за које је $\tilde{\lambda} = \frac{\tau}{2(n-1)(n-2)}$, $\tilde{\mu} = \frac{1}{n-2}$, $\tilde{\nu} = 0$.

Ајнштајнови простори су не-равне Риманове многострукости (M^n, g), $(n > 2)$, које задовољавају услов $S = \lambda g$, где је S (0,2) Ричијев тензор кривине, а $\lambda : M^n \to \mathbb{R}$. Ако за многострукост (M^n, g), $(n > 2)$ важи да (0,2) Ричијев тензор није идентички нула и задовољава услов $S = \frac{\tau}{n}g$, тада је она *квази-амбиличка*.

Такође је познато и да су квази-Ајнштајнови Ротерови простори димензије $n \geq 4$ конформно равни [19]. У истом раду је представљен природнији појам Риманових многострукости M^n Ротеровог типа, тако да су за $n \geq 4$ дефинисане Риманове многострукости M^n за које важи релација ($\triangle$) на отвореном скупу $\mathscr{U}$ њених тачака, где је $C \neq 0$ и $S \neq \Phi g + \psi\omega \otimes \omega$, за неке функције Φ, ψ и 1-форму ω на M^n. На скупу $\mathscr{U}$ многострукости Ротеровог типа имају јединствену декомпозицију тензора R на $g \wedge g$, $g \wedge S$, $S \wedge S$, и Ричијев тензор S има тачно две сопствене вредности.

У складу са дефиницијом Ротерових простора, посматрамо само многострукости M^n $(n \geq 4)$, да би се избегле тривијалне ситуације.

Нека је M^n Винтгенова идеална подмногострукост реалне просторне форме $\tilde{M}^{n+m}(c)$, $n \geq 4$. Примећујемо да Винтгенове идеалне подмногострукости M^n, које су конформно равне ($C \equiv 0$) или квази-Ајншштајнове ($S = \Phi g + \psi\omega \otimes \omega$), су тотално-амбиличке у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+m}(c)$, и отуда су саме по себи реалне просторне форме, а самим тим су и псеудо-симетричне многострукости, при чему је $L = 0$. Дешч и Хотлош [22] су показали да су отворене подмногострукости $\mathscr{U}$ Риманових простора M^n Ротеровог типа увек псеудо-симетричне, што наводи на закључак да су све Винтгенове идеалне подмногострукости M^n у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+m}(c)$, које задовољавају услов да буду Ротеров простор, аутоматски и Дешч симетрични простори.

Показује се да важи и обрнуто тврђење. Наиме, у складу са Теоремом 2.1 и напред наведеним коментарима, произилази да за Дешч симетричне Винтгенове идеалне подмногострукости M^n и $\tilde{M}^{n+m}(c)$, оператори облика у бази Чои-Луа су дати релацијом $(*)$, па је тада или (1) $\mu = 0$ или (2) $\mu \neq 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. У случају (1), M^n је само по себи реална просторна форма и отуда и Ротеров простор на тривијалан начин. У случају (2), произилази да су једине не-нула компоненте (0,4)-Риман-Кристофеловог тензора R и (0,2)-Ричијевог тензора S облика:

$$\begin{cases} R_{1221} = c + \lambda_3^2 - 2\mu^2, \\ R_{1kk1} = R_{2kk2} = R_{kllk} = c + \lambda_3^2, \quad k \neq l,\ k, l \geq 3, \\ \quad S_{11} = S_{22} = (n-1)(c + \lambda_3^2) - 2\mu^2, \\ \quad S_{kk} = (n-1)(c + \lambda_3^2), \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Чланови једнакости ($\triangle$) која карактерише Ротерове просторе су:

$$\begin{aligned} (S \wedge S)(X, Y, Z, W) &= 2S(X, W)S(Y, Z) - 2S(X, Z)S(Y, W), \\ (g \wedge S)(X, Y, Z, W) &= g(X, W)S(Y, Z) + g(Y, Z)S(X, W) - \\ &\qquad - g(X, Z)S(Y, W) - g(Y, W)S(X, Z), \\ (g \wedge g)(X, Y, Z, W) &= g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)S(Y, W). \end{aligned}$$

Одавде је очигледно да једнакост ($\triangle$) у локалним компонентама има облик:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = {} & \lambda(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) + \tilde{\mu}(g_{il}S_{jk} + g_{jk}S_{il} - g_{ik}S_{jl} - g_{jl}S_{ik}) \\ & + \tilde{\nu}(S_{il}S_{jk} - S_{ik}S_{jl}). \end{aligned}$$

Из ове релације, а водећи рачуна о не-нула компонентама Риман-Кристофеловог и Ричијевог тензора, добијамо следеће нетривијалне једнакости:

$$\begin{aligned} R_{1221} = {} & \tilde{\lambda}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) + \tilde{\mu}(g_{11}S_{22} + g_{22}S_{11} - g_{12}S_{21} - g_{21}S_{12}) + \\ & + 2\tilde{\nu}(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}), \end{aligned}$$

тј.

$$R_{1221} = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}S_{11} + 2\tilde{\nu}S_{11}^2,$$

односно

$$\begin{aligned} c + \lambda_3^2 - 2\mu^2 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}((n-1)(c + \lambda_3^2) - 2\mu^2) + \\ + 2\tilde{\nu}((n-1)(c + \lambda_3^2) - 2\mu^2)^2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$R_{1kk1} = \tilde{\lambda}(g_{11}g_{kk} - g_{1k}g_{k1}) + \tilde{\mu}(g_{11}S_{kk} + g_{kk}S_{11} - g_{1k}S_{k1} - g_{k1}S_{1k}) + \\ + 2\tilde{\nu}(S_{11}S_{kk} - S_{1k}S_{k1}),$$

тј.

$$R_{1kk1} = \tilde{\lambda} + \tilde{\mu}(S_{11} + S_{kk}) + 2\tilde{\nu}S_{11}S_{kk},$$

односно

$$c + \lambda_3^2 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}((n-1)(c+\lambda_3^2) - 2\mu^2) + \\ + 2\tilde{\nu}(n-1)(c+\lambda_3^2)((n-1)(c+\lambda_3^2) - 2\mu^2), \tag{2.11}$$

$$R_{kllk} = \tilde{\lambda}(g_{kk}g_{ll} - g_{kl}g_{lk}) + \tilde{\mu}(g_{kk}S_{ll} + g_{ll}S_{kk} - g_{kl}S_{lk} - g_{lk}S_{kl}) + \\ + 2\tilde{\nu}(S_{kk}S_{ll} - S_{kl}S_{lk}),$$

тј.

$$R_{kllk} = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}S_{kk} + 2\tilde{\nu}S_{kk}^2,$$

односно

$$c + \lambda_3^2 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(n-1)(c+\lambda_3^2) + 2\tilde{\nu}((n-1)(c+\lambda_3^2))^2. \tag{2.12}$$

Једначине (2.10), (2.11) и (2.12) чине систем једначина из ког се добија јединствено решење:

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2\mu^2}(c+\lambda_3^2)(2\mu^2 - (n-1)^2(c+\lambda_3^2)),$$
$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2\mu^2}(n-1)(c+\lambda_3^2),$$
$$\tilde{\nu} = -\frac{1}{4\mu^2}.$$

Из претходно изложеног очигледно је да важи следеће тврђење.

Теорема 2.6 ([14]). *Нека је M^n Винтгенова идеална подмногострукост димензије $n \geq 4$ и произвољне кодимнезије у реалној просторној форми. Тада је M^n Дешч симетрична ако и само ако је M^n Ротеров простор.* □

2.4 Казоратијеви и Ричијеви главни правци

Допринос проучавању геометрије површи M^2 у $\mathbb{E}^3$ дао је и Казорати (око 1890. године). Појам Казоратијеве кривине површи M^2 у $\mathbb{E}^3$ је имао велики утицај на геометрију подмногострукости. За одређивање Казоратијеве кривине $C(p)$ површи M^2 у $\mathbb{E}^3$ у тачки p, уочимо прво мали геодезијски круг $\gamma_{\Delta\rho}$ на M^2 са центром p и полупречника $\Delta\rho$ (Слика 2.1). Нека је q било која тачка на $\gamma_{\Delta\rho}$ и посматрајмо геодезијску линију δ, параметризовану дужином лука, такву да је $p = \delta(0)$ и $q = \delta(\Delta\rho)$ и где је у тачки p тангентни вектор $u = \delta'(0)$ на M^2. Нека су $\eta(p)$ и $\eta(q)$ јединичне нормале на M^2 у $\mathbb{E}^3$ у тачкама p и q, респективно, које одговарају локално нормалном векторском пољу η на M^2 у $\mathbb{E}^3$ у околини тачке p. Угао $\Delta\psi_u$ између $\eta(p)$ и $\eta(q)$ мери како се површ M^2 у p закривљује у смеру u. Нека је r тачка на геодезијској линији δ на растојању $\Delta\psi_u$ од p у смеру u, тј. $r = \delta(\Delta\psi_u)$. Ако за сваку тачку q на $\gamma_{\Delta\rho}$ уочимо одговарајућу тачку r, добијамо криву $\Gamma_{\Delta\rho}$.

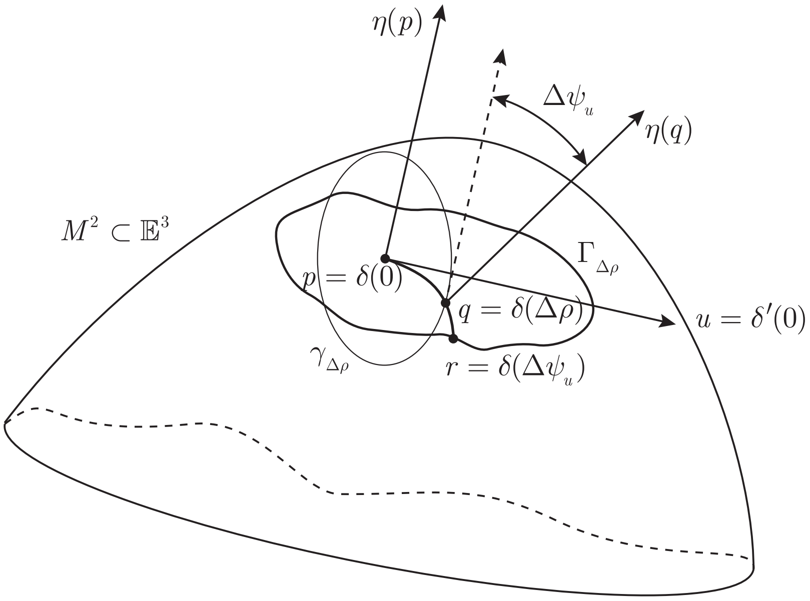
Јасно је, да што је већа површина коју ова крива захвата, то је површ M^2 закривљенија у $\mathbb{E}^3$ у околини тачке p. Следећи идеје Гауса и С. Жермен, Ф. Казорати [5] је дефинисао кривину са:

$$C(p) = \lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{A(\Gamma_{\Delta\rho})}{A(\gamma_{\Delta\rho})},$$

где су $A(\Gamma_{\Delta\rho})$ и $A(\gamma_{\Delta\rho})$ редом површине области на M^2 обухаћене кривама $\Gamma_{\Delta\rho}$ и $\gamma_{\Delta\rho}$. Он је такође доказао да је $C = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)$, где су k_1 и k_2 главне кривине на површи $M^2 \subset \mathbb{E}^3$.

Сада, посматрамо Риманову подмногострукост (M^n, g) одговарајуће многострукости $(\tilde{M}^{n+m}, g)$. Ако је $\{e_1, \ldots, e_n\}$ локално ортонормирана база од T_pM^n, видели смо да је векторско поље средње кривине од M^n дато са (1.7), па на основу Гаусове и Вајнгартенове формуле добијамо да је

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha} (\mathrm{tr} A_\alpha) \zeta_\alpha,$$



Слика 2.1: Казоратијева кривина – геометријска интерпретација.

где је $A_\alpha = A_{\zeta_\alpha}$, $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, и $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ чине произвољан локално ортонормиран нормалан репер на M^n у $\tilde{M}^{n+m}$.

За опште n-димензионе многострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ уочава се (1,1)-тензорско поље

$$A^C = \sum_\alpha A_\alpha^2,$$

које је независно од избора локално ортонормираног нормалног репера $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ многострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}$. Овај оператор се назива *Казоратијевим оператором.* Сада, *Казоратијеву кривину* $C : M^n \to \mathbb{R}$ подмногострукости M^n Риманове многострукости $\tilde{M}^{n+m}$ дефинишемо као скаларну унутрашњу инваријанту на следећи начин:

$$C = \frac{1}{n}\|h\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha = \frac{1}{n}\mathrm{tr}A^C,$$

при чему су h_{ij}^α компоненте друге фундаменталне форме у односу на репер $\{e_1, \ldots, e_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$, при чему је

$$h_{ij} = h(e_i, e_j) = \sum_{\alpha} h_{ij}^{\alpha} \zeta_{\alpha},$$
$$h_{ij}^{\alpha} = \tilde{g}(h(e_i, e_j), \zeta_{\alpha}) = g(A_{\alpha}(e_i), e_j).$$

Из дефиниције Казоратијеве кривине је очигледно да је подмногострукост M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ тотално геодезијска ($h = 0$) ако и само ако је њена функција Казоратијеве кривине једнака нули у свим тачкама $p \in M^n$.

Ако је пак $\tilde{M}^{n+m}(c)$ просторна форма, тада из *Гаусове једначине* контракцијом добијамо да је

$$S(Y, Z) = (n-1)cg(Y, Z) + g(A_{n\vec{H}}(Y), Z) - g(A^C(Y), Z),$$

израз за (0,2)-Ричијев тензор S.

Како је за свако нормално векторско поље ζ на M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ одговарајући оператор A_ζ једно симетрично (1,1) тензорско поље на M^n, тада на основу теореме о главним осама, у свакој тачки $p \in M^n$, све сопствене вредности $\lambda_1^\zeta \geq \cdots \geq \lambda_n^\zeta$ од $A_\zeta(p)$ су реалне и тада постоји n ортогоналних сопствених вектора $e_1, \ldots, e_n$ од $A_{\zeta(p)}$, тј. $A_{\zeta(p)}(e_i) = \lambda_i^\zeta e_i$. Тангентни правци на M^n одређени са e_i, ($i = 1, \ldots, n$), називају се главни правци од M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ у тачки p у односу на ζ, а бројеви λ_i^ζ су главне нормалне кривине од M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ у p у односу на ζ.

Слично је и Казоратијев оператор A^C од M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ је (1,1)-симетрично тензорско поље на M^n, па у свакој тачки $p \in M^n$ све сопствене вредности $c_1 \geq \cdots \geq c_n \geq 0$ су реалне и постоји n ортонормираних сопствених вектора $f_1, \ldots, f_n$ од A_p^C, тј. $A_p^C(f_j) = c_j f_j$. Тангентни правци на M^n одређени са f_j се називају *спољашњи главни правци* или *Казоратијеви правци* од M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ у тачки p, а бројеви c_j су *главне Казоратијеве кривине* од M^n у $\tilde{M}^{n+m}$. Очигледно је да тада важи:

$$C(p) = \frac{1}{n} \sum_j c_j,$$

тј. у свакој тачки p подмногострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ Казоратијева кривина од M^n је аритметичка средина од главних Казоратијевих кривина $c_1, \ldots, c_n$ од M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ у тачки p ([34]).

Из израза за Ричијев оператор, који је добијен контракцијом Гаусове једначине, запажа се да за минималне, псеудо-амбиличке и подмногострукости са равном нормалном конексијом у просторној форми, *унутрашњи главни правци Риманове многострукости* (M^n, g), тј. *сопствени правци симетричног Ричијевог* $(0, 2)$ *тензора* S (односно одговарајућег (1,1) оператора $\tilde{S}$, $S(X, Y) = g(\tilde{S}(X), Y) = g(X, \tilde{S}(Y)))$ и *спољашњи главни правци Казоратијевог* $(1, 1)$ *оператора* A^C *се поклапају* ([34]).

Специјално, за хиперповрш M^n у $\tilde{M}^{n+1}$, формуле Гауса и Вајнгартена постају редом $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$ и $\tilde{\nabla}_X \zeta = -A(X)$, где је h вредност друге фундаменталне форме која одговара јединичном нормалном векторском пољу ζ на M^n у $\tilde{M}^{n+1}$, а A је оператор облика у односу на ζ. Главне кривине у тачки $p \in M^n$ које одговарају $\zeta(p)$ се означавају са $k_1 \geq \cdots \geq k_n$, тј. $k_1, \ldots, k_n$ су сопствене вредности од A, које одговарају ортонормираним векторима $e_1, \ldots, e_n$ у тачки p, тј. $A(e_i) = k_i e_i$. Према томе, $k_1, \ldots, k_n$ су екстремне вредности функције нормалне кривине $k(u) = g(A(u), u)$, од M^n у M^{n+1} у тачки p, тј. $k : S_p^{n-1}(1) \subset T_p M^n \to \mathbb{R} : u \to k(u)$. Ако по угледу на Ојлера узмемо да је $u = \sum_i e_i \cos \alpha_i$, где је $\cos \alpha_i = g(u, e_i)$, тада је:

$$
\begin{aligned}
k(u) = g(A(u), u) = g\Big(A(\sum_i e_i \cos \alpha_i), \sum_i e_i \cos \alpha_i\Big) &= \\
= \sum_i g(\cos \alpha_i A(e_i), \cos \alpha_i e_i) &= \\
= \sum_i \cos^2 \alpha_i g(k_i e_i, e_i) = \sum_i k_i \cos^2 \alpha_i&.
\end{aligned}
$$

Како је за хиперповрш M^n у $\tilde{M}^{n+1}$, $A^C = A^2$, то је очигледно да су Ојлерови и Казоратијеви главни правци исти. Посматрајући одговарајуће кривине, следи да је $c_j = k_j^2$, па је за хиперповрш M^n у $\tilde{M}^{n+1}$: $C(p) = \frac{1}{n}\sum_j k_j^2$ ([34]).

Ако се опет вратимо на општи случај подмногострукости M^n у произвољној Римановој многострукости $\tilde{M}^{n+m}$, тада на основу чињенице да када Казоратијеву кривину $c(u)$ од M^n у $\tilde{M}^{n+m}$ дефинишемо у произвољном тангентном правцу u, у тачки p, са

$$c(u) = g(A_p^C(u), u), \qquad c : S_p^{n-1}(1) \subset T_pM^n \to \mathbb{R} : u \to c(u),$$

тада закључујемо да су главне Казоратијеве кривине $c_1, \ldots, c_n$ екстремне вредности ове функције C, и да се те екстремне вредности достижу у Казоратијевим главним правцима $f_1, \ldots, f_n$ од T_pM^n.

Комплетну аналогију са Ојлеровом формулом за нормалне кривине $k(u)$, у тангентним правцима u, из $A_p^C(f_j) = c_j f_j$ и $c(u) = g(A_p^C(u), u)$, узимајући да је

$$u = \sum_j f_j \cos\beta_j, \qquad \cos\beta_j = g(u, f_j),$$

добијамо сличну формулу за Казоратијеве кривине $c(u)$ у тангентним правцима u

$$c(u) = \sum_j c_j \cos^2\beta_j.$$

Теорема 2.7 ([34])**.** *За сваку подмногострукост M^n у Римановом простору $\tilde{M}^{n+m}$ $(n \geq 2, m \geq 1)$ њен Казоратијев оператор A^C је канонски одређен спољашњи (1,1) тензор на M^n чије сопствене вредности $c_1 \geq \cdots \geq c_n \geq 0$ у свакој тачки p на M^n су екстремне вредности Казоратијеве кривине $c(u) = g(A_p^C(u), u)$ узете у свим правцима на M^n у p, и чије вредности се достижу на спољашњим Казоратијевим главним правцима од M^n у $\tilde{M}^{n+m}$, који су одређени помоћу n ортонормираних сопствених вектора $f_1, \ldots, f_n$ од A^C у p, и Казоратијева кривина $c(u)$ у p у правцу $u = \sum_j f_j \cos\beta_j$ је дата са $c(u) = \sum_j c_j \cos^2\beta_j$, док је*

Казоратијева кривина од M^n *у* $\tilde{M}^{n+m}$ *у* p *дата са*

$$C(p) = \frac{1}{n}\|h\|^2(p) = \frac{1}{n}\sum_j c_j. \quad \square$$

Теорема 2.8 ([34])**.** *За подмногострукости* M^n *у реалној просторној форми* $\tilde{M}^{n+m}(c)$ *под следећим условима спољашњи Казоратијеви главни правци и унутрашњи Ричијеви главни правци се поклапају:*

(1) M^n *је минимална у* $\tilde{M}^{n+m}(c)$,

(2) M^n *је псеудо-амбиличка у* $\tilde{M}^{n+m}(c)$,

(3) *нормално раслојење од* M^n *у* $\tilde{M}^{n+m}(c)$ *је тривијално.* $\square$

2.5 Казоратијеви и Ричијеви главни правци Винтгенових идеалних подмногострукости

Знајући оператор облика за Винтгенове идеалне подмногострукости M^n реалних просторних форми $\tilde{M}^{n+m}$ и користећи се напред дефинисаним појмовима за Казоратијеву и Ричијеву кривину, долази се до следећих резултата.

Теорема 2.9 ([15])**.** *За Винтгенове идеалне подмногострукости* M^n *реалне просторне форме* $\tilde{M}^{n+m}(c)$*, унутрашњи главни правци одређени (0,2)-Ричијевим тензором* S *се поклапају са спољашњим главним правцима одређеним са (1,1)-Казоратијевим оператором* A^C. $\square$

Доказ: Из Теореме 2.2, на основу посебних израза за операторе облика, који су карактеристични за Винтгенове идеалне подмногострукости, лако се добија:

$$A^C = \sum_{j=1}^{m} A_j^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} L + 2\lambda_2\mu + 2\mu^2 & 2\lambda_1\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 2\lambda_1 & L - 2\lambda_2\mu + 2\mu^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & L & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L \end{bmatrix},$$

где је $L = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\mu \in \mathbb{R}$.

Из $\det(A - \tilde{\lambda} I) = 0$, $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, добија се

$$(L - \tilde{\lambda})^{n-2}\Big((L + 2\mu^2 - \tilde{\lambda})^2 - 4\mu^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Big) = 0.$$

Одавде је:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= L + 2\mu^2 + 2\mu\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \\ \tilde{\lambda}_2 &= L + 2\mu^2 - 2\mu\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \\ \tilde{\lambda}_3 &= \tilde{\lambda}_4 = \cdots = \tilde{\lambda}_n = L, \end{aligned}$$

и ово су сопствене вредности оператора A^C.

Из релације $(A^C - \tilde{\lambda} I)X = 0$, где је $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ добијамо одговарајуће сопствене векторе.

Претходна матрична једначина записана у развијеном облику гласи:

$$\begin{cases} (L + 2\mu^2 + 2\lambda_2\mu - \tilde{\lambda})x_1 + 2\lambda_1\mu x_2 = 0 \\ 2\lambda_1\mu x_1 + (L + 2\mu^2 - 2\lambda_2\mu - \tilde{\lambda})x_2 = 0 \\ (L - \tilde{\lambda})x_3 = 0 \\ \quad\ddots \quad \vdots \\ (L - \tilde{\lambda})x_n = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

За $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1$ решење система (2.13) је облика

$$x_1 = \alpha, \qquad x_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\alpha, \qquad x_3 = \cdots = x_n = 0,$$

тј.

$$\vec{e}_1 = \Big(\alpha, \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\alpha, 0, \ldots, 0\Big).$$

Како је $\vec{e}_1$ јединични вектор, то се добија да је

$$\alpha = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}},$$

па је први сопствени (главни) вектор $\vec{e}_1$ облика:

$$\vec{e}_1 = \Big(\frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}}, \frac{\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}}, 0, \ldots, 0\Big).$$

На исти начин за $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_2$ се добија други сопствени вектор:

$$\vec{e}_2 = \Big(\frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}}, \frac{\lambda_1}{\sqrt{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}}, 0, \ldots, 0\Big)$$

За $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_3 = \cdots = \tilde{\lambda}_n = L$, редом добијамо сопствене векторе:

$$\begin{aligned}\vec{e}_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots, 0),\\ &\vdots\\ \vec{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).\end{aligned}$$

Са друге стране, знајући компоненте Ричијевог (0,2)-тензора на Винтгеновој идеалној подмногострукости M^n у реалној просторној форми $\tilde{M}^{n+m}(c)$, добија се:

$$S = \begin{bmatrix} (n-1)c_1 - 2\mu^2 + (n-2)\lambda_2\mu & (n-2)\lambda_1\mu & 0 & \cdots & 0\\ (n-2)\lambda_1\mu & (n-1)c_1 - 2\mu^2 - (n-2)\lambda_2\mu & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & (n-1)c_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)c_1 \end{bmatrix},$$

где је $c_1 = c + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$.

Из $\det(S - \bar{\lambda}I) = 0$ добијамо:

$$\big((n-1)c_1 - \bar{\lambda}\big)^{n-2}\Big(\big((n-1)c_1 - 2\mu^2 - \bar{\lambda}\big)^2 - (n-2)^2\mu^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Big) = 0,$$

одакле се добијају сопствене вредности Ричијевог оператора S, тј.

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_1 &= (n-1)c_1 - 2\mu^2 + (n-2)\mu\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},\\
\bar{\lambda}_2 &= (n-1)c_1 - 2\mu^2 - (n-2)\mu\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},\\
\bar{\lambda}_3 &= \bar{\lambda}_4 = \cdots = \bar{\lambda}_n = (n-1)c_1.
\end{aligned}$$

Матрична једнакост $(S-\bar{\lambda}I)X = 0$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, у развијеном облику гласи:

$$\begin{cases}
\big((n-1)c_1 - 2\mu^2 + (n-2)\lambda_2\mu - \bar{\lambda}\big)x_1 + (n-2)\lambda_1\mu x_2 &= 0\\
(n-2)\lambda_1\mu x_1 + \big((n-1)c_1 - 2\mu^2 - (n-2)\lambda_2\mu - \bar{\lambda}\big)x_2 &= 0\\
\big((n-1)c_1 - \bar{\lambda}\big)x_3 &= 0\\
\ddots &\vdots\\
\big((n-1)c_1 - \bar{\lambda}\big)x_n &= 0
\end{cases} \tag{2.14}$$

Стављајући $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1$ у систем (2.14) добијамо да је одговарајући сопствени вектор

$$\vec{f_1} = \Big(\alpha, \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}\alpha, 0, \ldots, 0\Big),$$

одакле нормирањем добијамо

$$\vec{f_1} = \Big(\frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}, \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}, 0, \ldots, 0\Big).$$

Слично се добијају и остали сопствени вектори:

$$\begin{aligned}
\vec{f}_2 &= \Big(\frac{\lambda_2-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2})}, \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2})}, 0,\dots,0\Big),\\
\vec{f}_3 &= (0,0,1,0,\dots,0),\\
&\vdots\\
\vec{f}_n &= (0,0,0,\dots,0,1).
\end{aligned}$$

Упоређивањем главних праваца спољашњег Казоратијевог оператора A^C са главним правцима унутрашњег Ричијевог оператора S на Винтгеновој идеалној подмногострукости M^n у $\tilde{M}^{n+m}(c)$, очигледно је да се они поклапају. $\square$

Дакле, за минималне подмногострукости M^n у $\mathbb{E}^{n+m}$ ($\vec{H}=0$) „тензија“ $H^2 = g(\vec{H},\vec{H})$ ишчезава. Код псеудо-амбиличких подмогострукости та „тензија“ површи не ишчезава, али како су ове подмногострукости по дефиницији такве да им је оператор облика $A_{\vec{H}}$ пропорционалан идентичкој трансформацији, то се ова „тензија“ равномерно дистрибуира у свим тангентним правцима на M^n, тј. $\vec{H}$ одређује амбилички правац од M^n у $\mathbb{E}^{n+m}$. Дакле, минималне и псеудо-амбиличке подмногострукости M^n су таквог облика у амбијентном еуклидском простору $\mathbb{E}^{n+m}$ да успевају да у потпуности избегну „тензију“ спољашњег простора, или ако је то немогуће избећи, да га равномерно дистрибуирају у свим тангентним правцима у свакој својој тачки. Овде смо утврдили да за Винтгенове идеалне подмногострукости $\tilde{M}^{n+m}(c)$ Казоратијеви главни правци леже у n тангентних ортогоналних праваца у свакој тачки од $\tilde{M}^{n+m}(c)$ у којој њена Ричијева кривина, као најприроднија унутрашња (инваријантна) скаларна кривина која се може придружити тангентним правцима, достиже екстремне вредности.

Глава 3

Уопштене Винтгенове идеалне подмногострукости

3.1 Подмногострукости хермитских многострукости

Као што је познато, комплексна структура на реалном векторском простору $V(\dim V \geq 1)$ је линеарни оператор J од V такав да је $J^2 = -\mathrm{Id}$, где је Id-идентичка трансформација на V.

Нека је $\tilde{M}$ n-димензиона комплексна многострукост и J њена канонска скоро-комплексна структура [29]. *хермитска метрика* на $\tilde{M}$ је Риманова метрика g J-инваријантна преко J, тј.

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \qquad (X, Y \in T\tilde{M}).$$

Комплексна многострукост $\tilde{M}$ снадбевена хермитском метриком g се назива *хермитска многострукост.* Такође је познато да на свакој комплексној многострукости важи хермитска метрика; било која хермитска метрика на комплексној многострукости $\tilde{M}$ одређује недегенерисану

2-форму

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y), \qquad (X,Y \in T\tilde{M}),$$

која се назива *фундаментална (Келерова) 2-форма.* Очигледно је да важи

$$\omega(JX,JY) = \omega(X,Y).$$

За хермитску многострукост кажемо да је *Келерова*, ако је фундаментална 2-форма ω затворена.

Ако је $\tilde{M}$ Келерова многострукост и ако је $\tilde{R}$ њен тензор кривине, а $\tilde{S}$ њен Ричијев тензор, тада важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X,Y)J &= J\tilde{R}(X,Y), & \tilde{R}(JX,JY) &= \tilde{R}(X,Y) \\ \tilde{S}(JX,JY) &= \tilde{S}(X,Y), & \tilde{S}(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}J\tilde{R}(X,JY), \end{aligned}$$

за $X,Y \in T\tilde{M}$.

За Келерове многострукости појам константне секционалне кривине није релевантан. Зато се уводи појам холоморфне секционе кривине. Нека је $\tilde{M}$ Келерова многострукост и J њена скоро-комплексна структура. Секциона кривина холоморфне раванске секције π $(J\pi = \pi)$ се назива *холоморфна секциона кривина многострукости* $\tilde{M}$. Како је раванска секција J-инваријантна, може се као база одабрати $\{X, JX\}$, при чему је X јединични вектор. Тада је холоморфна секциона кривина дата са $K(\pi) = \tilde{R}(X,JX,X,JX)$.

Ако је холоморфна секциона кривина константна за произвољну холоморфну раванску секцију π у $T_p\tilde{M}$ и у свим тачкама $p \in \tilde{M}$, тада кажемо да је $\tilde{M}$ комплексна просторна форма са константне холоморфне секционе кривине и означавамо је са $\tilde{M}(c)$, где је c та константа.

Ако је $(\tilde{M}, g)$ m-димензиона хермитска многострукост и M n-димензиона комплексна подмногострукост, тада је утапање $f : M \to \tilde{M}$ холоморфно, тј. f је комплексно аналитичко пресликавање, тако да је $\mathrm{d}f$ инјективно у свакој тачки многострукости M. Са J се такође означава и комплексна структура индукована на M помоћу канонске комплексне структуре J од $\tilde{M}$. Риманова метрика индукована на M је такође хермитска. Придружена фундаментална форма је рестрикција фундаменталне 2-форме ω на $\tilde{M}$.

Комплексна подмногострукост M хермитске многострукости $\tilde{M}$ је J-инваријантна, тј. $J(T_pM) = T_pM$, $(p \in M)$. Тада је и:

$$J(T_p^{\perp}M) = T_p^{\perp}M, \qquad (p \in M).$$

Такође, познато је да комплексна подмногострукост M комплексне просторне форме $\tilde{M}(c)$ константне холоморфне секционе кривине c је тотално геодезијска ако и само ако M има константну холоморфну секциону кривину c.

3.2 Тотално реалне подмногострукости

Нека је $(\tilde{M}, J, g)$ m-димензиона хермитска многострукост. За n-димензиону подмногострукост M од $\tilde{M}$ кажемо да је *тотално реална подмногострукост* ако је

$$J(T_pM) \subset T_p^{\perp}M, \qquad (p \in M).$$

Еквивалент дате дефиниције је садржан у следећој пропозицији.

Пропозиција 3.1. *Нека је M подмногострукост хермитске многострукости $\tilde{M}$. Тада је M тотално реална подмногострукост ако и само ако је свака раванска секција од M тотално реална.* □

Дефиниција 3.1. Ако је реална димензија тотално реалне подмногострукости M једнака комплексној димензији хермитске многострукости $\tilde{M}$, тада се M назива *Лагранжова подмногострукост.*

Дакле, Лагранжова подмногострукост је тотално реална подмногострукост максималне димензије.

Б. Ј. Чен и К. Огие су дали низ веома лепих резултата за ове подмногострукости.

Пропозиција 3.2 ([11]). *Нека је M тотално реална подмногострукост комплексне просторне форме $\tilde{M}(c)$. Ако је M тотално геодезијска, тада M има константну секциону кривину $\frac{c}{4}$.* □

Пропозиција 3.3 ([11]). *Нека је M n-димензиона минимална тотално реална подмногострукост комплексне просторне форме $\tilde{M}$. Ричијев тензор S и скаларна кривина τ од M задовољавају услове:*

(i) $S - \frac{1}{4}(n-1)cg$ *је негативно семи-дефинитно,*

(ii) $\tau \leq \frac{1}{4}n(n-1)c$. □

Пропозиција 3.4 ([11]). *Нека је M n-димензиона минимална тотално реална подмногострукост комплексне просторне форме $\tilde{M}(c)$. Тада је M тотално геодезијска ако и само ако M задовољава следеће услове:*

(i) M *има константну секциону кривину* $\frac{c}{4}$;

(ii) $S = \frac{1}{4}(n-1)cg$;

(iii) $\tau = \frac{1}{4}n(n-1)c$. □

Подмногострукост M Риманове многострукости $(\tilde{M}, g)$ се назива *инваријантном* у односу на кривински оператор ако за $X, Y \in TM$ важи

$$\tilde{R}(X,Y)T_pM \subset T_pM, \qquad (p \in M).$$

Пропозиција 3.5 ([11]). *Нека је $\tilde{M}(c)$ не-равна комплексна просторна форма. Тада подмногострукост M од $\tilde{M}(c)$ је инваријантна у односу на кривински оператор ако и само ако је или комплексна подмногострукост или је тотално реална подмногострукост.* □

На овај начин се долази до класификације тотално геодезијских подмногострукости у комплексној просторној форми.

Теорема 3.1 ([57]). *Било која тотално геодезијска подмногострукост не-равне комплексне просторне форме је или комплексна подмногострукост или је тотално реална подмногострукост.* □

3.3 Подмногострукости у Сасакијевим просторним формама

За $(2m+1)$-димензиону Риманову многострукост $(\tilde{M}^{2m+1}, g)$ кажемо да је *Сасакијева многострукост* ако постоји ендоморфизам ϕ његог тангентног раслојења $T\tilde{M}^{2m+1}$, векторско поље ζ и 1-форма η, тако да важи:

$$\begin{aligned} \phi^2(X) &= -X + \eta(X)\zeta, \qquad \eta(\zeta) = 1, \qquad \phi(\zeta) = 0, \qquad \eta(\phi(X)) = 0, \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \qquad \eta(X) = g(X, \zeta) \\ (\tilde{\nabla}_X \phi)Y &= -g(X, Y)\zeta + \eta(Y)X, \qquad \tilde{\nabla}_X \zeta = \phi(X), \end{aligned}$$

где су X и Y векторска поља на $\tilde{M}^{2m+1}$, а $\tilde{\nabla}$ је Риманова конексија у односу на g.

Раванска секција π на $T_p\tilde{M}^{2m+1}$ се назива ϕ-секција ако је генерисана са X и ϕX, где је X јединични тангентни вектор ортогоналан на ζ. Секциона кривина ϕ-секције се назива ϕ-секциона кривина. За Сасакијеву многострукост константне ϕ-секционе кривине c кажемо да је Сасакијева просторна форма и означавамо је са $\tilde{M}^{2m+1}(c)$.

Тензор кривине $\tilde{R}$ Сасакијеве просторне форме $\tilde{M}^{2m+1}(c)$ је дат са

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z = \frac{c+3}{4}&\big\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\big\} + \\ &+ \frac{c-1}{4}\Big\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y)\zeta - \\ &- g(Y, Z)(\eta(X)\zeta + g(\phi Y, Z)\phi X - g(\phi X, Z)\phi Y - \\ &- 2g(\phi X, Y)\phi Z\Big\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

при чему су X, Y, Z произвољна тангентна векторска поља на $\tilde{M}^{2m+1}(c)$ [2].

Нека је M^n n-димензиона подмногострукост у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2m+1}(c)$, ∇ и h редом Риманова конексија од M^n и друга фундаментална форма, а R Риманов тензор кривине од M^n, тј.

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W), \qquad (X,Y,Z,W \in TM^n),$$

тада је *Гаусова једначина* дата са (1.11).

Означимо са $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2m+1}\}$ ортонормирану базу тангентног простора $\tilde{M}^{2m+1}(c)$, при чему су $e_1, \ldots, e_n$ тангентни вектори на M у тачки p, тада је вектор средње кривине дат са (1.7).

Подмногострукост M^n, која је нормална на ζ из Сасакијеве многострукости, се назива *C-тотално реална подмногострукост*. То, у овом случају, значи да ϕ пресликава било који тангентни простор од M^n у нормалан простор, тј. $\phi(T_pM^n) \subset T_p^{\perp}M^n$, за свако $p \in M^n$.

Постоје различите класе подмногострукости које су тангентне на структурно векторско поље ζ. Неке од њих су:

- (i) *инваријантне*: подмногострукост M^{2n+1} тангентна на ζ је инваријантна ако $\phi(T_pM^{2n+1}) \subset T_pM^{2n+1}$, за свако $p \in M^{2n+1}$;
- (ii) *анти-инваријантне*: подмногострукост M^n тангентна на ζ је анти-инваријантна, ако $\phi(T_pM^n) \subset T_p^{\perp}M^n$, за свако $p \in M^n$;
- (iii) *контактно искошене*: подмногострукост M^n тангентна на ζ је контактно искошена подмногострукост ако за било који вектор $X \in T_pM^n$ линеарно независан са ζ_p, угао између ϕX и T_pM^n је константан, тј. не зависи од избора тачке $p \in M^n$ и вектора $X \in T_pM^n$.

Такође је познато, да је било која инваријантна Сасакијева многострукост минимална подмногострукост [44].

3.4 Уопштене Винтгенове неједнакости за Лежандрове подмногострукости

Нека је M^n C-тотално реална подмногострукост Сасакијеве многострукости $\tilde{M}^{2m+1}(c)$. Ако је $n = m$, тада се M^n назива *Лежандрова многострукост*.

Нека је M^n C-тотално реална подмногострукост од $(2m+1)$-димензионе Сасакијеве просторне форме $\tilde{M}^{2m+1}(c)$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ ортонормирани репер на M^n и $\{e_{n+1}, \dots, e_{2m}, e_{2m+1} = \zeta\}$ ортонормирани репер у нормалном раслојењу $T^{\perp}M^n$. Нека су h и A друга фундаментална форма и оператор облика од M^n у $\tilde{M}^{2m+1}(c)$. Тада су *Гаусова и Ричијева једначина* дате редом са:

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) = \frac{c+3}{4}\big[g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\big] + \\ + g(h(X,Z),h(Y,W)) - g(h(X,W),h(Y,Z)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} R^{\perp}(X,Y,\mu,\nu) = \frac{c-1}{4}\big[g(\phi X,\mu)g(\phi Y,\nu) - g(\phi X,\nu)g(\phi Y,\mu)\big] \\ - g([A_\mu, A_\nu]X,Y), \end{aligned} \tag{3.3}$$

за $X,Y,Z,W \in TM^n$ и $\mu,\nu \in T^{\perp}M^n$.

Скаларна нормална кривина од M^n је:

$$K_N = \frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{2m-n+1} \mathrm{tr}[A_r, A_s]^2,$$

где је $A_r = A_{e_{n+r}}$, $r \in \{1, \dots, 2m-n+1\}$.

Притом је *нормализована скаларна нормална кривина*:

$$\rho_N = \frac{2}{n(n-1)}\sqrt{K_N}.$$

Ако је $A_\zeta = 0$, добија се:

$$K_N = \frac{1}{2} \sum_{1\le r<s\le 2m-n} \mathrm{tr}[A_r, A_s]^2 =$$
$$= \sum_{1\le r<s\le 2m-n} \left(\sum_{1\le i<j\le n} (g([A_r, A_s]e_i, e_j))^2 \right).$$

Ако означимо са $h_{ij}^r = g(h(e_i, e_j), e_{n+r})$, $(i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $r \in \{1, 2, \ldots, 2m-n+1\})$, компоненте друге фундаменталне форме, тада се нормализована нормална секциона кривина може изразити помоћу компоненти друге фундаменталне форме на следећи начин:

$$K_N = \sum_{1\le r<s\le 2m-n} \left(\sum_{1\le i<j\le n} \left(\sum_{k=1}^{n} (h_{jk}^r h_{ik}^s - h_{ik}^r h_{jk}^s) \right)^2 \right).$$

У раду Ј. Михаија [45] је дата неједнакост између нормализоване скаларне кривине ρ, нормализоване нормалне кривине ρ_N и квадрата средње кривине за C-тотално реалне подмногострукости у Сасакијевим просторним формама.

Теорема 3.2 ([45])**.** *Нека је M^n n-димензиона C-тотално реална подмногострукост у $(2m+1)$-димензионој Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2m+1}(c)$. Тада важи:*

$$\|H\|^2 + \frac{c+3}{4} \ge \rho + \rho_N. \tag{3.4}$$

Једнакост у датој неједнакости важи ако и само ако у односу на погодно одабран ортонормиран репер

$$\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_{2m}, e_{2m+1} = \zeta\},$$

оператори облика од M^n у $\tilde{M}^{2m+1}(c)$ имају облик:

$$\left.\begin{aligned} &A_{e_{n+1}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad A_{e_{n+2}} = \begin{bmatrix} \lambda_2+\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 \end{bmatrix}, \\ &A_{e_{n+3}} = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 \end{bmatrix}, \qquad A_{e_{n+4}} = \cdots = A_{e_{2m}} = A_{e_{2m+1}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu$ *реалне функције на* M^n. □

За Лежандрове подмногострукости у Сасакијевим просторним формама, у истом раду је добијен следећи резултат.

Теорема 3.3 ([45]). *Нека је* M^n *Лежандрова подмногострукост у Сасакијевој просторној форми* $\tilde{M}^{2n+1}(c)$. *Тада је:*

$$\begin{aligned} (\rho^\perp)^2 \le & \left(\|H\|^2 - \rho + \frac{c+3}{4}\right)^2 + \\ & + \frac{4}{n(n-1)}\left(\rho - \frac{c+3}{4}\right)\frac{c-1}{4} + \frac{(c-1)^2}{8n(n-1)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Једнакост у неједнакости (3.6) *важи ако и само ако су у односу на погодно одабран репер оператори облика дати са* (3.5). □

Овај резултат доказује тзв. *уопштену Винтгенову неједнакост* за *Лежандрове подмногострукости у Сасакијевим просторним формама.*

Лежандрове подмногострукости M^n у Сасакијевим просторним формама $\tilde{M}^{2n+1}(c)$, које задовољавају *једнакост* у неједнакости (3.4), називају се *Винтгенове идеалне Лежандрове подмногострукости.*

Последица 3.1 ([45]). *За минималну Лежандрову подмногострукост M^n Сасакијеве просторне форме $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ важи:*

$$\rho \geq 1 - \rho^{\perp}. \quad \square$$

3.5 Дешчове симетрије Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости

Нека је M^n n-димензиона Винтгенова идеална Лежандрова подмногострукост од $(2n+1)$-димензионе Сасакијеве просторне форме $\tilde{M}^{2n+1}(c)$.

Полазећи од Гаусове једначине (3.2), која се у локалним компонентама може записати као:

$$R_{ijkl} = \frac{c+3}{4}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_{t=n+1}^{2m+1}(h_{ik}^t h_{jl}^t - h_{il}^t h_{jk}^t),$$

лако се могу израчунати компоненте Риман-Кристофеловог тензора кривине ових подмногострукости. Једине не-нула компоненте од R су:

$$\left.\begin{array}{l} R_{1221} = 2\mu^2 - (\frac{c+3}{4} + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = 2\mu^2 - \tilde{c}, \\ \qquad\qquad \text{где је } \tilde{c} = \frac{c+3}{4} + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ R_{1kk1} = -\lambda_2\mu - (\frac{c+3}{4} + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = -\lambda_2\mu - \tilde{c}, \qquad k \geq 3 \\ R_{1kk2} = -\lambda_1\mu, \qquad k \geq 3, \\ R_{2kk2} = \lambda_2\mu - (\frac{c+3}{4} + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = \lambda_2\mu - \tilde{c}, \qquad k \geq 3, \\ R_{kllk} = -\frac{c+3}{4} - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 = -\tilde{c}, \qquad k \neq l, \quad k,l \geq 3. \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

У односу на ортонормирану базу $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ од T_pM^n, даље се израчунавају компоненте (0,6)-тензора $R \cdot R$ и $Q(g,R)$.

Једине не-нула компоненте ових тензора су:

(1) $(R \cdot R)(e_1, e_3, e_3, e_1; e_1, e_2) = 2R_{1221}R_{1332} = -2\lambda_1\mu(2\mu^2 - \tilde{c}),$

$Q(g,R)(e_1, e_3, e_3, e_1; e_1, e_2) = 2R_{1332} = -2\lambda_1\mu;$

(2) $(R\cdot R)(e_1,e_3,e_3,e_2;e_1,e_2) = R_{1221}(R_{2332}-R_{1331}) = 2\lambda_2\mu(2\mu^2-\tilde{c}),$

$Q(g,R)(e_1,e_3,e_3,e_2;e_1,e_2) = R_{2332}-R_{1331} = 2\lambda_2\mu;$

(3) $(R\cdot R)(e_1,e_2,e_1,e_3;e_2,e_3) = R_{1332}^2 + R_{2332}(R_{1221}-R_{1331}) =$
$= \lambda_1^2\mu^2 + (\lambda_2\mu-\tilde{c})(2\mu^2+\lambda_2\mu)$

$Q(g,R)(e_1,e_2,e_1,e_3;e_2,e_3) = R_{1221}-R_{1331} = 2\mu^2+\lambda_2\mu;$

(4) $(R\cdot R)(e_1,e_4,e_3,e_4;e_1,e_3) = R_{1331}(R_{1441}-R_{3443}) + R_{1332}R_{1442} =$
$= \lambda_1^2\mu^2 + \lambda_2\mu(\lambda_2\mu+\tilde{c})$

$Q(g,R)(e_1,e_4,e_3,e_4;e_1,e_3) = R_{1441}-R_{3443} = -\lambda_2\mu;$

(5) $(R\cdot R)(e_1,e_4,e_3,e_4;e_2,e_3) = R_{1332}(R_{1441}-R_{1332}) + R_{2332}R_{1442} = \lambda_1\mu\tilde{c}$

$Q(g,R)(e_1,e_4,e_3,e_4;e_2,e_3) = R_{1442} = -\lambda_1\mu;$

(6) $(R\cdot R)(e_2,e_4,e_3,e_4;e_2,e_3) = R_{2332}(R_{2442}-R_{3443}) + R_{1332}R_{1442} =$
$= \lambda_1^2\mu^2 + \lambda_2\mu(\lambda_2\mu-\tilde{c})$
$Q(g,R)(e_2,e_4,e_3,e_4;e_2,e_3) = R_{2442}-R_{3443} = \lambda_2\mu.$

Дешчов услов псеудо-симетричности, $R\cdot R = LQ(g,R)$, где је L реална функција, важиће за Винтгенову идеалну Лежандрову подмногострукокст M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}$ ако и само ако је задовољен следећи систем једначина:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1\mu(2\mu^2-\tilde{c}-L)=0,\\ \lambda_2\mu(2\mu^2-\tilde{c}-L)=0,\\ \lambda_1^2\mu^2+\mu(\lambda_2+2\mu)(\lambda_2\mu-\tilde{c}-L)=0,\\ \lambda_1^2\mu^2+\lambda_2\mu(\lambda_2\mu+\tilde{c}+L)=0,\\ \lambda_1\mu(\tilde{c}+L)=0.\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Систем (3.8) важи ако и само ако је:

(i) $\mu = 0$; у том случају је $L = 0$, или

(ii) $\mu \neq 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; у том случају је $L = -\tilde{c} = -\frac{c+3}{4} - \lambda_3^2$, или

(iii) $\mu \neq 0$ и $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$; у том случају је

$$L = \frac{2\lambda_1(\lambda_1 - \mu)}{2\mu - \lambda_1} - \tilde{c}, \qquad (\lambda_1 \neq 2\mu).$$

Овим је доказана следећа теорема.

Теорема 3.4 ([50])**.** *Винтгенова идеална Лежандрова подмногострукост Сасакијеве просторне форме $\tilde{M}^{2n+1}(c)$, $(n \geq 4)$, је Дешч симетрична Риманова многострукост, ако и само ако је:*

(i) *тотално амбиличка (тада је $L = 0$), или*

(ii) *минимална, или*

(iii) *псеудо-амбиличка подмногострукост Сасакијеве просторне форме $\tilde{M}^{2n+1}(c)$, при чему је $L = -\frac{c+3}{4} - H^2$.* □

Користећи не-нула компоненте Риман-Кристофеловог тензора кривине (3.7), могу се израчунати компоненте (0,2)-Ричијевог тензора Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$. За (0,2)-Ричијев тензор (1.3) у локалним копмпонентама:

$$\begin{aligned} S_{jk} = \sum_{i=1}^{n} R_{ijki} = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ &\frac{c+3}{4}(\delta_{ik}\delta_{ij} - \delta_{ii}\delta_{jk}) + \\ &+ \sum_{i=n+1}^{2n+1} (h_{ik}^t h_{ij}^t - h_{ii}^t h_{jk}^t) \Big\}, \end{aligned}$$

где је $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ортонормирана база од TM^n, добијамо да су једине не-нула компоненте Ричијевог тензора дате са:

$$\left.\begin{aligned} &S_{11} = R_{1221} + (n-2)R_{1kk1} = 2\mu^2 - (n-1)\tilde{c} - (n-2)\lambda_2\mu, \\ &S_{22} = R_{1221} + (n-2)R_{2kk2} = 2\mu^2 - (n-1)\tilde{c} + (n-2)\lambda_2\mu, \\ &S_{12} = (n-2)R_{1kk2} = -(n-2)\lambda_1\mu, \\ &S_{kk} = R_{1kk1} + R_{2kk2} + (n-3)R_{kllk} = -(n-1)\tilde{c}, \;\; k \neq l, \;\; k, l \geq 3. \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

На основу ових не-нула компоненти Ричијевог тензора S, добијамо да је скаларна кривина τ Винтгенове идеалне Лежандрове подмногострукости Сасакијеве просторне форме $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ дата са

$$\tau = 4\mu^2 - n(n-1)\tilde{c}.$$

Користећи компоненте Риман-Кристофеловог тензора (3.7) и Ричијевог тензора (3.9), добијамо да су једине не-нула компоненте Вејловог конформног тензора кривине C (1.4) дате са:

$$\left.\begin{aligned}
C_{1221} &= R_{1221} - \frac{S_{11}+S_{22}}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} = \\
&= \frac{2(n-3)}{n-1}\mu^2, \\
C_{1kk1} &= R_{1kk1} - \frac{S_{11}+S_{kk}}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} = \\
&= \frac{-2(n-3)}{(n-1)(n-2)}\mu^2, \\
C_{2kk2} &= C_{1kk1}, \\
C_{kllk} &= R_{kllk} - \frac{S_{kk}+S_{ll}}{n-2} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} = \\
&= \frac{4\mu^2}{(n-1)(n-2)}, \quad l \neq k, \quad k,l \geq 3.
\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Компоненте (0,6)-тензора $C \cdot C$ и $Q(g, C)$, које нису аутоматски једнаке нули, су одређене са:

(1) $(C \cdot C)(e_2, e_3, e_1, e_2; e_1, e_3) = C_{1331}(C_{2332} - C_{1221}) = \frac{4(n-3)^2}{(n-1)(n-2)^2}\mu^4$,
$Q(g, C)(e_2, e_3, e_1, e_2; e_1, e_3) = C_{2332} - C_{1221} = -\frac{2(n-3)}{n-2}\mu^2$;

(2) $(C \cdot C)(e_1, e_4, e_3, e_4; e_1, e_3) = C_{1331}(C_{1441} - C_{3443}) = \frac{4(n-3)}{(n-1)(n-2)^2}\mu^4$,
$Q(g, C)(e_1, e_4, e_3, e_4; e_1, e_3) = C_{1441} - C_{3443} = \frac{-2}{n-2}\mu^2$.

Услов псеудо-симетрије $C \cdot C = L_C Q(g, C)$ ће у овом случају бити задовољен ако и само ако важи једнакост:

$$\frac{4(n-3)^2\mu^4}{(n-1)(n-2)^2} = -\frac{2L_C(n-3)}{n-2}\mu^2,$$

тј.

$$\frac{2\mu^2}{n-2}\left(L_C + \frac{2(n-3)}{(n-1)(n-2)}\mu^2\right) = 0.$$

Последња једнакост важи ако и само ако је $\mu = 0$ или $L_C = -\dfrac{2(n-3)}{(n-1)(n-2)}\mu^2$.

Из релације (3.5) уочавамо да за Винтегнове идеалне Лежандрове подмногострукости Сасакијевих просторних форми важи:

$$\inf K = K_{12} = \tilde{c} - 2\mu^2,$$

одакле се добија да је:

$$\mu^2 = -\frac{1}{2(n-2)(n-1)}(\tau + n(n-1)\inf K).$$

Теорема 3.5 ([50]). *Нека је M^n $(n > 3)$ Винтгенова идеална Лежандрова подмногострукост у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$. Тада важи:*

- *(i) M^n је конформно равна ако и само ако је M^n тотално амбиличка подмногострукост у $\tilde{M}^{2n+1}(c)$;*
- *(ii) M^n увек има псеудо-симетричан Вејлов конформни тензор кривине C, $C{\cdot}C = L_C Q(g, C)$, и одговарајућа функција псеудо-симетрије је дата са:*

$$L_c = \frac{-2(n-3)}{(n-1)(n-2)}\mu^2 = \frac{n-3}{(n-1)(n+1)}(\tau + n(n-1)\inf K). \quad \square$$

3.6 Казоратијеви и Ричијеви главни правци Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости

Казоратијев (1,1)-оператор на Лежандровој подмногострукости M^n у амбијентном простору $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ је дефинисан са $A^C = \sum_\gamma A_\gamma^2$, $\gamma \in$

$\{n+1, n+2, \dots, 2n+1\}$, а одговарајућа Казоратијева кривина је тада $C = \frac{1}{n}\mathrm{tr}A^C = \frac{1}{n}\|h\|^2$.

Из Теореме 3.3, а на основу посебних израза за операторе облика, произилази да је Казоратијев оператор Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ дат са:

$$A^C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\lambda_2\mu + 2\mu^2 & 2\lambda_1\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 2\lambda_1\mu & \lambda - 2\lambda_2\mu + 2\mu^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

где је $\lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$.

Лако се показује да су сопствене вредности оператора A^C:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \lambda + 2\mu^2 + 2\mu\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \\ c_2 &= \lambda + 2\mu^2 - 2\mu\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \\ c_3 &= c_4 = \cdots = c_n = \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Одговарајући сопствени вектори су облика:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}e_1 - \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}e_2, \\ F_2 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}e_1 - \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}e_2, \\ F_k &= e_k, \qquad (k = 3, 4, \dots), \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

где су $e_1, e_2, \dots, e_n$ вектори канонске базе од T_pM^n.

Очигледно је да F_1 и F_2 одређују дводимензиони сопствени потпростор A^C који одговара вредностима c_1 и c_2, респективно. Када су

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\mu \neq 0$, Чои-Луова раван сама за себе је дводимензиони сопствени потпростор од A^C. Када је $\mu = 0$ (у том случају су Казоратијеви главни правци неодређени), A^C постаје пропорционално идентичном оператору. У сваком случају, подпростор генерисан са $e_3, e_4, \dots, e_n$ од M^n је $(n-2)$-димензиони сопствени простор од A^C са одговарајућом Казоратијевом кривином λ.

Многострукост M^n која има 3 главне кривине које имају ред 1, 1 и $n-1$ респективно, назива се *2-квази-амбиличка многострукост.*

Теорема 3.6 ([50])**.** *Свака Винтгенова идеална Лежандрова подмногострукост M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ је Казорати 2-квази-амбиличка. Када M^n није тотално амбиличка, тада је ортогонални комплемент од њене Чои-Луове равни њен $(n-2)$-димензиони сопствени потпростор.* □

Ричијев (0,2)-тензор S од M^n, као и одговарајући (1,1)-Ричијев оператор (такође означен са S; $g(S(X), Y) = S(X, Y)$) су такође симетрични. Отуда постоји ортонормирани скуп сопствених вредности $R_1, R_2, \dots, R_n$ који одређују унутрашње *Ричијеве главне правце* Риманове многострукости M^n и одговарајуће функције $R_{ic_1}, R_{ic_2}, \dots R_{ic_n}$ су *Ричијеве главне кривине*, тј. $S(R_i) = R_{ic_i} \cdot R_i$.

Из Теореме 3.3 закључујемо да Ричијев оператор S Винтгенове идеалне Лежандрове подмногострукости M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ има облик:

$$S = \begin{bmatrix} 2\mu^2 - (n-1)\tilde{c} - (n-2)\lambda_2\mu & -(n-2)\lambda_1\mu & 0 & \cdots & 0 \\ -(n-2)\lambda_1\mu & 2\mu^2 - (n-1)\tilde{c} + (n-2)\lambda_2\mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -(n-1)\tilde{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1)\tilde{c} \end{bmatrix}.$$

Лако се добија да су сопствене вредности Ричијевог оператора:

$$\left.\begin{aligned} R_{ic_1} &= 2\mu^2 - (n-1)\tilde{c} + (n-2)\mu\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \\ R_{ic_2} &= 2\mu^2 - (n-1)\tilde{c} - (n-2)\mu\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \\ R_{ic_3} &= R_{ic_4} = \cdots = R_{ic_n} = -(n-1)\tilde{c}, \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

док су одговарајући сопствени вектори:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}e_1 - \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}e_2, \\ R_2 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}e_1 - \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}e_2, \\ R_k &= e_k, \qquad k = 3, 4, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

где су $e_1, e_2, \ldots, e_n$ вектори канонске базе од T_pM^n.

Добијени сопствени вектори Ричијевог оператора S, имплицирају следеће тврђење.

Теорема 3.7 ([50])**.** *Свака Винтгенова идеална Лежандрова подмногострукост M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ је Ричи 2-квази-амбиличка. Ако M^n није тотално амбиличка, тада је ортогонални комплемент од њене Чои-Луове равни, њен $(n-2)$-димензиони Ричи сопствени простор .* □

Познато је да су са тачке гледишта *спољашње геометрије*, Казоратијеви главни правци подмногострукости M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$ њени најважнији тангентни правци, док са *унутрашње тачке гледишта* за многострукост M^n најбитнији тангентни правци су њени Ричијеви главни правци.

Из израза за Казоратијеве и Ричијеве главне правце, дате скуповима једнакости (3.12) и (3.14), закључујемо да важи следеће тврђење.

Теорема 3.8 ([50]). *На свакој Винтгеновој идеалној Лежандровој подмногострукости M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$, Казоратијеви и Ричијеви главни правци се поклапају.* $\square$

3.7 Ротерово својство Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости

У Глави 2 смо видели да се Риманова многострукост (M, g) назива *Ротеровим простором*, ако се њен Риман-Кристофелов тензор кривине може представити као линеарна комбинација облика:

$$R = \tilde{\lambda}(g \wedge g) + \tilde{\mu}(g \wedge S) + \tilde{\nu}(S \wedge S) \tag{3.15}$$

за неке функције $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu} : M \to \mathbb{R}$.

За Винтгенове идеалне Лежандрове подмногострукости у Сасакијевој просторној форми важи следећа теорема.

Теорема 3.9 ([50]). *Нека је M^n Винтгенова идеална Лежандрова подмногострукост у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$. Тада је M^n Дешч симетрична ако и само ако је M^n Ротеров простор.*

Доказ: На основу Теореме 3.3 и добијених не-нула компоненти за Риман-Кристофелов тензор R (3.7) и Ричијеве тензор S (3.9) Винтгенових идеалних Лежандрових подмногострукости M^n у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$, једнакост (3.15) ће бити нетривијално задовољена у следећим случајевима:

$$
\begin{aligned}
R_{1221} = & \tilde{\lambda}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) + \tilde{\mu}(g_{11}S_{22} + g_{22}S_{11} - g_{12}S_{21} - g_{21}S_{12}) + \\
& + 2\tilde{\nu}(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}), \\
R_{1kk1} = & \tilde{\lambda}(g_{11}g_{kk} - g_{1k}g_{k1}) + \tilde{\mu}(g_{11}S_{kk} + g_{kk}S_{11} - g_{1k}S_{k1} - g_{k1}S_{1k}) + \\
& + 2\tilde{\nu}(S_{11}S_{kk} - S_{1k}S_{k1}), \\
R_{kllk} = & \tilde{\lambda}(g_{kk}g_{ll} - g_{lk}g_{kl}) + \tilde{\mu}(g_{kk}S_{ll} + g_{ll}S_{kk} - g_{lk}S_{kl} - g_{kl}S_{lk}) + \\
& + 2\tilde{\nu}(S_{kk}S_{ll} - S_{lk}S_{kl}).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Заменом израчунатих компоненти од R (3.7) и S (3.9), претходне три једначине постају редом:

$$
\begin{aligned}
2\mu^2 - \tilde{c} = & \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(2\mu^2 - (n-1)\tilde{c}) + \\
& + 2\tilde{\nu}\big[(2\mu^2 - (n-1)\tilde{c})^2 - (n-2)^2\lambda_2^2\mu^2\big],
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

$$
\begin{aligned}
-2\lambda_2\mu - \tilde{c} = & \tilde{\lambda} + \tilde{\mu}(2\mu^2 - 2(n-1)\tilde{c} - (n-2)\lambda_2\tilde{\mu}) \\
& + 2\tilde{\nu}(n-1)\tilde{c}\big(-2\mu^2 + (n-1)\tilde{c} + (n-2)\lambda_2\mu\big),
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$
-\tilde{c} = \tilde{\lambda} - 2\tilde{\mu}(n-1)\tilde{c} + 2\tilde{\nu}(n-1)^2\tilde{c}^2. \tag{3.19}
$$

Ако је M^n Дешч симетрична Винтгенова идеална Лежандрова подмногострукост у Сасакијевој просторној форми $\tilde{M}^{2n+1}(c)$, тада је или (а) $\mu = 0$ или (б) $\mu \neq 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. У случају (а) M^n је сама по себи реална форма па отуда и Ротеров простор. У случају (б) једначине (3.17), (3.18), (3.19) редукују се редом у:

$$
\begin{aligned}
2\mu^2 - \frac{c+3}{4} - \lambda_3^2 = & \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}(2\mu^2 - (n-1)\left(\frac{c+3}{4} + \lambda_3^2\right) \\
& + 2\tilde{\nu}\left(2\mu^2 - (n-1)\left(\frac{c+3}{4} + \lambda_3^2\right)\right)^2,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
-2\frac{c+3}{4}-\lambda_3^2 = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}\left(\mu^2-(n-1)\left(\frac{c+3}{4}+\lambda_3^2\right)\right) \\
+2\tilde{\nu}\left(\frac{c+3}{4}+\lambda_3^2\right)\left(-2\mu^2+(n-1)\left(\frac{c+3}{4}+\lambda_3^2\right)\right),
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{c+3}{4}-\lambda_3^2 = \tilde{\lambda} - 2\tilde{\mu}(n-1)\left(\frac{c+3}{4}+\lambda_3^2\right)+ \\
+2\tilde{\nu}(n-1)^2\left(\frac{c+3}{4}+\lambda_3^2\right).
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Последњи систем једначина даје јединствено решење:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\lambda} &= \frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{c+3}{4}+\lambda_3^2\right)\left(2\mu^2-(n-1)^2\left(\frac{c+3}{4}+\lambda_3^2\right)\right), \\
\tilde{\mu} &= \frac{1}{2\mu^2}(n-1)\left(\frac{c+3}{4}+\lambda_3^2\right), \\
\tilde{\nu} &= -\frac{1}{4\mu^2}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Према томе, и у овом случају многострукост M^n је Ротеров простор.

Литература

[1] R. L. B. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.

[2] D. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Sympletic Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 2002.

[3] É. Cartan, *Families de surface isoparametrique dans les espace a curvature constante*, Ann. Math. Pure Appl. 17 (1938), 177-191.

[4] É. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gautlier-Villars, Paris, 1963.

[5] F. Casorati, *Mesure de la courbure des surfaces suivant l-idee commune*, Act. Math. 14 (1890), no. 1, 95-110.

[6] B. Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[7] B. Y. Chen, *Totally umbilical submanifolds*, Soochow. J. Math. 5 (1980), 9-37.

[8] B. Y. Chen, *Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real space forms*, Glasgow Math. J. 38 (1996), 87-97.

[9] B. Y. Chen, *Classification of Wintgen ideal surfaces in Euclidean 4-space with equal Gauss and normal curvatures*, Annals of Global Analysis and Geometry 38.2 (2010), 145-160.

[10] B. Y. Chen, *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*, World Scientific Publ. Co, Singapore, 2011.

[11] B. Y. Chen, K. Ogiue, *On totally real submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974), 257-266.

[12] T. Choi, Z. Lu, *On the DDVV conjecture and the comass in calibrated geometry (I)*, Math. Z. 260 (2008), 409-429.

[13] S. Decu, M. Petrović-Torgašev, A. Šebeković, L. Verstraelen, *On the intrinsic Deszcz symmetries and the extrinsic Chen character of Wintgen ideal submanifolds*, Tamkang J. Math. 41.2 (2010), 109-116.

[14] S. Decu, M. Petrović-Torgašev, A. Šebeković, L. Verstraelen, *On the Roter type on Wintgen ideal submanifolds*, Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics, tome LV, no. 1 (2012), 75-90.

[15] S. Decu, M. Petrović-Torgašev, A. Šebeković, L. Verstraelen, *Ricci and Casorati principal directions of Wintgen ideal submanifolds*, Filomat 28(4) (2014), 657-661.

[16] F. Defever, R. Deszcz, *On semi-Riemannian manifolds satisfying the condition* $R \cdot R = Q(S, R)$, in: Geometry and Topology of Submanifolds, Vol. III (eds. L. Verstraelen and A. West), World Scientific Publ. Co., Singapore (1991), 108-130.

[17] P. J. De Smet, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, *A pointwise inequality in submanifold theory*, Arch. Math. (Brno) 35 (1999), 115-128.

[18] R. Deszcz, *On pseudo-symmetric spaces*, Bull. Soc. Math. Belg., Série A, 44 (1992), 1-34.

[19] R. Deszcz, *On some Akivis-Glodberg type metrics*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) 74(88) (2003), 71-83.

[20] R. Deszcz, M. Głogowska, M. Petrović-Torgašev, L. Verstraelen, *On the Roter Type of Chen Ideal Submanifolds*, Results in Mathematics 59 (2011), 401-413.

[21] R. Deszcz, S. Haesen, L. Verstraelen, *On Natural Symmetries*, Editura Academiei Romāne, Bucureşti (2008), 249-308.

[22] R. Deszcz, M. Hotloś, *On hypersurfaces with type number two in space of constant curvature*, Ann. Univ. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. 46 (2003), 19-34.

[23] R. Deszcz, M. Petrović-Torgašev, Z. Ṣentürk, L. Verstraelen, *Characterization of the pseudo-symmetries of ideal Wintgen submanifolds of dimension 3*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 88(102) (2010), 53-65.

[24] R. Deszcz, Ṣ. Yaprak, *Curvature properties of certain pseudosymmetric manifolds*, Publ. Math. Debrecen 45 (1994), 333-345.

[25] F. Dillen, J. Fastenakels, J. Van der Veken, *A pinching theorem for the normal scalar curvature of invariant submanifolds*, Journal of Geometry and Physics 57 (2007), 833-840.

[26] F. Dillen, J. Fastenakels, J. Van der Veken, *Remarks on an Inequality involving the Normal Scalar Curvature*, in: Pure and Applied Differential Geometry – PADGE 2007, Shaker Verlag, Aachen, 2007, 83-92.

[27] F. Dillen, M. Petrović-Torgašev, L. Verstraelen, *Einstein, conformally flat and semi-symmetric submanifolds satisfying Chen's equality*, Israel J. Math 100 (1997), 163-169.

[28] F. Dillen, L. Verstraelen, *Handbook of Differential Geometry*, Vol. 1, Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[29] M. Đorić, M. Okumura, *CR submanifolds of complex projective space*, Developments in Mathematics, Vol. 19, Springer, 2009.

[30] L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1925.

[31] J. Ge, Z. Tang, *A proof of DDVV conjecture and its equality case*, Pacific J. Math. 237 (2008), 87-95.

[32] M. Głogowska, *On Roter type manifolds*, in: Pure and Applied Differential Geometry – PADGE 2007, Shaker Verlag, Aachen 2007, 114-122.

[33] I.V. Guadalupe, L. Rodriguez, *Normal curvature of surfaces in space forms*, Pacific J. Math. 106 (1983), 95-103.

[34] S. Haesen, D. Kowalczyk, L. Verstraelen, *On the extrinsic principal directions of Riemannian submanifolds*, Note. Mat. 29, No. 2 (2009), 41-53.

[35] S. Haesen, L. Verstraelen, *Properties of a scalar curvature invariant depending on two planes*, Manuscripta Math. 122 (2007), 59-72.

[36] S. Haesen, L. Verstraelen, *Natural intrinsic geometrical symmetries*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 5 (2009), Paper 086, 15pp.

[37] S. Haesen, A. Šebeković, L. Verstraelen, *Relations between intrinsic and extrinsic curvatures*, Kragujevac J. Math. 25 (2003), 139-144.

[38] B. Jahanara, S. Haesen, M. Petrović-Torgašev, L. Verstraelen, *On the Weyl curvature of Deszcz*, Publ. Math. Debrecen 74/3-4 (2009), 417-431.

[39] J. D. Kowalczyk, *On some subcalss of semi-symmetric manifolds*, Soochow J. Math. 27 (2001), 445-461.

[40] W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves, Surfaces, Manifolds*, AMS Student Mathematical Library, 2000.

[41] Z. Lu, *Normal scalar curvature conjecture and its applications*, J. Funct. Anal. 261 (2011), 1284-1308.

[42] A. Mihai, *An inequality for totally real surfaces in complex space forms*, Kragujevac J. Math. 26 (2004), 83-88.

[43] A. Mihai, *Scalar normal curvature of Lagrangian 3-dimensional submanifolds in complex space forms*, in: Pure and Applied Differential Geometry – PADGE 2007, Shaker Verlag, Aachen, 171-177.

[44] I. Mihai, *On the generalized Wintgen inequality for Lagrangian submanifolds in complex space forms*, Nonlinear Anal. 95 (2014), 714-720.

[45] I. Mihai, *On the generalized Wintgen inequality for Legendrian submanifolds in Sasakian space forms*, (to apear).

[46] K. Nomizu, *On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor*, Tohoku Math. J. 20 (1968), 46-59.

[47] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, London, 1983.

[48] Z. Olszak, *On totally umbilical sybmanifolds of Cartan symmetric manifolds*, Demonstratio Math. 9 (1976), 95-103.

[49] M. Petrović-Torgašev, L. Verstraelen, *On Deszcz symmetries of Wintgen ideal submanifolds*, Arch. Math. (Brno) 44 (2008), 57-67.

[50] M. Petrović-Torgašev, A. Šebeković, L. Verstraelen, *Generalized Wintgen ideal submanifolds*, preprint.

[51] B. Rouxel, *Sur une famille de A-surfaces d'un espace euclidien* $\mathbb{E}^4$, Osterreichischer Math. Kongress, Innsbruck, 1981, pp. 185.

[52] Z. Szabó, *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$. *I. The local version*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 531-582.

[53] Z. Szabó, *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$. *II. The global version*, Geom. Dedicata 19 (1985), 65-108.

[54] L. Verstraelen, *Comments on the pseudo-symmetry in the sense of Deszcz*, in: Geometry and Topology of Submanifolds, Vol. VI (eds. F. Dillen e.a.), World Scientific Publ. Co., Singapore (1994), 119-209.

[55] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Springer, Berlin, 1921.

[56] P. Wintgen, *Sur l'inéqualité de Chen-Willmore*, C.R. Acad. Sci. Paris, ser. A 288 (1979), 933-995.

[57] K. Yano, M. Kon, *Anti-Invariant Submanifolds*, M. Dekker, New York, 1976.

Filomat 28:4 (2014), 657–661
DOI 10.2298/FIL1404657D

Published by Faculty of Sciences and Mathematics,
University of Niš, Serbia
Available at: http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat

Ricci and Casorati Principal Directions of Wintgen Ideal Submanifolds

Simona Decu[a], Miroslava Petrović–Torgašev[b], Aleksandar Šebeković[c], Leopold Verstraelen[d]

[a] *Research Department, SIAT, Romania*
[b] *University of Kragujevac, Faculty of Science, Department of Mathematics, Radoja Domanovića 12, 34000 Kragujevac, Serbia*
[c] *University of Kragujevac, Facuty of Technical Sciences, Svetog Save 65, 32000 Čačak, Serbia*
[d] *KU Leuven, Department of Mathematics, Section of Geometry, Celestijnenlaan 200b - bus 2400, 3001 Heverlee, Belgium*

Abstract. We show that *for Wintgen ideal submanifolds in real space forms* the (intrinsic) *Ricci principal directions* and the (extrinsic) *Casorati principal directions coincide.*

1. Wintgen Ideal Submanifolds of Real Space Forms

Let M^n be an n-dimensional Riemannian submanifold of an $(n+m)$–dimensional *real space form* $\tilde{M}^{n+m}(c)$ of constant sectional curvature c and let g, ∇ and $\tilde{g}, \tilde{\nabla}$ be the *Riemannian metric* and the corresponding *Levi–Civita connection* on M^n and on $\tilde{M}^{n+m}(c)$, respectively. *Tangent vector fields* on M^n will be written as $X, Y, \ldots$ and *normal vector fields* on M^n in $\tilde{M}^{n+m}(c)$ will be written as $\xi, \eta, \ldots$. The *formulae of Gauss and Weingarten*, concerning the decomposition of the vector fields $\tilde{\nabla}_X Y$ and $\tilde{\nabla}_X \xi$, respectively, into their tangential and normal components along M^n in $\tilde{M}^{n+m}(c)$, are given by $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$ and $\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi$, respectively, whereby h is the *second fundamental form* and A_ξ is the *shape operator* or *Weingarten map* of M^n with respect to the normal vector field ξ, such that $\tilde{g}(h(X,Y),\xi) = g(A_\xi(X),Y)$, and $\nabla^\perp$ is the *connection in the normal bundle*.

The *mean curvature vector field* $\vec{H}$ is defined by $\vec{H} = \frac{1}{n} tr\, h$ and its length $\|\vec{H}\| = H$ is the extrinsic *mean curvature* of M^n in $\tilde{M}^{n+m}(c)$. A submanifold M^n in $\tilde{M}^{n+m}(c)$ is *totally geodesic* when $h = 0$, *totally umbilical* when $h = g\vec{H}$, *minimal* when $H = 0$ and *pseudo–umbilical* when $\vec{H}$ is an umbilical normal direction.

Let $\{E_1, \ldots, E_n, \xi_1, \ldots, \xi_m\}$ be any *adapted orthonormal* local frame field on the submanifold M^n in $\tilde{M}^{n+m}(c)$, denoted for short also as $\{E_i, \xi_\alpha\}$, whereby $i, j, \dots \in \{1, 2, \ldots, n\}$ and $\alpha, \beta, \dots \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

By the *equation of Gauss*, the $(0,4)$ *Riemann–Christoffel curvature tensor* of a submanifold M^n in $\tilde{M}^{n+m}(c)$ is given by $R(X,Y,Z,W) = \tilde{g}(h(Y,Z),h(X,W)) - \tilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)) + c\Big\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\Big\}$.

The $(0,2)$ *Ricci curvature tensor* of M^n is defined by $S(X,Y) = \sum_i R(X,E_i,E_i,Y)$ and the metrically corresponding $(1,1)$ tensor or *Ricci operator* will also be denoted by S: $g(S(X),Y) = S(X,Y)$. Since S is *symmetric*

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 53B20, 53B25, 53A07; Secondary: 53C42
Keywords. Wintgen ideal submanifolds, Casorati curvature, Ricci principal directions, Casorati principal directions.
Received: 26 April 2013; Accepted: 09 September 2013
Communicated by Ljubica Velimirović
The second named author supported by the project 174012 of the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development. The second and the fourth named authors thank the Center for Scientific Research of the Serbian Academy of Sciences and Arts and the University of Kragujevac for their partial support of their research done for this paper.
Email addresses: simona.decu@gmail.com (Simona Decu), mirapt@kg.ac.rs (Miroslava Petrović–Torgašev), aleksandar.sebekovic@ftn.kg.ac.rs (Aleksandar Šebeković), leopold.verstraelen@wis.kuleuven.be (Leopold Verstraelen)

Dedicated to Professor Radu Miron
on the occasion of his 85th birthday

ON THE ROTER TYPE OF WINTGEN IDEAL SUBMANIFOLDS

SIMONA DECU, MIROSLAVA PETROVIĆ-TORGAŠEV,
ALEKSANDAR ŠEBEKOVIĆ and LEOPOLD VERSTRAELEN

For all submanifolds M^n of all real space forms $\widetilde{M}^{n+m}(c)$ with constant sectional curvature c, for all dimensions $n \geq 2$ and for all co-dimensions $m \geq 1$, the so-called *Wintgen inequality* asserts that $\rho \leq H^2 - \rho^{\perp} + c$, whereby ρ is the *normalised scalar curvature* of the Riemannian manifold M (which is an intrinsic invariant), and whereby H^2 and $\rho^{\perp}$, are the *squared mean curvature* and the *normalised normal scalar curvature* of M in the ambient space $\widetilde{M}$, respectively (which are extrinsic invariants), and submanifolds M which satisfy the equality in this optimal general "soft" inequality are called *Wintgen ideal submanifolds* of $\widetilde{M}$; cf. [1]–[11]. For Wintgen ideal submanifolds M of real space forms $\widetilde{M}$, in the present article (in Sections 3 and 4), we will show some properties concerning their *Deszcz symmetry* and their *Roter type*, herewith finalising (and in the instance of $n \geq 4$ and $m \geq 3$ amending) some results on which was reported before in [12]–[15]. The geometrical notions involved being, at least in our opinion, rather basic and also rather young, an attempt is made to present these notions with some care (in Sections 1 and 2).

AMS 2010 Subject Classification: 53B20, 53B25.

Key words: Wintgen ideal submanifolds, Deszcz spaces, Roter spaces.

1. ON RIEMANNIAN SPACES [16]–[19]

Let M^n be an n-dimensional *Riemannian manifold* with (positive definite) *metric* $(0, 2)$ *tensor* g. Let R denote the $(0, 4)$ *Riemann–Christoffel curvature tensor* and S the $(0, 2)$ *Ricci tensor* of M. Since S is symmetric, (i) all its eigenvalues are real: the *Ricci curvatures* of M, and (ii) S determines on M an orthogonal set of eigendirections: the *Ricci principal directions*, or, still, the *intrinsic principal directions* of M. A Riemannian manifold with *constant sectional curvature* $K = c$ is called a *real space form* of curvature c; for $n \geq 3$, these spaces are characterised by the fact that $R = \frac{c}{2}\, g \wedge g$, whereby $\wedge$ denotes the *Kulkarni–Nomizu* product (for symmetric $(0, 2)$ tensors t_1 and t_2: $(t_1 \wedge t_2)(X, Y, Z, W) = t_1(X, W)\, t_2(Y, Z) + t_1(Y, Z)\, t_2(X, W) -$

TAMKANG JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 41, Number 2, 109-116, Summer 2010

ON THE INTRINSIC DESZCZ SYMMETRIES AND THE EXTRINSIC CHEN CHARACTER OF WINTGEN IDEAL SUBMANIFOLDS

S. DECU, M. PETROVIĆ–TORGAŠEV, A. ŠEBEKOVIĆ AND L. VERSTRAELEN

Abstract. In this paper it is shown that all *Wintgen ideal submanifolds* in ambient real space forms are *Chen submanifolds*. It is also shown that the Wintgen ideal submanifolds of dimension > 3 in real space forms do intrinsically enjoy some *curvature symmetries in the sense of Deszcz of their Riemann–Christoffel curvature tensor, of their Ricci curvature tensor and of their Weyl conformal curvature tensor*.

1. Wintgen ideal submanifolds

Let M^n be an $n-$dimensional Riemannian submanifold of an $(n+m)$–dimensional real space form $\tilde{M}^{n+m}(c)$ of curvature c, $(n \geq 2, m \geq 1)$. Let g and ∇, and, respectively, $\tilde{g}$ and $\tilde{\nabla}$, denote the *Riemannian metrics* and the corresponding *Levi–Civita connections* of M^n and of $\tilde{M}^{n+m}(c)$. The *formulae of Gauss and Weingarten* are then given by

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{1}$$

and

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi, \tag{2}$$

whereby h, A_ξ and $\nabla^\perp$ denote the *second fundamental form*, the *shape operator* or *Weingarten map* with respect to ξ and the *normal connection* of M^n in $\tilde{M}^{n+m}(c)$, respectively, $(X, Y$, etc. stand for *tangent vector fields* and ξ etc. for *normal vector fields* on M^n in $\tilde{M}^{n+m}(c))$. From (1) and (2) it follows that

$$\tilde{g}(h(X,Y),\xi) = g(A_\xi(X),Y), \tag{3}$$

Corresponding author: M. Petrović–Torgašev.
Received April 12, 2009.
2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 53B25, Secondary 53C42.
Key words and phrases. Submanifolds, Wintgen ideal submanifolds, Chen submanifolds, Deszcz symmetric manifolds.
S. Decu and A. Šebeković were partially supported by the Simon Stevin Institute for Geometry. L. Verstraelen was partially supported by the Research Foundation - Flanders project G.0432.07

ОБРАЗАЦ 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Александар Шебековић

број уписа Унутрашње и спољашње симетрије у Римановој геометрији

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Крагујевцу, 30.06.2016.

ОБРАЗАЦ 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора АЛЕКСАНДАР ШЕБЕКОВИЋ

Број уписа __________

Студијски програм МАТЕМАТИКА (ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ГЕОМЕТРИЈА)

Наслов рада УНТРАШЊЕ И СПОЉАШЊЕ СИМЕТРИЈЕ У РИМАНОВОЈ ГЕОМЕТРИЈИ

Ментор ПРОФ. ДР МИРОСЛАВА ПЕТРОВИЋ - ТОРГАШЕВ

Потписани АЛЕКСАНДАР ШЕБЕКОВИЋ

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Крагујевцу.

Потпис аутора

У Крагујевцу, 30.06.2016.

А Шебековић

ОБРАЗАЦ 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Крагујевцу унесе моју докторску дисертацију под насловом:

УНУТРАШЊЕ И СПОЉАШЊЕ СИМЕТРИЈЕ У РИМАНОВОЈ ГЕОМЕТРИЈИ

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Крагујевцу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, чији је кратак опис дат је на обрасцу број 4.).

Потпис аутора

У Крагујевцу, 30.06.2016.