УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПЕДАГОШКИ ФАКУЛТЕТ У УЖИЦУ

Милан П. Миликић

ЕФЕКТИ ПРИМЕНЕ СОФТВЕРСКОГ ПАКЕТА GEOGEBRA НА САДРЖАЈИМА ГЕОМЕТРИЈЕ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

докторска дисертација

Ужице, 2023

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF EDUCATION IN UŽICE

Milan P. Milikić

THE EFFECTS OF THE USE OF THE GEOGEBRA SOFTWARE ON GEOMETRY CONTENTS IN INITIAL MATHEMATICS EDUCATION

Doctoral Dissertation

Užice, 2023

Аутор

Име и презиме: Милан Миликић

Датум и место рођења: 8. 8. 1988. године, Крагујевац

Садашње запослење: Универзитет у Крагујевцу, Факултет педагошких наука у Јагодини

Докторска дисертација

Наслов: Ефекти примене софтверског пакета GeoGebra на садржајима геометрије у почетној настави математике

Број страница: X + 381

Број слика: 82, графикона: 13, табела: 68

Број библиографских података: 300

Установа и место где је рад израђен: Педагошки факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу

Научна област (УДК): 371.3

Ментор: Др Сања Маричић, редовни професор за ужу научну област *Методика наставе математике*, Педагошки факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу

Оцена и обрана

Датум пријаве теме: 6. 2. 2020. године

Број одлуке и датум прихватања теме докторске/уметничке дисертације:
IV-02-597/19 од 9. 9. 2020. године

Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:

1. Др Ненад Вуловић, доцент за ужу научну област *Методика наставе математике*, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина
2. Др Оливера Ђокић, ванредни професор за ужу научну област *Методика наставе математике*, Учитељски факултет у Београду, Универзитет у Београду
3. Др Оливера Марковић, доцент за ужу научну област *Математика са методиком*, Педагошки факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу

Комисија за оцену и одбрану докторске/уметничке дисертације:

Датум одбране дисертације:

Author

Name and surname: Milan Milikić

Date and place of birth: August 8, 1988, Kragujevac

Current employment: Faculty of Education University of Kragujevac, Jagodina

Doctoral Dissertation

Title: The Effects of the Use of the GeoGebra Software on Geometry Content in Initial Mathematics Education

No. of pages: X + 381

No. of images: 82, charts: 13, tables: 68

No. of bibliographic data: 300

Institution and place of work: Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac

Scientific area (UDK): 371.3

Mentor: PhD Sanja Maričić, Full Professor for a narrow scientific field *Methodology of teaching mathematics*, Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac

Grade and Dissertation Defense

Topic Application Date: February 6, 2020

Decision number and date of acceptance of the doctoral / artistic dissertation topic:
IV-02-597/19 of September 9, 2020

Commission for evaluation of the scientific merit of the topic and the eligibility of the candidate:

1. PhD Nenad Vulović, Assistant Professor for a narrow scientific field *Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Education in Jagodina, University of Kragujevac
2. PhD Olivera Đokić, Associate Professor for a narrow scientific field *Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Teacher Education in Belgrade, University of Belgrade
3. PhD Olivera Marković, Assistant Professor for a narrow scientific field *Mathematics with Methodology*, Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac

Commission for evaluation and defense of doctoral / artistic dissertation:

Date of Dissertation Defense:

Искористио бих прилику да изразим захвалност свима који су допринели изради ове докторске дисертације.

Пре свега, захвалио бих на огромној подршци, разумевању и стрпљењу мојој породици, родитељима Петку и Милијани, супрузи Слађани и сину Димитрију.

Посебну захвалност за помоћ, добронамерне савете и сугестије приликом рада на докторској дисертацији дугујем менторки, проф. др Сањи Маричић.

Захваљујем члановима Комисије, поштованим професорима, на коментарима и веома корисним саветима како да унапредим рукопис дисертације и са успехом приведем крају њено писање.

Захвалио бих и свим учесницима истраживања, директорима, стручним службама, учитељима и ученицима школа у којима је реализовано истраживање.

Захваљујем колегиници Марији Ђорђевић која је извршила лектуру рукописа дисертације и колеги Владану Димитријевићу за помоћ приликом техничког уређивања текста дисертације.

Милан Миликић

У Крагујевцу, фебруара 2023.

ЕФЕКТИ ПРИМЕНЕ СОФТВЕРСКОГ ПАКЕТА GEOGEBRA НА САДРЖАЈИМА ГЕОМЕТРИЈЕ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Апстракт

Предмет рада јесте испитивање ефеката примене софтверског пакета *GeoGebra* у учењу садржаја геометрије у четвртом разреду основне школе на побољшање образовних постигнућа ученика, трајност знања, мотивацију ученика за учење и испитивање ставова ученика и учитеља о пакету *GeoGebra*. У теоријском делу рада представљене су карактеристике софтверског пакета, предности и ограничења његове употребе приликом учења геометрије, као и специфичности геометријског мишљења ученика млађих разреда основне школе. Приказане су могућности примене софтверског пакета приликом увођења појма геометријске фигуре у равни и простору, као и допринос пакета *GeoGebra* визуелизацији поменутих појмова.

Циљ експерименталног дела био је да се утврде и истраже ефекти посебно осмишљеног модела учења на побољшање нивоа образовних постигнућа ученика, трајност на тај начин стечених знања и да се испитају ставови и мишљења ученика и учитеља о учењу геометрије применом софтвера *GeoGebra*. Резултати добијени истраживањем указују на то да реализација наставе геометрије уз употребу софтверског пакета остварује позитивне ефекте на постигнућа ученика на сва три нивоа образовних постигнућа, доприноси повећању трајности знања и утиче на формирање позитивнијих ставова ученика према геометрији и настави математике уопште.

Добијени резултати показали су да примена софтвера *GeoGebra* помаже ученицима млађих разреда основне школе да лакше визуелизују геометријске појмове. У динамичном *GeoGebra* окружењу ученици имају могућност манипулисања објектима, што им омогућава свеобухватније сагледавање геометријских фигура, при чему ова карактеристика софтвера посебно долази до изражаја када су у питању геометријске фигуре у простору.

Кључне речи: геометрија, образовни софтвер, *GeoGebra,* визуелизација, очигледност, постигнућа ученика, трајност знања, почетна настава математике.

THE EFFECTS OF THE USE OF THE GEOGEBRA SOFTWARE ON GEOMETRY CONTENTS IN INITIAL MATHEMATICS EDUCATION

Abstract

The subject of the dissertation is the examination of the effects of implementing *GeoGebra* software package in teaching geometry contents in fourth grade of elementary school on improving students' academic achievements, durability of their knowledge, their motivation for learning, as well as the examination of both students' and teachers' attitudes towards the *GeoGebra* package. The theoretical part of the paper presents the features of the software package, the advantages and limitations of its use in learning geometry, as well as the specifics of the geometric thinking of junior elementary school students. The possibilities of applying the software package in introducing the concept of plane and space geometric figures are presented, together with the contribution of *GeoGebra* to students' ability to visualize the concepts.

The aim of the experimental part was to investigate the effects of a specially designed learning model on improving the level of educational achievements of students, the durability of knowledge acquired in this way, and to examine the attitudes of students and teachers towards learning geometry with the use of *GeoGebra* software. The research results indicate that teaching geometry with the use of the software package has positive effects on students' achievements at all three levels of educational achievements, contributes to increasing the durability of their knowledge and affects the formation of more positive attitudes of students towards geometry and mathematics in general.

The results showed that the application of the *GeoGebra* software helps junior elementary school students visualize space geometric figures more easily. In the dynamic *GeoGebra* environment, students have the possibility to manipulate objects, which enables them to better understand geometric figures, especially when it comes to space geometric figures.

Keywords: geometry, educational software, *GeoGebra*, visualization, obviousness, student achievement, durability of knowledge, initial mathematics education.

САДРЖАЈ

УВОД 1

I ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИСТРАЖИВАЊА 5

1. Софтверски пакет *GeoGebra* 6

1.1. Образовни софтвер – појмовно одређење, настанак, развој и примена у настави ... 6

1.2. Системи рачунарске алгебре 9

1.3. Системи динамичке геометрије 12

1.4. Софтверски пакет *GeoGebra* – настанак и развој 17

1.5. Садржај и карактеристике пакета *GeoGebra* 19

1.5.1. Карактеристике *GeoGebra* алата намењених раду са објектима у равни 26

1.5.2. Изглед радног окружења и карактеристике *GeoGebra* алата намењених раду са тродимензионалним објектима 37

2. Геометрија у почетној настави математике 41

2.1. Кратка историја геометрије од почетака до научних заснивања 43

2.2. Садржаји и исходи наставе геометрије у почетној настави математике 51

2.3. Постигнућа ученика из геометрије на националним и међународним тестирањима 58

2.4. Теоријска заснованост учења геометрије у почетној настави математике 65

2.5. Очигледност и визуелизација – императиви у учењу геометрије у почетној настави математике 76

3. Софтверски пакет *GeoGebra* и учење геометријеу млађим разредима основне школе .. 82

3.1. *GeoGebra* – алат који обезбеђује визуелизацију у учењу геометрије 86

3.2. Примена софтверског пакета *GeoGebra* у учењу геометрије 88

3.3. Примена *GeoGebra* пакета у увођењу појма линије, тачке и угла 90

3.4. Модели примене *GeoGebra* пакета у увођењу појма геометријске фигуре и мерења површине фигуре 97

3.5. Модели примене *GeoGebra* пакета у увођењу појма геометријског тела и мерења површине тела 116

3.6. Потенцијална ограничења примене *GeoGebra* софтвера у учењу геометрије на млађем школском узрасту 128

4. Преглед досадашњих истраживања 130

II МЕТОДОЛОШКЕ ОСНОВЕ ИСТРАЖИВАЊА 142

1. Проблем и предмет истраживања 143

2. Циљ и задаци истраживања 146

3. Хипотезе истраживања 147

4. Варијабле истраживања 147

5. Узорак истраживања 148

6. Методе, технике и инструменти истраживања 150

7. Метријске карактеристике инструмената истраживања 155

8. Организација и реализација истраживања 158

9. Статистичка обрада података 161

III АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА 162

1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у почетној настави математике 163

1.1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије према нивоима образовних постигнућа 168

1.1.1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика на основном нивоу 168

1.1.2. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика на средњем нивоу 175

1.1.3. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика на напредном нивоу 181

1.2. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у зависности од пола 188

1.3. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у зависности од оцене из математике 191

1.4. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у зависности од општег успеха 195

2. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика у почетној настави математике 199

2.1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика према нивоима образовних постигнућа ... 204

2.1.1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика на основном нивоу постигнућа ... 204

2.1.2. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика на средњем нивоу постигнућа ... 209

2.1.3. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика на напредном нивоу постигнућа ... 213

3. Утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на ставове и мишљења ученика о математици ... 220

3.1. Утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на ставове ученика према математици као наставном предмету ... 220

3.2. Утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на мишљења ученика о учењу математике ... 227

4. Ставови ученика о учењу геометрије применом софтверског пакета *GeoGebra* ... 233

5. Мишљења учитеља о софтверском пакету *GeoGebra* ... 238

ЗАКЉУЧАК И МЕТОДИЧКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ ... 242

ЛИТЕРАТУРА ... 250

ПРИЛОЗИ ... 269

ПРИЛОГ 1. ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ ЗНАЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ... 270

ПРИЛОГ 2. ФИНАЛНИ ТЕСТ ЗНАЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ... 273

ПРИЛОГ 3. РЕТЕСТ ЗНАЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ... 276

ПРИЛОГ 4. СКАЛА СТАВОВА УЧЕНИКА ПРЕМА МАТЕМАТИЦИ КАО НАСТАВНОМ ПРЕДМЕТУ ... 279

ПРИЛОГ 5. СКАЛА СТАВОВА УЧЕНИКА О УЧЕЊУ ГЕОМЕТРИЈЕ ПРИМЕНОМ СОФТВЕРСКОГ ПАКЕТА *GEOGEBRA* ... 280

ПРИЛОГ 6. АНКЕТНИ УПИТНИК ЗА УЧЕНИКЕ ... 281

ПРИЛОГ 7. КВАЛИТАТИВНИ ИНТЕРВЈУ ЗА УЧИТЕЉЕ ... 283

ПРИЛОГ 8. ВЕЖБЕ У ОКВИРУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ПРОГРАМА ... 284

ПРИЛОГ 9, 10, 11, 12. СТАТИСТИЧКА ИЗРАЧУНАВАЊА ... 370

УВОД

Почев од првих организованих облика поучавања па све до савремених приступа настави, константна је тежња за осмишљавањем ефикаснијих наставних метода и поступака. Са променама парадигме наставе ти поступци временом су заузимали значајно место у наставном процесу или су били одбачени и замењени новим. Таква стална потреба за иновирањем није довела до решавања свих проблема, неки су и даље отворени, привлаче пажњу истраживача и чине основ за нове студије. Уз то, временом није само настава трпела промене, упоредо је долазило до транзиција и у другим областима друштвеног живота. Техника и технологија су се развијале и усавршавале, те су их почели укључивати у образовне процесе. Зато се данас с правом поставља питање *Треба ли поучавати и учити на исти начин као пре развоја технологије?*

Уважавајући ниво когнитивног развоја ученика, наставни приступ у почетној настави математике заснива се на примени очигледних наставних средстава. Будући да на основу искуствено више пута потврђене претпоставке до општих закључака долазе индуктивним путем, ученици се у великој мери ослањају на непосредно опажање. Такво, непосредно опажање, није довољно да се уоче сви односи и законитости који постоје, те је неопходно оперисање искуственим информацијама састављеним од опажаја, представа о појму и самог појма. За тако нешто није довољно сазнање путем перцепција, већ очигледност која обухвата представе маште и сећања, односно дедуктивно закључивање засновано на уопштеним искуствима и претходно стеченим знањима. Овакву очигледност није могуће обезбедити искључиво употребом традиционалних модела и управо зато јавља се потреба за иновирањем наставе имплементацијом савремених технологија.

Задатак наставе математике која се реализује у прва четири разреда основне школе јесте да ученици стекну знања неопходна за разумевање односа и законитости у разним појавама у природи и друштву и остварују се на садржајима прописаним одговарајућим програмима наставе и учења. Ту се првенствено мисли на садржаје из области аритметике, алгебре, геометрије и мерења и мера. Због својих специфичности, сваку од поменутих области карактерише одговарајући методички приступ, који треба да обезбеди да ученици на најбољи могући начин овладају садржајима који су њима обухваћени. У овом раду посебно ћемо се фокусирати на процес учења у области геометрије, а опредељење за бављење овом темом подстакнуто је потребом за откривањем линије резоновања и испитивањем утицаја геометријског резоновања на развијање мишљења ученика.

Студије широм света указују на низ проблема са којима се ученици сусрећу у раду са садржајима геометрије (Adelabu, Makgato, Ramaligela, 2019; Gal, Linchevski, 2010; Глејзер, 1996; Ismail, Rahman, 2017; Kösa, Karakuş, 2010; Murni, Sariyasa, Ardana, 2017). Како би се превазишле ове препреке, потребно је сагледати узроке који до њих доводе, покушати их умањити, и ако је могуће у потпуности уклонити њихов утицај. С тим у вези, велики број истраживања бави се проблемима усвајања садржаја геометрије, развоја геометријских појмова и примене стечених знања. Неки од најчешће истицаних проблема односе се на немогућност адекватног графичког приказа, немогућност праћења промена насталих трансформацијом геометријских објеката и на саму апстрактну природу појмова из геометрије.

Потврду глобалног постојања потешкоћа при усвајању садржаја геометрије можемо пронаћи и у нашем образовном систему. Она је исказана кроз резултате које ученици из Републике Србије остварују како на националним, тако и на међународним тестирањима (TIMSS, PISA). Ако се упореде, постигнућа ученика четвртог разреда основне школе из Србије која се односе на садржаје геометрије знатно су нижа од постигнућа из других математичких области (Гашић-Павишић, Станковић, 2012; Kadijevich, Žakelj, Gutvajn, 2015; Марушић Јаблановић, Гутвајн, Јакшић, 2017; Mullis, Martin, Foy, Hooper, 2016). Разлог томе може се потражити у погледу организације и одговарајуће методичке трансформације садржаја геометрије. Премда наставу геометрије не би требало свести искључиво на увођење појмова, већ на побољшавање учениковог просторног резоновања, унапређивање искустава мерења дужине, површине, запремине (Ђокић, 2013), резултати сведоче да у пракси није тако.

За постизање жељених резултата приликом учења садржаја геометрије потребно је добро познавање карактеристика мишљења ученика и на бази таквог сагледавања пажњу усмерити на изналажење начина унапређивања процеса учења у настави геометрије, обезбеђивања потпоре у том учењу која ће резултирати формирањем јаснијих представа и формирањем геометријских појмова. У намери да објасне и идентификују потешкоће које се јављају код ученика приликом учења геометрије, бројне теорије за предмет имају управо развој геометријског мишљења. Будући да је у раду фокус на истраживању учења садржаја геометрије, представићемо теорије Ван Хилеа, Удемона и Кузниака, Дувала, за које налазимо да су од посебне важности за поимање значаја очигледности и визуелизације у развоју геометријских појмова (Duval, 1995, 1999, 2006; Ђокић, Зељић, 2017; Houdement, Kuzniak, 2003; Van Hiele, 1986). Све три теорије у својим хијерархијама когнитивних процеса као нулту тачку имају приказ, визуелизацију геометријских објеката. Било да се ради о материјалним објектима, линијама нацртаним на папиру или приказаним на екрану рачунара, заједничка улога им је да применом одговарајућих когнитивних процеса омогуће ученицима извођење исправних закључака.

Појава информационо-комуникационих технологија последњих деценија имала је за циљ да унапреди процес учења. Посебну вредност имају бројни образовни софтвери који су настали у ту сврху. Њихова вредност посебно долази до изражаја у замени статичних приказа објеката динамичним, чиме обезбеђују додатну очигледност и лакшу визуелизацију. У тој улози посебно се истиче софтверски пакет *GeoGebra*, развијен на Институту за дидактику природних наука Универзитета у Салцбургу 2001. године. Као софтвер који на једном месту обухвата геометрију, алгебру и анализу, *GeoGebra* садржи одлике система динамичке геометрије, али и система рачунарске алгебре. Као такав, од настанка па све до данас побуђује велику пажњу истраживача математичког образовања, а резултати бројних истраживања потврђују да својим потенцијалима доприноси настави математике од основне школе до универзитетског нивоа (Adelabu, Makgato, Ramaligela, 2019; Божић, 2019; Hohenwarter,Hohenwarter, Kreis, Lavicza, 2008; Kostić Kovačević, Gavrilović, 2011; Љајко, 2014; Žilinskienė, 2014; Yu, Tawfeeq, 2011).

Теоријске основе пакета *GeoGebra* почивају на учењу путем открића, а визуелна и симболичка својства пружају могућност једноставног манипулисања објектима и дају више простора за учење и експериментисање (AbuBakar, MohdAyub, Tarmizi, 2010; Diković, 2009; Herceg, Herceg-Mandić, 2013; Kay, Kwak, 2018; Murni, Sariyasa, Ardana, 2017; Станковић, Јордановић, Јанковић, 2015; Tran, Nguyen, Bui, Phan, 2014). Софтвер поседује графички, алгебарски и табеларни приказ, који су узајамно повезани и свака промена у оквиру једне репрезентације истовремено доводи до промене одговарајућег објекта у преосталим. Захваљујући оваквом, динамичном окружењу, класичан начин рада употребом лењира и шестара замењен је проблемски оријентисаном наставом у којој се ученици налазе у позицији да уче путем експеримента разматрајући више потенцијалних решења пре доношења коначног закључка.

Софтверски пакет *GeoGebra* пружа могућност рада са тродимензионалним објектима, али се са успехом може применити и у другим областима математике. Знатно продубљује разумевање појма рационалног броја (Bulut, Ünlütürk Akçakin, Kaya, 2016; Lee, Boyadzhiev, 2013; Миликић, Вуловић, Михајловић, 2020; Thambi, Eu, 2013), затим функције (Božić, Takači, Stankov, 2019; Diković, 2009; Mudaly, Fletcher, 2019; Mushipe, Ogbonnaya, 2019), а новије верзије садрже и статистичку обраду и анализу података (Phan-Yamada, Man, 2018; Prodromou, 2014). Потврђено позитивно делује и на оне аспекте наставе математике који се не односе на сам садржај, већ и на мотивацију за учење, доприноси постизању виших нивоа мишљења, стварању позитивних ставова према настави и већем самопоуздању ученика.

Прегледом релевантне литературе и анализом теоријских система и резултата истраживања аутора који су као фокус интересовања имали *GeoGebra* софтвер, утврдили смо да његова имплементација у настави математике има значајан утицај на резултате у погледу остваривања бољих исхода учења и трајности знања. Међутим, запазили смо да на територији Републике Србије готово да нема истраживања која су као предмет имала подручје примене софтверског пакета *GeoGebra* у почетној настави математике. Резултати таквих истраживања могли би открити да ли примена *GeoGebra* пакета доприноси стварању позитивних ефеката наставе геометрије у млађим разредима основне школе и на који начин утиче на процесе поучавања и учења. Разлози због којих су истраживања ефеката примене *GeoGebra* софтвера у почетној настави математике потребна налазимо у малој заступљености образовних софтвера у основношколској математици, резултатима наших ученика на међународним тестирањима који су у домену геометрије нижи од просечних вредности у осталим доменима, недостатку адекватних очигледних наставних средстава која би обезбедила бољу визуелизацију геометријских појмова, неинформисаности учитеља о оваквом начину рада, као и недостатку компетенција за реализацију софтверски потпомогнуте наставе.

У домаћој литератури недостају подаци о заступљености учења геометрије уз употребу софтвера *GeoGebra* у млађим разредима основне школе, као и разлози због којих овакав вид учења изостаје. То изненађује будући да *Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања* (2019) сугерише употребу ИКТ-а, са посебним акцентом на примену *GeoGebra* софтвера за развијање основних геометријских концепата. Осим пар истраживања која су се бавила ставовима учитеља и наставника математике у Републици Србији (Budinski, 2013; Миликић, Вуловић, Михајловић, 2020), готово да не познајемо ни ставове ученика и учитеља о примени *GeoGebra* софтвера у млађим разредима основне школе.

Оно што нас је посебно инспирисало да се определимо за проблем истраживања ефеката примене *GeoGebra* софтвера на садржајима геометрије у почетној настави математике јесте вишеструко потврђен позитиван утицај софтвера у европском и светском образовном простору (Akanmu, 2016; Belgheis, Kamalludeen, 2018; Bhagat, Chang, 2015; Boo, Eu, 2016; İbili, 2019; Kaya, Akçakin, Bulut, 2013; Martinovski, Martinovski, 2013; Mukiri, 2016; Tolić, Jukić, Josipović, 2015; Triwahyuningtyas, Rahayu, Agustin, 2019; Tutkun, Ozturk, 2013; Shadaan, Eu, 2013; Zakaria, Lee, 2012; Zulnaidi, Zakaria, 2012). Стога налазимо за сходно да испитамо утицај софтвером потпомогнуте наставе на процес усвајања садржаја геометрије, трајност тако усвојених знања и ставове и мишљења ученика и учитеља о предностима и могућим ограничењима овако организоване наставе.

Садржај докторске дисертације чине три целине. Прва целина односи се на теоријске основе истраживања и чине је четири дела. Први део односи се на ИКТ. Дат је преглед најчешће коришћених образовних софтвера и њихових основних карактеристика, предности и ограничења, док је посебан акценат стављен на софтверски пакет *GeoGebra*. Описан је изглед корисничког интерфејса и начин рада у овом пакету, објашњени алати и функције којима располаже. У другом делу описана је улога и значај геометрије за математичко образовање. Приказан је историјски преглед развоја геометрије од времена првих цивилизација до геометрије двадесетог века, заступљеност садржаја геометрије у програмима математике за први циклус основног образовања и постигнућа ученика из геометрије остварена на националним и међународним тестирањима. Приказани су образовни стандарди постигнућа који се односе на садржаје геометрије и материјализовани кроз исходе учења за сваки разред понаособ. У другом делу посебно су издвојене теорије које као важан аспект у развоју геометријског мишљења ученика узимају очигледност и визуелизацију за формирање геометријских појмова. У трећем делу описана је улога софтверског пакета *GeoGebra* у учењу геометрије са посебним акцентом на динамичном приказу и визуелизацији којој доприноси. Представљене су могућности за увођење основних геометријских појмова у динамичном окружењу софтвера. У последњем, четвртом делу, размотрена су претходно спроведена истраживања ефеката примене *GeoGebra* у циљу побољшања образовних постигнућа у настави математике, те ставова и мишљења ученика, учитеља и наставника математике према могућностима укључивања софтвера у наставни процес.

Другу целину чине методолошке основе истраживања са детаљно представљеним и описаним свим елементима истраживања организованим и реализованим са циљем утврђивања ефеката примене *GeoGebra* софтвера на образовна постигнућа ученика, трајност знања о садржајима геометрије и ставове и мишљења ученика и учитеља о математици и софтверском пакету *GeoGebra*. У овом делу извршена је операционализација свих задатака и хипотеза и представљени садржаји предвиђени наставним програмом који су обухваћени експерименталним истраживањем. Детаљно су приказане све методе, технике, инструменти истраживања и фазе у којима су примењени.

У трећој целини анализирани су и интерпретирани резултати добијени експерименталним истраживањем утицаја софтверског пакета *GeoGebra* на: образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије (укупно и по нивоима); трајност стечених знања (укупно и по нивоима); ставове и мишљења ученика о математици; ставове ученика о учењу геометрије уз примену софтвера; мишљења учитеља о могућностима примене софтвера у настави математике.

У закључку је извршена синтеза постојећих теоријских сазнања са резултатима добијеним истраживањем, на основу чега су дати предлози за методичку импликацију и будућа истраживања. Представљене су препоруке свим учесницима процеса образовања у циљу даљег иновирања наставе геометрије, математике и наставе уопште.

I ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИСТРАЖИВАЊА

1. Софтверски пакет *GeoGebra*

Информационо-комуникационе технологије (ИКТ) и образовни софтвери представљају важан алат у настави. Данас је њихова употреба све већа, а тиме и њихова улога у процесу наставе и учења захтева дубље сагледавање свих аспеката њихове примене. Са развојем ИКТ и њихове примене расте и развој образовних софтвера с циљем да они остваре што бољу улогу у процесу наставе и учења. Пажња у овом раду усмерена је на софтверски пакет *GeoGebra* и сагледавање његове примене у учењу у настави математике. У циљу препознавања могућности примене пакета *GeoGebra* сагледаћемо најпре појмовно одређење појма ’образовни софтвер’, његов настанак и развој, како бисмо свеобухватније сагледали и софтвер *GeoGebra*.

1.1. Образовни софтвер – појмовно одређење, настанак, развој и примена у настави

Под појмом ’софтвер у образовном систему’ или ’образовни софтвер’ подразумева се мноштво рачунарских програма који се непосредно или посредно могу користити у планирању, организацији, припреми и реализацији наставе и учења. Надрљански појам образовног софтвера везује за интелектуалну технологију у области образовања, под којим обухвата програмске језике и алате, одређену организацију наставе и учења заснованих на логици и педагогији (Nadrljanski, 2000). Слично појмовно одређење можемо пронаћи и код страних аутора. Буклајтнер под образовним софтвером подразумева готове компјутерске програме за коришћење у оквиру наставе (Buckleitner, 1999), док Ли са својим сарадницима област примене образовног софтвера проширује и на подстицање индивидуалних фаза учења (NgLee, Kamariah, Samsilah, WongandPetri, 2005). Једном речју, образовни софтвер представља својеврсни алат за учење, истраживање и експериментисање ученика (Majherová, Palásthy, Gunčaga, 2014). Непосредно, користи се у учионицама, а нарочито његова могућност визуелизације олакшава процесе формирања апстрактних појмова, решавања проблема, појава и слично.

Појава првих верзија образовних софтвера намењених настави везује се за половину двадесетог века. Шездесетих година прошлог века пројектовано је неколико рачунарски подржаних система дизајнираних тако да повећају постигнућа ученика (Namestovski, 2013). Принцип рада ових програма састојао се у постављању проблема, снимању одговора и табеларног извођења задатка. Функционисали су тако што нису одређивали начин учења корисника, већ су се базирали на претпоставци да уколико систем презентује део садржаја који треба бити научен, ученик ће га запамтити. Деведесетих година XX века дошло је до појаве великог броја образовних софтвера чији се највећи недостатак огледао у томе што су били затвореног типа и није постојала могућност модификације делова софтвера и њиховог прилагођавања потребама корисника. Са друге стране, имали су могућност да ученика „воде” кроз процес учења, идентификују критичне тачке у знању и коригују грешке.

Последње деценије генерисан је велики број софтверских производа које је могуће диференцирати према различитим критеријумима (намени, власништву, технолошким карактеристикама). Са аспекта намене, могу бити: основни алати са широком применом, специјализовани алати са применом у образовању или наменски дизајнирани образовни софтверски производи (*Смернице за унапређивање улоге ИКТ у образовању*, 2013). Када је о власништву реч, софтвери отвореног кода (*Open Source Software*) дозвољавају коришћење без надокнаде, као и могућност модификације. Бесплатни су, лако доступни и широко распрострањени. Софтвере отвореног кода могуће је модификовати и слободно користити неки део софтвера чиме је омогућено да корисници, у зависности од сопствених потреба, прилагоде производ или на основама постојећег развију нов образовни софтвер.

Три су различита схватања образовних софтвера. Могу се посматрати као алати дизајнирани са акцентом на учење, чији је главни циљ утицај на когнитивну страну мишљења ученика. Дизајн оваквих софтвера почива на некој од постојећих теорија учења (бихејвиоризам, конструктивизам, когнитивизам) и садржи елементе стратегије учења. Могу се посматрати са аспекта поучавања, односно као алати намењени првенствено онима који поучавају (Hinostroza, Rehbein, Mellar, Preston, 2000), замишљени тако да представљају помоћно средство учитељима у учионици и тиме истичу њихову активност у процесу наставе. При оваквом схватању, централно место учења представља учионица, док интеракција ученика са софтвером изостаје. Образовни софтвери сматрају се погодним уколико омогућавају учитељу да, користећи их, лакше извршава задатке које иначе обавља, не бавећи се развијањем нових стратегија за долажење до решења. Према трећем одређењу, образовни софтвери сврставају се, једном речју, у материјал за наставу. Могу бити коришћени и од стране ученика и од стране учитеља, односно представљају ресурс који потпомаже процесе учења и/или поучавања омогућавајући лакшу репрезентацију наставног садржаја.

Бројне су могућности које образовни софтвери нуде процесу образовања, а ту посебно треба истаћи примену у настави. Њихова примена постаје неизбежна димензија школе, учења и поучавања свих наставних предмета, између осталог и оног који је у нашем у фокусу – математике. Ови алати играју важну улогу када је образовање у питању, а у оквиру наставе математике њихова примена се огледа како у школским тако и у ваншколским активностима. Представљају погодна, ефикасна средства за модернизацију и математичког и образовања уопште. На темељима модернизације математичког образовања, Гунчага и Мајхерова истичу неке од разлога за имплементацију ИКТ и образовних софтвера у наставу математике са циљем промене парадигме поучавања и учења. Као један од главних разлога наводе вишеструке могућности образовних софтвера за подизање мотивације и радозналости ученика за развијање вештина решавања проблема. Са аспекта поучавања, могу утицати на побољшање ефикасности, затим стимулисати преиспитивање приступа учитеља настави и обезбедити више времена за праћење напредовања ученика. Даље, примену образовних софтвера виде управо као неизбежност (Gunčaga, Majherová, 2012). Будући да дигитализација наставних материјала бива све присутнија, многи математички садржаји, било да су намењени учитељима или ученицима, доступни су претежно у електронском облику. Трећи разлог неизоставне имплементације образовних софтвера у настави математике виде у сврставању математике као наставног предмета у групу предмета који се, између осталог, баве радом са информацијама.

Говорећи о очекивањима данашњих ученика, Жилински и Демирбилек сматрају да је пред учитељима изазов осавремењавања не само математичког садржаја којим се баве, већ и начина његове интерпретације (Žilinskienė, Demirbilek, 2015). У данашње време, када образовни софтвери представљају једно од многобројних средстава за поучавање и учење математике, учитељи су суочени са потешкоћом да већина њих није научила математику користећи поменуте алате, па је важно припремити их за поучавање уз коришћење технологија (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, Gravemeijer, 2010; Voogt, Fisser, Pareja Roblin, Tondeur, Van Braak, 2013). Стога, незаобилазан предуслов за интеграцију образовних софтвера у наставу математике јесте сама личност учитеља, његово знање, заинтересованост за усавршавање, жеља да часове учини бољим приближавајући их интересовању садашњих генерација ученика (Žilinskienė, Demirbilek, 2015).

Када је у питању настава математике, из мноштва софтвера доступних на тржишту посебно су се издвојила два облика софтвера који у одређеној мери поједностављују процесе поучавања и учења математичких садржаја. То су *системи динамичке геометрије* (*DGS* софтвери) и *системи рачунарске алгебре* (*CAS* софтвери) чија појава је умногоме променила приступ настави математике на свим нивоима (Kortenkamp, Fest, 2008; Pech, 2012). Оба поменута софтвера имају велики утицај на наставу математике, али се не може рећи да су међусобно повезани (Zengin, Furkan, Kutluca, 2012). Системи рачунарске алгебре најчешће се користе у манипулисању математичким формулама ради лакшег решавања сложених алгебарских задатака, док са друге стране *DGS* софтвери омогућавају ученицима да повезују математичке објекте и њихове графичке репрезентације. Коначно, софтверски пакет *GeoGebra*, који се налази у фокусу нашег истраживања, може се окарактерисати и као *CAS* и као *DGS* софтвер јер укључује и симболичка и визуелна својства која одликују поменуте системе. Због свега наведеног, налазимо да је за боље разумевање теоријских поставки на којима почива *GeoGebra* софтвер важно да се најпре одвојено упознамо са основама на којима почивају и *CAS* и *DGS* софтвери, са њиховим могућностима и евентуалним ограничењима која се јављају током њихове примене.

1.2. Системи рачунарске алгебре

Системи рачунарске алгебре омогућавају „нумерички и алгебарски рачун и геометријске представе алгебарских једначина” (Милановић, Такачи, 2012: 711). Оно што их разликује од традиционалних калкулатора јесте способност да једначине посматрају симболички, а не нумерички како је то случај са калкулаторима. Иако су различите верзије софтвера опремљене различитим опцијама, сврха алата остаје иста, а то је симболичко манипулисање једначинама. Поред поменутог извођења математичких операција, *CAS* алати веома често нуде и могућност графичког приказивања једначина као и програмирања специфичних алгоритама у складу са потребама корисника. Типични представници *CAS* алата јесу: *Reduce, Derive, Maple, Mathematica, MATLAB, Scientific WorkPlace, MuPAD* (Cohen, 2003; Glasnović Gracin, 2008; Harper, Wooff, Hodgkinson, 1991; Herceg, 2008; Majewski, 2007; Takači, Pešić, Tatar, 2003; Zengin, Furkan, Kutluca, 2012). Функционисање ових софтвера веома је слично, те је након овладавања начином коришћења једног од њих једноставно користити и остале. Поред тога што их одликује заједничка основа, сваки од поменутих софтверских пакета има своје специфичности.

Reduce је први *CAS* софтвер који се појавио (прва верзија појавила се давне 1967. године, а њен идејни творац био је Ентони Херн (Anthony C. Hearn)). Одликује га мали број функција, уз могућност да корисник на једноставан начин дефинише нове. Осмишљен као интерактивни систем, лако га је прилагодити специфичним потребама појединца додавањем нових типова података. Састављен је од низа команди, које се извршавају редоследом којим се уносе наредбе, док се резултат приказује пре уноса следеће наредбе.

Основе *Derive* софтвера садржане су у програму *Mu-Math* који се први пут појавио 1979. године, док је његов наследник *Derive* постао доступан 1988. године. Иако има мањи број опција и мању снагу, *Derive* је адекватан за употребу код почетника или професионалних корисника чије су потребе сконцентрисане на одређени број команди. Његова главна предност у односу на друге *CAS* алате је у томе што заузима мали део меморије рачунара, због чега је погодан за различите демонстрације и коришћење у процесу поучавања и учења. Приступ наредбама олакшан је употребом менија, а многе команде могу се изводити са два или три притиска тастера тастатуре. *Derive* користи сва правила алгебре, тригонометрије и аритметике за решавање бројних математичких задатака, чиме превазилази могућности традиционалних калкулатора. Такође, ваља напоменути да постоји могућност и 2D и 3D приказа графика функција.

Maple софтвер настао је 1980. године са циљем да се створи *CAS* алат који ће бити доступан како истраживачима, тако и за употребу у образовне сврхе. Опште је намене и дизајниран тако да га истовремено може користити више људи (Harper, Wooff, Hodgkinson, 1991). *Maple* може вршити како симболичке тако и нумеричке прорачуне, при чему је омогућен и 2D и 3D графички приказ. Поседује око 300 уграђених команди у виду функција и алгоритама за различита израчунавања (Janetzko, 2016), док су посебни пакети намењени корисницима за рад у области теорије група, линеарне алгебре, теорије бројева, статистике (Heck, 1996). У оквиру *Maple* софтвера могуће је анализирати израз или пак манипулисати одређеним деловима израза. Корисник може креирати наредбу за извршавање одређене операције, правила, а који иницијално нису дефинисани програмом. *Maple* је такође и програмски језик, а због одвајања корисничког интерфејса, уграђен је и у друге софтвере попут *MatLab* или *MathCad*, чиме је омогућено да симболичка функционалност програма буде доступна што већем броју корисника.

Софтверски пакет *Mathematica* настао је средином осамдесетих година двадесетог века као идеја Стивена Волфрама (Stephen Wolfram), а прва верзија јавности је представљена у лето 1988. године (Wolfram, 2003). Убрзо су се појавиле развијеније верзије, да би данашње верзије пакета (верзија 4.0 или новије) биле опремљене са преко 550 различитих наредби за извођење сложених израчунавања (Janetzko, 2016).

Док су шездесетих година прошлог века настали пакети за појединачно нумеричка, алгебарска, графичка и друга израчунавања, појава софтвера *Mathematica* учинила је да се сви поменути аспекти објединe у један систем. Његова примена огледа се у симболичком и нумеричком решавању проблема из разних области математике и других наука (физике, медицине, технологије). Осмишљен је тако да га подједнако могу користити инжењери и истраживачи за комплексне прорачуне, али и ђаци и студенти за решавање већ познатих проблемских ситуација (Stanimirović, Milovanović, 2002).

Најчешће истицана способност софтвера *Mathematica* јесте добро развијен графички приказ функција и могућност рада у оквиру алгебарске и графичке репрезентације истовремено (Божић, 2019). Рад са клизачима и задавање променљивих параметара чине пакет *Mathematica* манипулативним софтвером, с обзиром на то да је померањем клизача истовремено омогућено и праћење промена насталих у алгебарској и графичкој репрезентацији. Захваљујући језгру уз помоћ којег се обављају математичке операције, *Mathematica* функционише независно од рачунара на којем је инсталирана. Корисник поставља захтеве у радном простору, одакле се шаљу језгру на обраду, а затим се резултати враћају и приказују у радном простору.

Написан у програмском језику *Fortran* седамдесетих година, *MATLAB* (*Matrix Laboratory*) је представљен као једноставан калкулатор за израчунавање матрица, са уграђеном свега 71 наредбом и функцијом. Године 1984. *MATLAB* постаје комерцијални производ обогаћен додавањем корисничких функција, различитих алата и графика, док данашње верзије укључују скоро удвостручен број наредби, око сто педесет (Janetzko, 2016). Иницијално, очекивало се да основна примена софтвера *MATLAB* буде у учионици, а оно што га је чинило и чини га и данас адекватним за коришћење у настави јесу наредбе за различита израчунавања у области линеарне алгебре, нумеричке анализе, теорије матрица, статистике и другим (Moler, Little, 2020). Стога, може се рећи да *MATLAB* на једном месту интегрише нумеричке, симболичке и најсавременије могућности графичке репрезентације.

Позивајући се на бројна истраживањадругих аутора, Абдул Мајид и сарадници истичу примену пакета *MATLAB* у математичком образовању првенствено на универзитетском нивоу (Abdul Majid, Huneiti, Balachandran, Balarabe, 2013). Сматрају да *MATLAB* у знатној мери доприноси визуелизацији и графичком приказу математичких појмова, постигнућима, изградњи позитивних ставова и повећању мотивације за учење математичких садржаја. Даље, наводе да рад уз примену овог пакета подстиче развој способности решавања математичких проблема. Поред бројних предности, закључују да се „бројни фактори који утичу на примену образовних софтвера у настави и примену *MATLAB*-а првенствено уочавају као додатак класичној настави и учењу математике" (Abdul Majid et al., 2013: 41).

Scientific WorkPlace јесте још један од представника *CAS* алата. Настао 1994. године (Karlsson, 2006), дизајниран је да задовољи потребе широког круга корисника, почев од ученика – за решавање најједноставнијих линеарних једначина, до научника –

за извођење сложених математичких прорачуна (Hardy, Walker, 2005). *Scientific WorkPlace* има нумеричке и графичке могућности, што га чини погодним за рад са математичким садржајима, како на школском тако и на универзитетском нивоу. Омогућава кориснику унос једначина, креирање табела и матрица, импортовање графика, док новије верзије подржавају и 2D и 3D репрезентације објеката. Управо једноставност уноса података чини *Scientific WorkPlace* погодним за рад са ученицима и студентима, лако га прихватају и притом су концентрисани на решавање одговарајућег математичког проблема, а не на сам програмски пакет (Takači, Takači, 2008). Једноставна употреба у исто време помаже и наставницима у извођењу наставе, рад у овом пакету сличан је писању по табли, с тим што је визуелни приказ добијених објеката знатно бољи (Hardy, Walker, 2005; Takači, Herceg, Stojković, 2005).

MuPAD (*Multiprocessing Algebra Data Tool*) је програмски језик првобитно намењен за симболичку алгебру, чији је развој започео 1990. године на Универзитету Падерборн у Немачкој. Убрзо, *MuPAD* еволуира у универзални алат за различите нумеричке прорачуне, док је почетак двадесет првог века обележио развој овог пакета као дидактичког алата за коришћење у настави математике на разним нивоима образовања (Gehrs, Postel, 2003; Majewski, 2007). Герс и Постел наводе да *MuPAD* може бити од користи у школама и на факултетима као подршка и подстицај за продубљивање наставе математике. Пре свега, *MuPAD* обезбеђује висок квалитет дводимензионалне графичке репрезентације сложених математичких проблема кроз визуелизацију и интерактивну манипулацију (Gehrs, Postel, 2003).

Казимович и Гуверцин такође наводе важне могућности које *MuPAD* пружа (Kazimovich, Guvercin, 2012: 2):

1) *CAS* алат за симболичко манипулисање формулама;
2) омогућава нумеричку анализу;
3) садржи делове намењене раду у области линеарне алгебре, диференцијалних једначина, теорије бројева, статистике;
4) својом интерактивношћу подржава рад са анимацијама и 2D и 3D приказ објеката.

Мајевски тврди да је у свом развоју *MuPAD* прошао кроз важне промене које су битне са дидактичког аспекта. Он истиче две промене: „интелигентни” поступак цртања и флексибилни интерфејс (Majewski, 2007). Под „интелигентним” поступком цртања Мајевски сматра да је нов поступак мање формалан него код осталих алата. Користећи претходни концепт цртања било је потребно да се сваки од жељених објеката зада преко његових параметара, што са новим приступом није случај. Као другу важну промену истиче флексибилни интерфејс који корисник, заједно са траком са алатима, може прилагодити потребама рада у оквиру било које области математике (Majewski, 2007). Новије верзије *MuPAD* пакета садрже око 350 наредби, од којих су оне најчешће коришћене смештене у бочну траку (Janetzko, 2016). Међутим, ни најобимнији систем трака са алатима није довољно велики да обухвати све команде и параметре, па се може рећи да *CAS* алати којима се управља искључиво системом понуђених трака са већ дефинисаним наредбама јесу донекле ограничене функционалности.

1.3. Системи динамичке геометрије

С*истеми динамичке геометрије (DGS* софтвери*)* теоријску основу имају у теоријама когнитивног развоја. Користе у настави како би подстакли ученике да уче експериментисањем и путем открића, уз обезбеђивање потребних услова који се односе на визуелизацију математичких појмова. Примена *DGS* софтвера у складу је са теоријом конструктивизма у оквиру које ученик сопственом активношћу конструише, изграђује своје знање базирано на личном искуству. Овакав приступ настави укључује, пре свега, примену методе хеуристичког разговора и проблемску методу, које почивају на учењу откривањем (Милановић, Такачи, 2012). У оваквим активностима улога учитеља огледа се у одабиру окружења за учење, адаптацији садржаја и подстицају и усмеравању ученика на самостално откривање нових односа, појмова и законитости које владају у представљеном садржају.

Говорећи о *DGS* софтверима, Мариоти наводи да представљају револуционарна средства за развој геометријског резоновања (Mariotti, 2001). Подстичу вештине систематичног геометријског резоновања ученика, захтевајући од њих анализу начина цртања фигуре (Little, 2009). Њихов највећи допринос јесте на пољу визуелизације и динамичним конструкцијама у којима и после промене положаја геометријски објекти задржавају своја математичка својства и односе (Милановић, Такачи, 2012). Управо такво познавање крајњег исхода олакшава ученицима доказивање неке тврдње уместо да „тапкају у мраку без извесног исхода и без већ створене геометријске репрезентације" (Милановић, Такачи, 2012: 714).

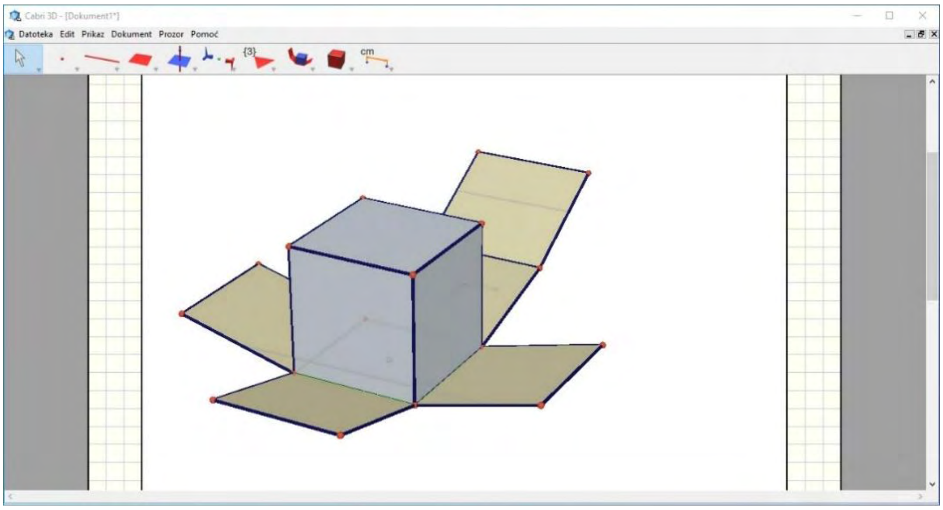
DGS софтвери подржавају вишеструке математичке приказе (графички, симболички, табеларни) и трансфер са једног математичког аспекта на други (Glasnović Gracin, 2008). Поменути софтвери „омогућавају ученицима да лако и смислено повезују различите репрезентације, што би било тешко оствариво, ако не и немогуће, без коришћења оваквих алата" (Bulut et al., 2016: 347). Гокче и Гунер истичу да *DGS* софтвери „промовишу конструисање знања у динамичном окружењу, олакшавају учење коришћењем анимација и визуелних материјала, позитивно утичу на постигнућа ученика из математике и формирање позитивног става према математици" (Gökçe, Güner, 2022: 5303). У прилог томе, закључци све већег броја истраживања указују на бенефите динамичких софтвера и сугеришу њихову примену у иницијалном математичком образовању (Bulut et al., 2016; Kay, Kwak, 2018; Thambi, Eu, 2013). Вредност *DGS* софтвера огледа се и у интерактивности, у могућности да корисник манипулише изабраним објектима, да им мења својства и изводи одређене изометријске трансформације (транслације, ротације, пресликавања). Шадан и Еу истичу значај ових алата јер уз њихову имплементацију ученици могу да конструишу и разумеју конструкције геометријских објеката, са циљем даљег повезивања са сродним појмовима" (Shadaan, Eu, 2013).

Наводимо неке од представника *DGS* софтвера: *Cabri*, *Logo*, *Euklides*, *Cinderella*, *Geometer's Sketchpad*, *Dynageo*, *GEONExT*, *Geometrix*, *GeoGebra*, *Zirkel und Lineal* (Adelabu, Makgato, Ramaligela, 2019; Guven, 2012; Doğan, Içel, 2011; Zengin, Furkan, Kutluca, 2012; İbili, 2019; Љајко, 2014; Patsiomitou, Emvalotis, 2010; Herceg, 2008). У наставку дајемо преглед основних карактеристика и области примене неких од поменутих софтвера.

Идеја о настанку *Cabri* софтвера, намењеног раду са геометријским објектима, настала је 1985. године на предлог Жан-Мари Лаборд (Jean-Marie Laborde) (Burgiel, 2000). *Cabri* пружа модел еуклидске геометрије са свим елементима и својствима (тачкама, линијама, круговима, симетралом угла, средиштем дужи и сл.) и почива на класичним геометријским конструкцијама (Kepceoğlu, 2018; Kordaki, Balomenou, 2006; Mariotti, 2001). Сваки модел фигуре представљен у софтверу јесте резултат процеса конструкције, добијен након коначног броја корака. Такође, *Cabri* даје могућност директне манипулације нацртаним моделима, што га чини додатно занимљивим за употребу од стране ученика. Кордаки и Баломеноу истичу да, када је о појмовима обима и површине реч, *Cabri* алат има вишеструке предности у односу на класични начин рада уз употребу оловке и папира. Наводе да пружа различите могућности у виду цртања, контроле, многоструких репрезентација и повезивања различитих репрезентација нацртаних фигура (Kordaki, Balomenou, 2006: 99).

Јазлик и Ардахан истичу улогу коју *Cabri* има у мотивацији ученика. Његово коришћење побуђује интересовање ученика дизајнирањем активности које их подстичу на истраживање (Yazlik, Ardahan, 2012). Ученици имају прилику да формулишу претпоставке, које могу практично проверити, потврдити или одбацити. Интеграција различитих активности из свакодневног живота и њихово моделирање у *Cabri* окружењу може развити снажну мотивацију ученика, која за последицу има успех ученика и повећање нивоа постигнућа.

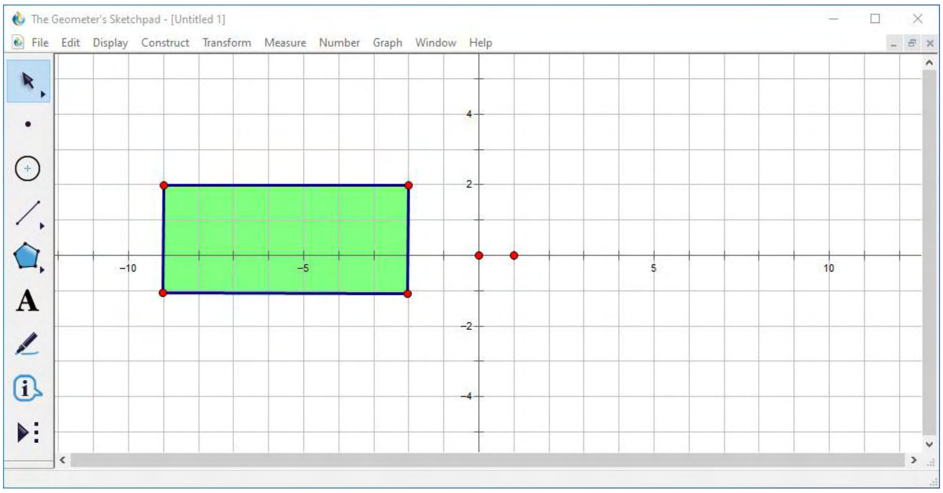
Појава *Cabri 3D* 2004. године умногоме је допринела визуелизацији тродимензионалних објеката (Kösa, Karakuş, 2010). Омогућила је цртање и манипулисање моделима тродимензионалних геометријских тела преко дводимензионалног интерфејса. Нацртане моделе постало је могуће ротирати, видети из одговарајућег угла или приказати мрежу геометријског тела (Слика 1). Такође, *Cabri 3D* представља и користан алат за аналитичку геометрију (Kösa, Karakuş, 2010). Могу се нацртати праве, вектори, равни, а њихов међусобни положај у простору посматрати из различитих углова.



Слика 1. *Мрежа коцке приказана у Cabri 3D софтверу*

Logo је програмски језик прилагођен млађој деци, који је развио Сејмор Паперт (Seymour Papert) са сарадницима 1968. године. Осмишљен као алат за интегрисање геометрије и подстицање интеракције у учионици, показао се веома успешно при поучавању појмова еуклидске геометрије (İbili, 2019). Предност *Logo*-а огледа се у побољшаној способности решавања проблема и просторног мишљења ученика, посебно када је реч о облику и углу. Помаже ученицима да расуђују о математичким односима, ротацији, унутрашњим и спољашњим угловима, да експериментишу, нагађају и прихвате грешке као саставни део учења (Valentine, 2018). Ипак, имајући у виду претходно изнето, резултати истраживања такође предлажу и да употреба функција које омогућава *Logo* треба бити ограничена, јер учење методом покушаја и погрешака може отежати развој вештине аналитичког мишљења ученика (Baki, 2002, према İbili, 2019; Simmons, Cope, 1997).

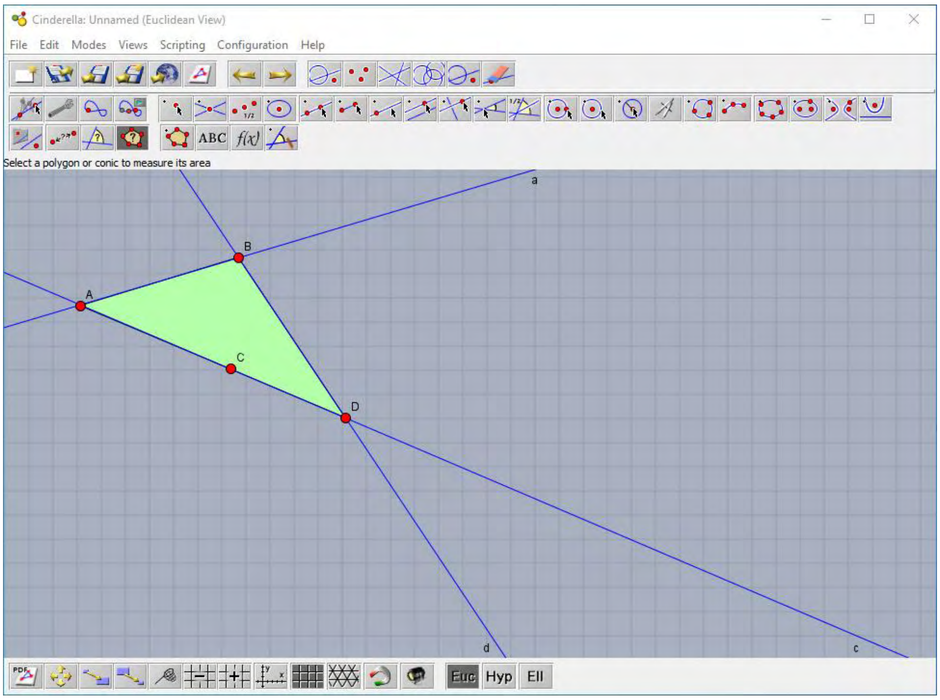
Geometer's Sketchpad је динамички, интерактивни софтвер за математику дизајниран од стране Николаса Џекива (Nicolas Jackiw) 1991. године. Софтвер користи два прозора: 1) прозор са скицама намењен цртању и манипулисању нацртаним објектима; 2) прозор са скриптама који садржи записе о извршеним корацима приликом цртања. То омогућава корисницима да цртају и у сваком тренутку прате промене облика и положаја нацртаних објеката (Abdullah, Zakaria, 2013; Alkhateeb, Al-Duwairi, 2019). Може се користити за извођење различитих изометријских трансформација, транслација, ротација, рефлексија, али и за решавање проблема не само у оквиру геометрије, већ и алгебре, тригонометрије и других области математике (Abdullah, Zakaria, 2013; Jackiw, 2002, према Eu, 2013; Kamariah, Rohani, Ahmad Fauzi, Aida Suraya, 2009; Tomić, 2013) (Слика 2).



Слика 2. *Радно окружење софтвера Geometer's Sketchpad*

Абдулах и сарадници посебно истичу улогу софтвера *Geometer's Sketchpad* у побољшању геометријског мишљења ученика (Abdullah, Tahir, Surif, Ibrahim, Zakaria, 2015). По њиховом мишљењу, коришћењем *Geometer's Sketchpad* у учењу садржаја из геометрије ученици у развоју мишљења напредују за најмање један ниво према Ван Хилеовим стадијумима. Напомињу да ова појава „није специфичност само деце одређене старосне доби, већ да до повећања нивоа геометријског мишљења долази код ученика различитог узраста" (Abdullah et al., 2015: 107).

Прва верзија софтвера *Cinderella* настала је према идеји Јиргена Рихтер-Геберта (Jürgen Richter-Gebert), док је каснију верзију развио заједно са Улрихом Кортенкампом (Ulrich Kortenkamp) 1996. године. Бројни аутори истичу да *Cinderella* по својим карактеристикама има сличности са софтверима *Geometer's Sketchpad* и *Cabri* (Burgiel, 2000; Kortenkamp, Richter-Gebert, 2003; Sinclair, DeBruyn, Hanna, Harrison, 2004). Оно по чему се разликује од наведених софтвера јесте могућност праћења корака при цртању и њихово поновно извршавање. Геометријски објекти приказани у овом софтверу међусобно су повезани и интерактивни, тако да при промени иницијалних објеката долази до модификације и објеката који су од њих настали (Iordan, Panoiu, 2007).

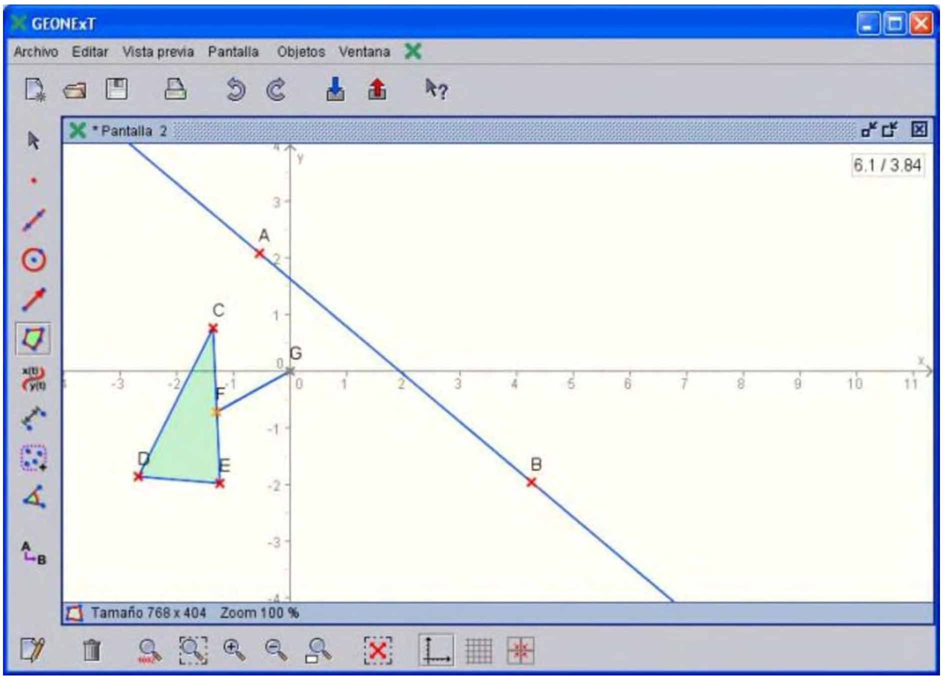


Select a polygon or conic to measure its area

Слика 3. *Приказ радног окружења Cinderella софтвера*

Посебност софтвера *Cinderella* су вишеструке репрезентације објеката. Новије верзије софтвера подржавају и различите типове геометрије: еуклидску, хиперболичку и елиптичку (Zirojević, Jokanović, Baralić, 2015). Приликом стартовања алата основни приказ је еуклидска геометрија (Слика 3), док је за одабир једне од две преостале геометрије довољно да корисник изабере одговарајуће дугме. Са оваквим особинама, *Cinderella* представља добро наставно средство на универзитетском нивоу и добар алат за математичка истраживања. То потврђује чињеница да је, за разлику од *Cabri* и *Geometer's Sketchpad*, намењених и прилагођених потребама средњошколске наставе, софтвер *Cinderella* дизајниран од стране математичара и за потребе математичких истраживања (Burgiel, 2000). Бургиел даље наводи да, у сврху истраживања, софтвер може да допринесе доказивању теорема из геометрије или пак илустровању разлика између еуклидске, хиперболичке и елиптичке геометрије.

Динамички математички софтвер *GEONExT* настао је на Катедри за математику и математичко образовање Универзитета у Бајројту у Немачкој (Bauch, 2003). У себи интегрише *CAS* систем, те се може користити и у области геометрије и анализе. Такође, одликује га широка могућност повезивања геометријских објеката са функцијама и алгебарским објектима, чиме се његова област примене протеже од основне школе до универзитетског нивоа (Bantchev, 2010; Bauch, Miller, 2003).



Слика 4. *Кориснички интерфејс софтвера GEONExT*

Софтвер *GEONExT* је бесплатан и лако доступан на интернету. Написан је у *Java* програмском језику и доступан за велики број различитих оперативних система (Bauch, Pikalova, 2007). Постоји велики број приручника за савладавање рада у овом алату, широко су распрострањени и садрже изузетно детаљна објашњења како самог интерфејса, тако и доступних функција. Корисници у овом софтверу могу извршавати све стандардне конструкције из школске геометрије, могу цртати тачке, повлачити линије, али и извршавати сложеније конструкције (Bauch, 2003) (Слика 4). Такође, могућност увођења клизача доприноси динамичности приказа, њиховим померањем корисници могу пратити промену својстава и изгледа нацртаног објекта у зависности од вредности клизача.

Остали софтвери динамичке геометрије имају у већој или мањој мери сличне карактеристике, па се из тог разлога нећемо освртати појединачно на сваки од њих. Оно што бисмо посебно истакли јесте да софтверски пакет *GeoGebra*, којем ћемо се детаљно посветити у наставку, са успехом обједињује већину својстава која појединачно одликују представљене софтвере.

1.4. Софтверски пакет *GeoGebra* – настанак и развој

Софтверски пакет *GeoGebra* настао је на Институту за дидактику природних наука Универзитета у Салцбургу (Institut für Didaktik der Naturwissenschaften der Universität Salzburg) 2001. године као мастер рад Маркуса Хоенвартера (Markus Hohenwarter) и представља својеврсну прекретницу у односу на раније пакете из чијих је основа потекао. *DGS* софтвери *Geometer's Sketchpad*, *Cinderella*, *Cabri* јесу моћни технолошки алати за наставу геометрије, али идеја Маркуса Хоенвартера огледала се у покушају да једним пакетом обједини геометрију, алгебру и анализу које су ови софтвери третирали појединачно (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis, Lavicza, 2008; Милановић, Такачи, 2012). Сам назив пакета *GeoGebra* сложеница је настала од речи **гео**метрија и ал**гебра**. Будући да укључује и симболичка и визуелна својства, као што су директно задавање једначина и координата, може се дефинисати као *CAS* софтвер (Mićanović, 2016; Mittal, 2018), али и као *DGS* софтвер јер обухвата појмове као што су тачка, дуж, права, и динамичан однос међу појмовима (Choi, 2010; Diković, 2009; Karadag, McDougall, 2009; Zengin, Furkan, Kutluca, 2012).

Прва верзија софтверског пакета, под називом *GeoGebra_1.0*, појавила се 2002. године, а од 2007. године рад на развоју пакета преузима Florida Atlantic University. До данас се појавило више нових надограђених верзија софтвера: *GeoGebra_2.0*; *GeoGebra_3.0*; *GeoGebra_3.2*; *GeoGebra_4.0*; *GeoGebra_4.2*; *GeoGebra_4.4*; *GeoGebra_5.0*. Последња верзија, *GeoGebra_6.0*, објављена је 2017. године и њене могућности се и даље унапређују и надограђују.

Софтвер је написан у програмским језицима *Java* и *HTML5* (Bantchev, 2010; Little, 2009; Molnár, Lukáč, 2015), што омогућава да се користи независно од оперативног система рачунара. Софтвер је бесплатан, лако доступан на интернету одакле се може без било каквих ограничења преузимати и користити путем линка https://www.geogebra.org/download, а може се покренути и директно из веб-претраживача. На поменутом линку налази се неколико верзија софтвера у зависности од потреба корисника, тј. од тога да ли ће пакет првенствено користити за приказ графика функција, решавање једначина или геометријске конструкције. Када се инсталира на рачунару, може функционисати без интернет конекције, што га чини једноставним за коришћење у настави математике на различитим нивоима образовања (Adelabu, Makgato, Ramaligela, 2019; Hohenwarter et al., 2008; Kostić Kovačević, Gavrilović, 2011; Žilinskienė, 2014; Yu, Tawfeeq, 2011). Софтвер је прилагођен и корисницима који не поседују програмерске вештине, а као потврда једноставности коришћења је и *KISS* (*Keep it small and simple*) принцип који је био водећа идеја при прављењу софтвера, како би се „омогућило једноставно манипулисање и управљање функцијама пакета и оставило више простора за учење и експериментисање у математици” (Herceg, 2008: 214). Кориснички интерфејс преведен је на преко осамдесет језика, а захваљујући професорима др Драгославу Херцегу и др Ђорђу Херцегу, преведен је и на српски језик (Живановић, 2016).

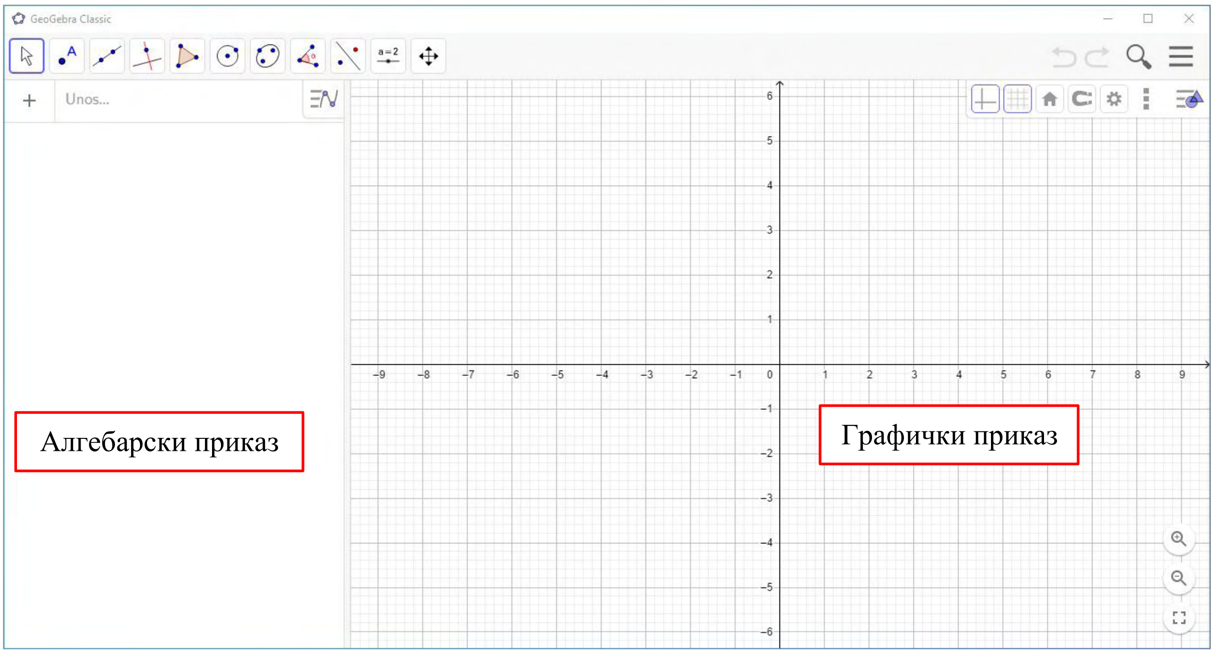
Пројекат *GeoGebra Mobile* започет 2009. године имао је за циљ да се пронађе начин како би се омогућила употреба интерактивних материјала креираних у *GeoGebra*-и и на мобилним телефонима и таблет рачунарима (Ancsin, Hohenwarter, Kovács, 2011; Žilinskienė, 2014). Као резултат пројекта створена је апликација коју је могуће преузети путем линка https://www.geogebra.org или преко *Google Play* и *App Store*. Апликација се састоји од бројних алата налик онима који се могу пронаћи у верзији намењеној за инсталацију на рачунарима. Ова чињеница је веома важна, јер употреба мобилних технологија доприноси и унапређује учење путем открића, као и међусобну сарадњу и интеракцију ученика.

Неке од земаља света препознале су бенефите коришћења пакета *GeoGebra* и инкорпорирале га у остваривање курикулума у области математике (Reis, 2010). Имплементацији и препознавању квалитета *GeoGebra*-е допринео је и велики број међународних награда освојених за образовни софтвер (Choi, 2010; Herceg, 2008; Hohenwarter, Lavicza, 2011; Žilinskienė, 2014):

- EASA 2002: Европска награда за академски софтвер (Ронеби, Шведска);
- Learnie Award 2003: Награда Аустрије за образовни софтвер (Беч, Аустрија);
- Digita 2004: Награда Немачке за образовни софтвер (Келн, Немачка);
- Comenius 2004: Награда немачких образовних медија (Берлин, Немачка);
- Learnie Award 2005: Награда Аустрије за образовни софтвер за *Spezielle Relativitätstheorie mit GeoGebra* (Беч, Аустрија);
- Trophées du Libre 2005: Међународна награда за бесплатни софтвер у области образовања (Соасон, Француска);
- eTwinning Award 2006: Прва награда за *Crop Circles Challenge* (Линц, Аустрија);
- Learnie Award 2006: Награда Аустрије за образовни софтвер за *Wurfbewegungen mit GeoGebra* (Беч, Аустрија);
- AECT Distinguished Development Award 2008: Асоцијација за образовање;
- Tech Award 2009: Лауреат у области образовања (Сан Хозе, Калифорнија, САД);
- NTLC Award 2010: Национална награда за лидерство у области технологије (Вашингтон, САД);
- MERLOT Classics Award 2013: Мултимедијални образовни ресурс за учење и онлајн-наставу (Лас Вегас, Невада, САД);
- Microsoft Partner of the Year Award 2015: Финалиста у области образовања (Редмонд, Вашингтон, САД);
- Archimedes 2016: MNU награда у категорији Математика (Хамбург, Немачка).

1.5. Садржај и карактеристике пакета *GeoGebra*

Након преузимања датотеке путем линка https://www.geogebra.org/download и покретања поступка инсталације, потребно је да се корисник упозна са условима коришћења софтвера и прихвати *GeoGebra* лиценцу. Прихватањем услова коришћења, корисник је у могућности да бесплатно користи, копира, дистрибуира и преноси софтверски пакет *GeoGebra*. По окончању инсталације софтвера, на радној површини рачунара појављује се икона путем које се двоструким кликом покреће *GeoGebra Classic_6*. На Слици 5 приказано је радно окружење пакета.

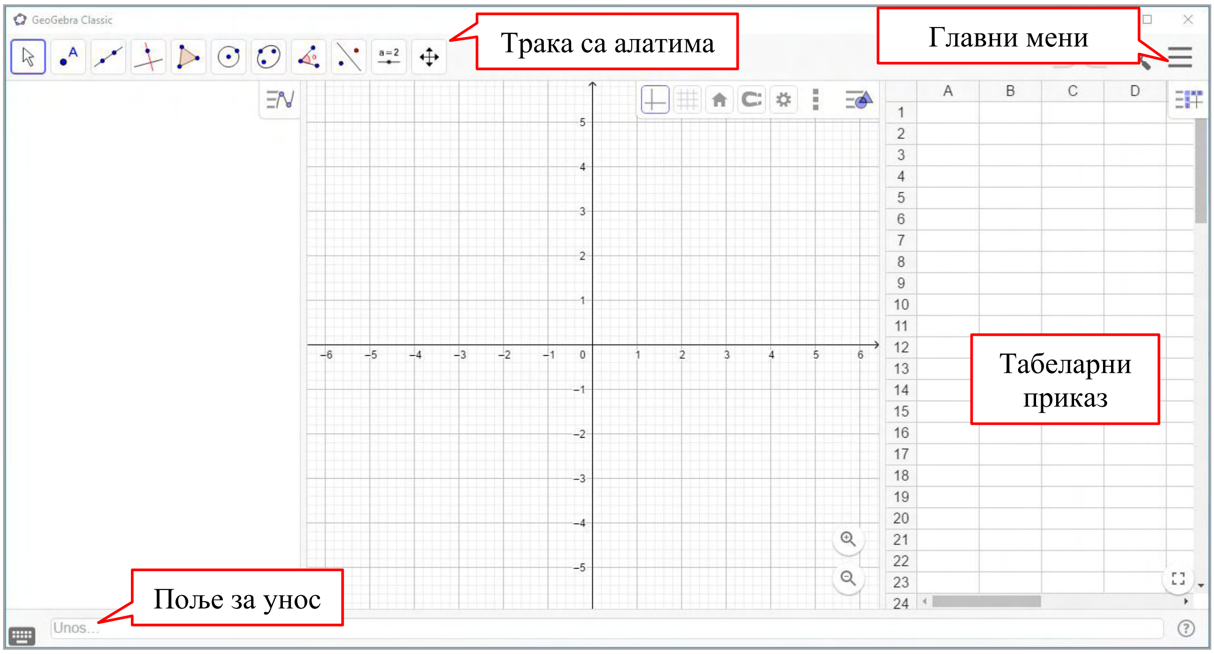


Слика 5. *Радно окружење софтверског пакета GeoGebra Classic_6*

Радна површина пакета једноставна је за коришћење, стандардни алати лако су доступни и једноставни за употребу. На Слици 5, у левом делу радне површине налази се алгебарски приказ, док се графички приказ налази са десне стране. С обзиром на то да је нарочит значај придат алгебарском и графичком приказу (Божић, 2019), табеларни приказ не појављује се приликом покретања софтвера, али се може активирати кликом на главни мени у десном горњем углу, избором картице *Prikaz* и одабиром опције *Tabelarni prikaz* (Слика 6). Сва три приказа узајамно су повезана и динамична, тако да промена у оквиру једне репрезентације истовремено доводи до промене одговарајућег објекта у преосталим репрезентацијама. У алгебарском делу сваки од нацртаних објеката има своје име и једначину, а тачка координате које је одређују. Поред тога, у алгебарском делу приказане су координате вектора, дужине дужи, површине многоуглова, величине углова, вредности параметара и разни прорачуни и мерења. Промену креираних објеката у алгебарском приказу могуће је учинити двоструким кликом миша на једначину жељеног објекта, након чега је могуће извршити измену. Након унете измене у алгебарском приказу, долази и до промене у графичком приказу и обрнуто.

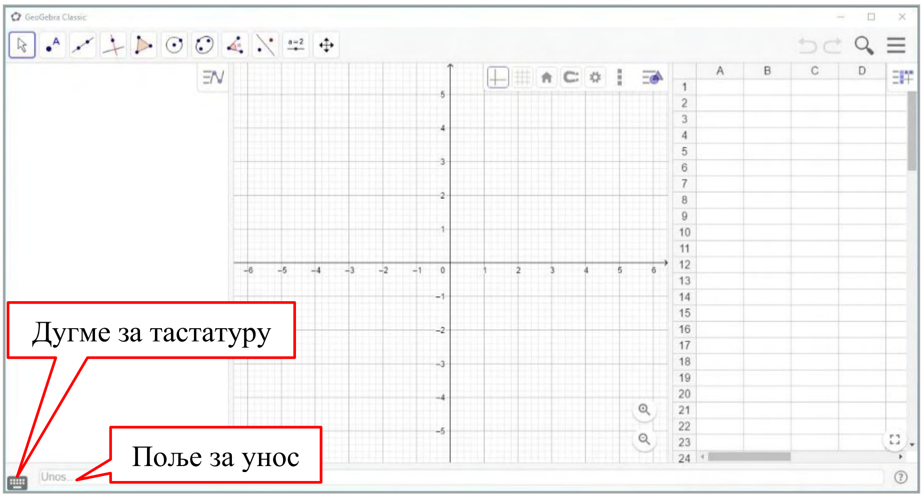
У графичком делу дат је визуелни приказ нацртаних објеката: тачака, дужи, правих, вектора, кружница, многоуглова, и разних других сложених објеката (Šuljić, 2005). Објекти у графичком делу цртају се уз коришћење алата из траке са алатима (Слика 6), док се измене могу вршити директно употребом миша. Као што смо већ напоменули, алгебарски приказ прати одговарајуће промене настале у графичком приказу.

Табеларни приказ састоји се из ћелија од којих је сваку могуће именовати ознаком колоне и врсте (нпр. A1, B17,…). У ћелије је могуће унети бројеве, координате тачака, функције или наредбе, при чему пакет, уколико је могуће, одмах након уноса даје графички приказ унетог објекта именованог тако да одговара ознаци ћелије.

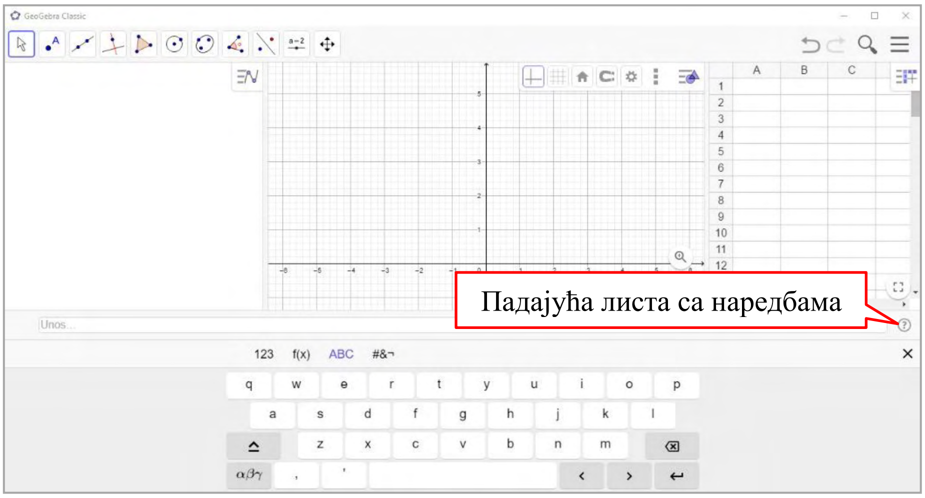


Слика 6. *Елементи радног окружења софтверског пакета GeoGebra*

Поље за унос омогућава унос података у природној нотацији, готово истоветно записивању у свесци или на табли, чиме чини рад у пакету *GeoGebra* привлачним (Choi, 2010; Doğan, Içel, 2011). Могуће је директно унети жељени објекат, након чега се алгебарски приказ појављује у алгебарском делу, а графички приказ у графичком делу пакета. Избором тастера ⌨ у доњем левом углу када је табеларни приказ активиран (Слика 7), у дну прозора појављује се виртуелна тастатура која додатно олакшава задавање наредби. Одабиром једне од картица 123 f(x) ABC #&¬ корисник се може одлучити за калкулатор, задавање функција, словну тастатуру или математичке симболе (Слика 8).



Слика 7. *Изглед радног окружења пакета GeoGebra*



Падајућа листа са наредбама

Слика 8. *Изглед виртуелне тастатуре*

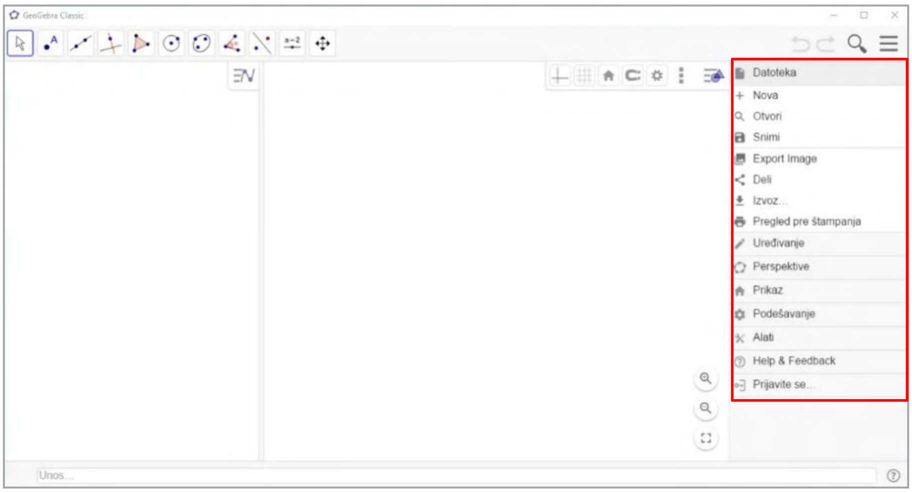
У доњем десном углу, у продужетку поља за унос, налази се дугме означено упитником испод којег је смештена падајућа листа са свим наредбама које нуди *GeoGebra* (Слика 8). Наредбе су груписане у зависности од сврхе и области примене (Слика 9), а могуће их је изабрати и из падајуће листе или започети са писањем у пољу за унос, након чега софтвер препознаје о којој наредби је реч. Сама сврха постојања наредби јесте да олакшају креирање нових и модификацију постојећих објеката.

Matematičke funkcije
- ⊞ **Sve naredbe**
- ⊞ **Geometrija**
- ⊞ **Algebra**
- ⊞ **Tekst**
- ⊞ **Logika**
- ⊞ **Funkcije & analiza**
- ⊞ **Konusni presek**
- ⊞ **Lista**
- ⊞ **Vektori & matrice**
- ⊟ **Transformacija**
  - Homotetija
  - Ogledanje
  - Rastegni
  - Rotiraj
  - Smicanje
  - Translacija
- ⊞ **Grafikon**
- ⊞ **Statistika**
- ⊞ **Verovatnoća**
- ⊞ **Tabela**
- ⊞ **Skripting**
- ⊞ **Diskretna matematika**
- ⊞ **GeoGebra**
- ⊞ **Naredbe za optimizaciju**
- ⊞ **3D**
- ⊞ **Financial**

Слика 9. *Изглед падајуће листе са наредбама*

Главни мени софтверског пакета *GeoGebra* састоји се од осам картица (Слика 10). Картица *Датотека* садржи наредбе намењене раду са датотекама. Прва наредба + Nova користи за отварање новог прозора. Приликом избора ове наредбе отвара се дијалошки прозор како би се сачувала постојећа конструкција пре отварања новог интерфејса. Наредба Otvori служи за отварање постојеће датотеке. У дијалошком прозору који се избором ове наредбе појављује корисник има прилику да изабере жели ли да отвори конструкцију коју је сам претходно креирао или неку од датотека доступних на званичном сајту софтвера. Такође, отварање *GeoGebra* датотеке могуће је и превлачењем мишем жељене датотеке у претходно отворен прозор. Избор наредбе

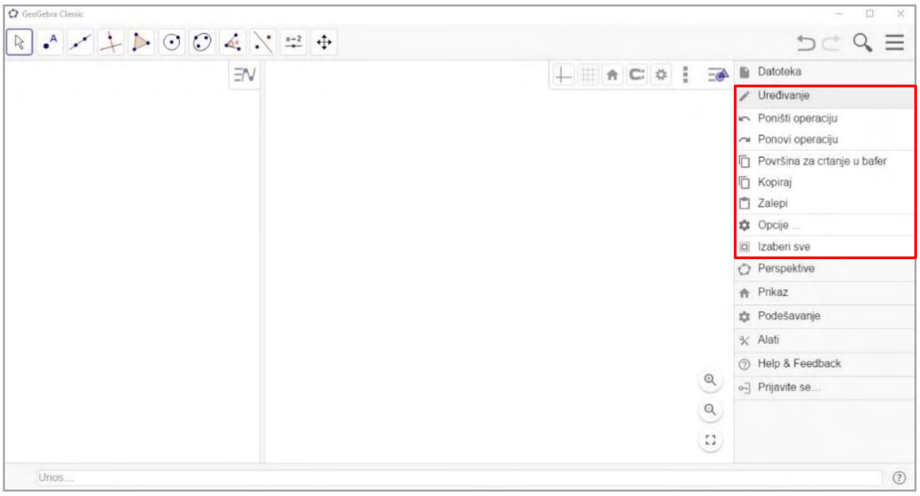
Snimi омогућава да се на једноставан начин сачува нацртана конструкција, а дијалошки прозор који се отвара по избору наредбе даје могућност да се датотека сачува креирањем налога на званичном сајту софтвера или у меморији рачунара. Том приликом, конструкција се чува као *GeoGebra* датотека и уз назив стоји екстензија *.ggb.* Слично, кликом на икону Deli нацртана конструкција може се, уз претходну регистрацију корисника, поставити на званични сајт софтвера.



Слика 10. *Изглед главног менија*

Наредбом Export Image графички приказ пакета може се сачувати као фотографија, док се кликом на Izvoz... појављује падајућа листа са могућим типовима датотека у којима је могуће сачувати (извести) нацртану конструкцију сем *ggb* датотеке (нпр. *png*, *svg*, *txt*, *pdf*, *html* итд.). Кликом на наредбу Pregled pre štampanja отвара се дијалошки прозор у којем је могуће изабрати да ли ће се штампати графички или алгебарски приказ пакета.

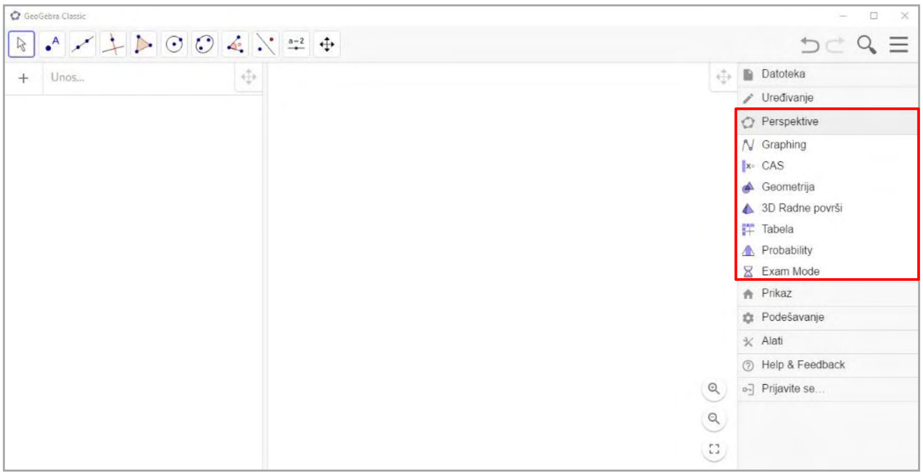
Следећа картица, *Уређивање*, садржи групу од седам наредби за обликовање нацртаних објеката (Слика 11). Наредбе Poništi operaciju и Ponovi operaciju могу се употребити како би се последње изведене радње поништиле, односно поништене радње поново извршиле. Употреба наредбе Površina za crtanje u bafer омогућава да се графички приказ пакета копира у бафер (помоћну меморију) рачунара, одакле се једноставно може користити у другим документима. Сличну улогу имају и наредбе Kopiraj и Zalepi, уз помоћ којих је жељене објекте могуће копирати у бафер, односно „залепити” у други документ.



Слика 11. *Изглед картице Уређивање*

Одабиром наредбе ⚙ Opcije ... активира се дијалошки прозор у којем је садржан велики број различитих подешавања смештених у оквиру четири картице. Избором одговарајуће картице могуће је уредити изглед координатне мреже, однос координатних оса, боју позадине графичког приказа и многе друге, док се једним кликом на икону Izaberi sve на једноставан начин могу означити сви објекти нацртани у *GeoGebra* пакету.

Новије верзије пакета обогаћене су додатним наредбама тако да је у случају зависних објеката њихов одабир могуће извршити селектовањем одговарајућег независног објекта, а затим кликом на икону Izaberi potomke. Аналогно, кликом на наредбу Izaberi pretke врши се избор независних објеката од којих зависе претходно селектовани зависни објекти. Икона Obrni odabir омогућава да се изаберу сви објекти осим претходно означеног. Кликом на објекат а затим избором наредбе Prikaži / sakrij objekte или Prikaži / sakrij oznake може се приказати или учинити невидљивим изабрани објекат или његова ознака. Икона Brisanje служи како би се обрисао селектовани објекат и његови зависни објекти. Заједничко за све наведене наредбе јесте да се појављују у картици *Уређивање* након избора жељеног објекта.



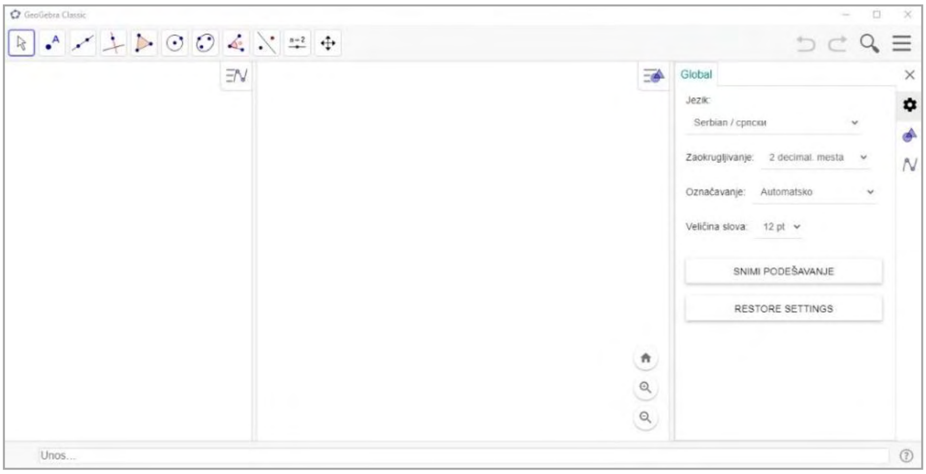
Слика 12. *Изглед картице Перспективе*

Картица *Перспективе* даје могућност избора одговарајућег радног окружења у зависности од потреба корисника (Слика 12). У зависности од тога да ли ће се бавити алгебарским садржајима, 2D и 3D геометријским објектима, табелама, вероватноћом, статистиком или жели креирати тест, корисник може изабрати неки од понуђених прозора.

Слика 13. *Изглед картице Приказ*

Следећа картица, *Приказ*, нуди избор делова пакета који ће бити видљиви у оквиру радног окружења (Слика 13). Поред могућности одабира различитих приказа о којима је претходно било речи, треба напоменути и могућност репрезентације тродимензионалних објеката избором опције ☐Površina za crtanje 3D. Активирањем поља ☐Opis konstrukcije појављује се додатни прозор са списком свих корака начињених приликом конструкције. У зависности од означених карактеристика, за сваки од конструисаних објеката приказано је име, опис, дефиниција, вредност, натпис и друге. Потврдом поља ☐Traka za korake konstrukcije на дну графичког приказа појављује се трака за кораке конструкције дајући прилику за интерактивно извођење готове конструкције корак по корак. У сваком тренутку могуће је вратити се на претходни корак или прећи на наредни, као и мењати динамику којом се кораци конструкције смењују. Наредба Osveži служи како би се графички приказ освежио, као и за брисање трагова конструисаних објеката (ради лакшег праћења промене положаја објеката у графичком приказу, *GeoGebra* нуди могућност да приликом превлачења мишем преко радне површине или током анимације конструисани објекти остављају траг у графичком приказу). Опцијом Ponovo izračunaj sve objekte могуће је извршити поновно израчунавање вредности (координата, површине, дужине) конструисаних објеката.

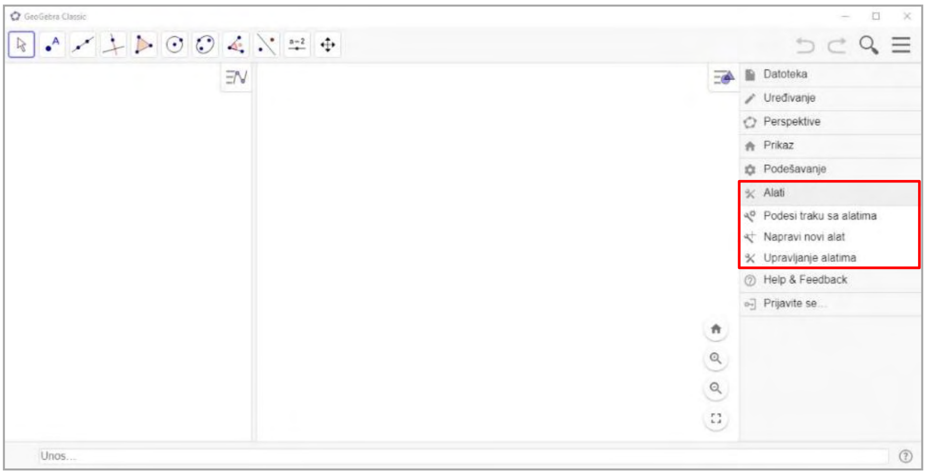
Картица *Подешавање* користи се како би корисник извршио општа подешавања пакета (Слика 14). Може се одабрати одговарајући језик интерфејса, са колико децималних места ће вредности креираних објеката бити приказане или величина фонта за ознаке објеката и приказаног текста. Опција Označavanje: Automatsko пружа могућност избора хоће ли назив нових објеката бити видљив у графичком приказу или не, у зависности од тога да ли је активирано аутоматско означавање, означавање свих нових објеката или искључиво нових тачака.



Jezik: Serbian / српски
Zaokrugljivanje: 2 decimal. mesta
Označavanje: Automatsko
Veličina slova: 12 pt

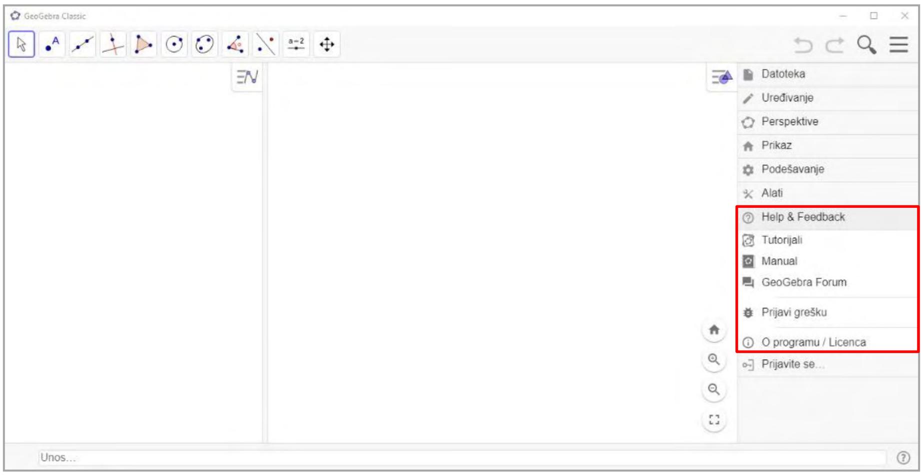
Слика 14. *Изглед картице Подешавање*

Картица *Алати* користи се за управљање већ постојећим и креирање нових алата (Слика 15). Кликом на наредбу Podesi traku sa alatima отвара се дијалошки прозор у којем је могуће извршити прилагођавање траке са алатима (променити им редослед, обрисати непотребне). Избором опције Napravi novi alat може се формирати жељени специфичан алат. Након израде конструкције на коју се односи нови алат, а затим активирањем поменуте наредбе, у дијалошком прозору који се отвара задају се назив, улазни и излазни објекти. Новоформираном алату могуће је приступити из траке са алатима или поља за унос. Дијалошки прозор који се отвара кликом на Upravljanje alatima омогућава брисање алата или мењање његовог визуелног приказа (назива и иконе). Доступно је и премештање одабраног алата у *GeoGebra* датотеку за алате, из које се касније може користити у некој другој конструкцији.



Слика 15. *Изглед картице Алати*

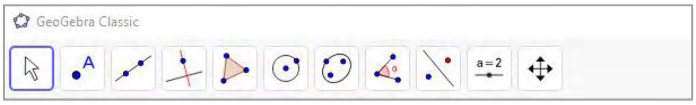
Картица *Помоћ и подршка* нуди помоћ и подршку кориснику при раду у пакету која у случају да је *GeoGebra* инсталирана на рачунару не захтева приступ интернету (Слика 16). Клик на опцију Tutorijali води до дела у којем су објашњени почетни кораци и дате основе рада у сваком од делова пакета (рад са функцијама, геометријским садржајима, табелама и сл.). Избором опције Manual отвара се део са приручником за коришћење свих алата и команди које пакет нуди. Икона GeoGebra Forum води до форума намењеног корисницима софтвера, где могу поставити питање, разменити искуства, мишљења и друге корисне информације (за приступ форуму неопходан је приступ интернету). У случају појаве проблема у раду, коришћењем наредбе Prijavi grešku могуће је исти пријавити директно на службеној страници *GeoGebra*-е, док се кликом на икону O programu / Licenca отвара прозор са више информација о лиценци самог пакета и условима коришћења. Последња у главном менију, картица Prijavite se... омогућава регистрованим корисницима да сачувају или приступе креираним материјалима сачуваним на званичном сајту пакета.



Слика 16. *Изглед картице Помоћ и подршка*

1.5.1. Карактеристике *GeoGebra* алата намењених раду са објектима у равни

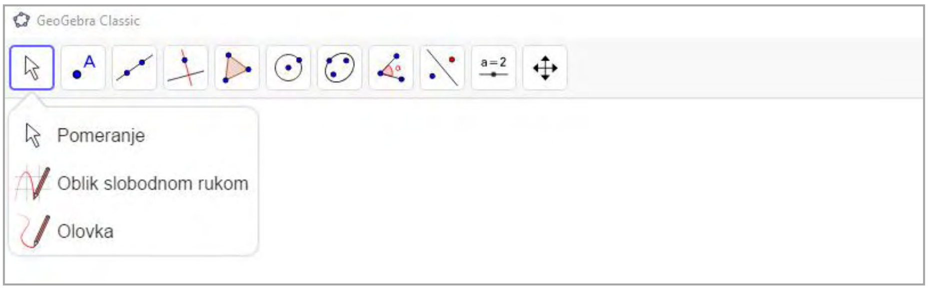
Поред алгебарског, графичког и табеларног приказа, остали основни елементи радног окружења софтвера *GeoGebra* јесу Трака са алатима и Поље за унос (Слика 17). Трака са алатима састоји се од скупа већег броја алата намењених цртању објеката уз употребу миша. Алати су најчешће груписани у зависности од намене, па тако постоје алати за померање, алати за тачке, алати за линије, посебни алати за линије, алати за многоуглове, алати за кружнице и лукове, алати за конусне пресеке, алати за мерење, алати за трансформације, посебни алати за објекте, акцијски алати, општи алати (Слика 17). Избором било којег алата у дну радног прозора појављује се поље у којем су дате додатне инструкције за коришћење изабраног алата.



Слика 17. *Изглед траке са алатима*

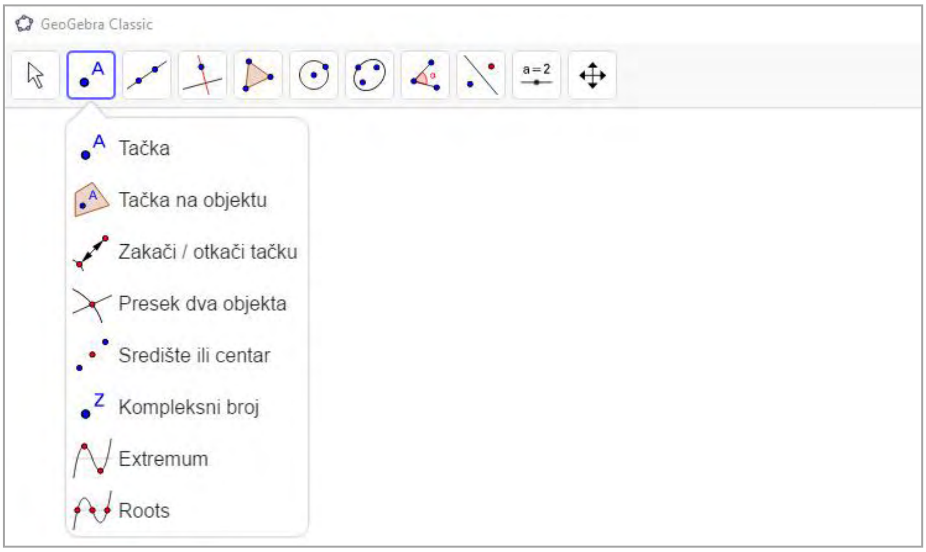
Након што корисник изабере алате за померање (Слика 18), појављује се падајућа листа са три алата. Алат Pomeranje омогућава померање изабраног објекта по графичком делу радне површине превлачењем мишем. Такође, након што се одређени објекат означи, могуће га је избрисати притиском на тастер *Delete* или преместити уз коришћење стрелица на тастатури. За истовремено манипулисање већим бројем објеката, приликом њиховог означавања потребно је притиснути тастер *Ctrl*. Други начин за означавање више објеката истовремено јесте притиском и држањем десног тастера миша за формирање селекционог правоугаоника након чега се скуп објеката може преместити превлачењем једног од њих. Селекциони правоугаоник може користити и при одређивању графичког дела за штампање, извоз слика и сл.

Објекте креиране у пакету *GeoGebra* можемо сврстати у независне и зависне. Независни објекти су „самостални”, односно не зависе од неких претходно нацртаних објеката и могуће је мењати њихов положај, док су зависни објекти повезани са нацртаним објектима и при промени својстава независних објеката долази до промене и зависних објеката. Поред независних и зависних објеката, могу се срести и помоћни објекти направљени уз помоћ посебних алата, или тако означени од стране корисника. Нацртаним објектима могуће је манипулисати било превлачењем мишем, уношењем команди преко тастатуре или мењањем вредности у алгебарском делу пакета (Denbel, 2015).



Слика 18. *Изглед алата за померање и посебних алата за објекте*

Алати Oblik slobodnom rukom и Olovka спадају у групу посебних алата за објекте. Алат Oblik slobodnom rukom омогућава кориснику скицирање графика функције или произвољног геометријског објекта (дужи, кружнице, квадрата и сл.). Након што корисник заврши скицирање, пакет препознаје контуре и даје тачан приказ жељеног објекта. Одабиром алата Olovka може се писати или цртати слободном руком у графичком делу прозора. Пакет аутоматски нуди црну боју оловке, међутим корисник може променити боју, стил, дебљину линије користећи траку за стил смештену у горњем десном углу прозора. За брисање написаног текста или нацртане фигуре током превлачења мишем преко објекта потребно је држати притиснут десни тастер миша.

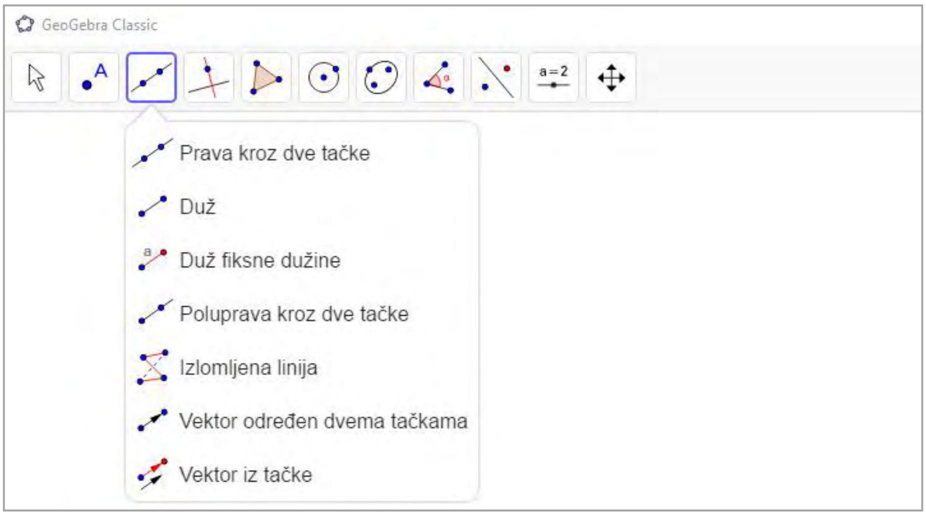


Слика 19. *Изглед алата за тачке*

Избором алата за тачке појављује се падајућа листа са осам алата (Слика 19). Први у низу, алат Tačka служи за креирање нових тачака у графичком делу прозора. Тачке је могуће нацртати и на другим објектима, на правама, фигурама, графицима функција итд. Након што корисник нацрта тачку, њене координате се појављују у алгебарском делу прозора. Избором алата Tačka na objektu могуће је нацртати тачку која припада неком објекту. Тачку креирану избором овог алата могуће је померати само унутар објекта или по његовим ивицама. Алат Zakači / otkači tačku представља својеврсну допуну алата Tačka na objektu. Може послужити како би се независна тачка „закачила” на неки претходно нацртан објекат. Од тог тренутка тачка преузима особине тачке креиране алатом Tačka na objektu, односно могуће је вршити њено померање само у оквиру граница објекта. Такође, поменути алат може користити како би се тачка нацртана у објекту одвојила од њега и учинила независном. Тачке пресека два објекта могу се одредити коришћењем алата Presek dva objekta, а затим означавањем жељених објеката. На тај начин, уколико постоје, појавиће се све тачке пресека. Посебно, кликом на сам пресек два објекта појавиће се само појединачна тачка пресека. Алатом Središte ili centar могуће је одредити средиште дужи или центар кружнице или конусног пресека. За одређивање средишта или центра довољно је кликнути мишем на жељени објекат или у случају дужи кликнути на крајње тачке дужи.

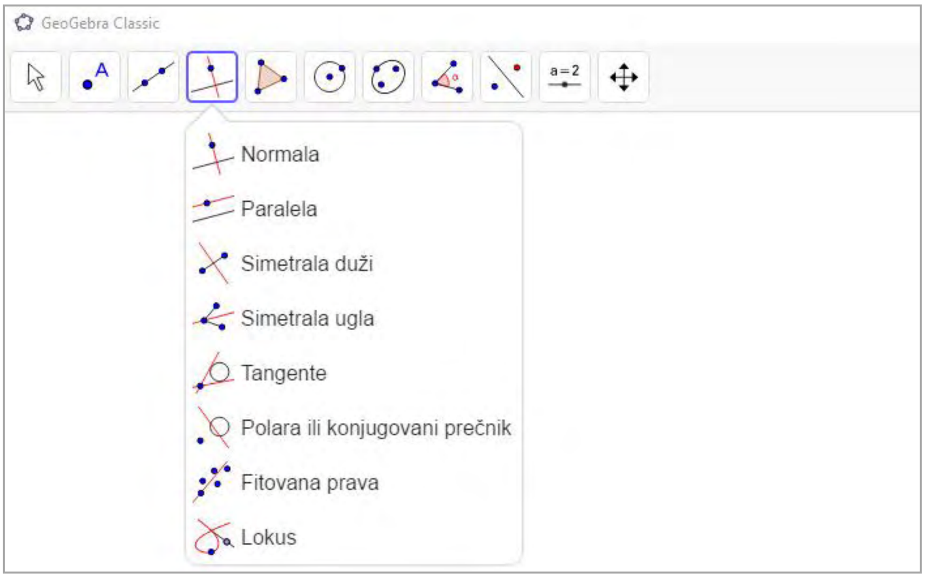
Комплексни број могуће је увести коришћењем алата Kompleksni broj а затим кликом миша у делу за графички приказ, док је истовремено у алгебарском приказу могуће видети вредност комлексног броја. Поред комплексног броја, новије верзије софтвера *GeoGebra* нуде и алате за рад са функцијама. Тако, алат Extremum је намењен одређивању екстремних вредности функција (уколико постоје). Довољно је изабрати поменути алат, а затим означити график функције чије екстремне вредности треба одредити. Нуле функције, односно пресеке графика функције са *x*-осом (уколико постоје), могуће је одредити једноставним избором алата Roots а потом означавањем графика жељене функције.

Палета алата за рад са линијама садржи укупно седам алата (Слика 20). Избором првог алата из палете Prava kroz dve tačke могуће је креирати праву одређену двема тачкама било да су унапред задате или добијене након избора алата кликом миша у графичком делу софтвера. После избора прве тачке, појављује се права чији правац није једнозначно одређен све док корисник не изабере и другу тачку. Будући да права настаје као зависан објекат, брисањем било које од две тачке долази до брисања и саме праве одређене тим тачкама. Дуж, као најкраће растојање између две тачке, настаје уз помоћ алата Duž. Довољно је после избора алата одредити крајње тачке, након чега се појављује дуж која их спаја. Истовремено са графичким приказом дужи, у алгебарском приказу појављује се и њена дужина. Дуж је могуће нацртати и избором алата Duž fiksne dužine, при чему је потребно изабрати једно теме дужи и задати дужину жељене дужи. Такође, кроз две тачке, користећи алат Poluprava kroz dve tačke, могуће је нацртати полуправу са почетком у првој тачки, док положај друге тачке одређује правац полуправе. За то време у алгебарском приказу може се видети једначина одговарајуће полуправе.



Слика 20. *Изглед алата за рад са линијама*

Поред дужи, права и полуправа, избором алата Izlomljena linija кориснику је омогућено да нацрта изломљену линију. Све што је потребно након избора алата јесте одредити најмање три тачке, а затим кликнути на прву од њих како би се генерисала отворена изломљена линија. Даље, кликом на алат Vektor određen dvema tačkama и избором почетне и крајње тачке вектора може се конструисати вектор, при чему растојање између тачака одређује његов интензитет, а међусобни положај тачака правац и смер. Алатом Vektor iz tačke могуће је нацртати вектор на основу избора једне тачке и већ нацртаног вектора. Коришћењем овог алата добијен је вектор истог интензитета и смера са задатим вектором.



Слика 21. *Изглед посебних алата за рад са линијама*

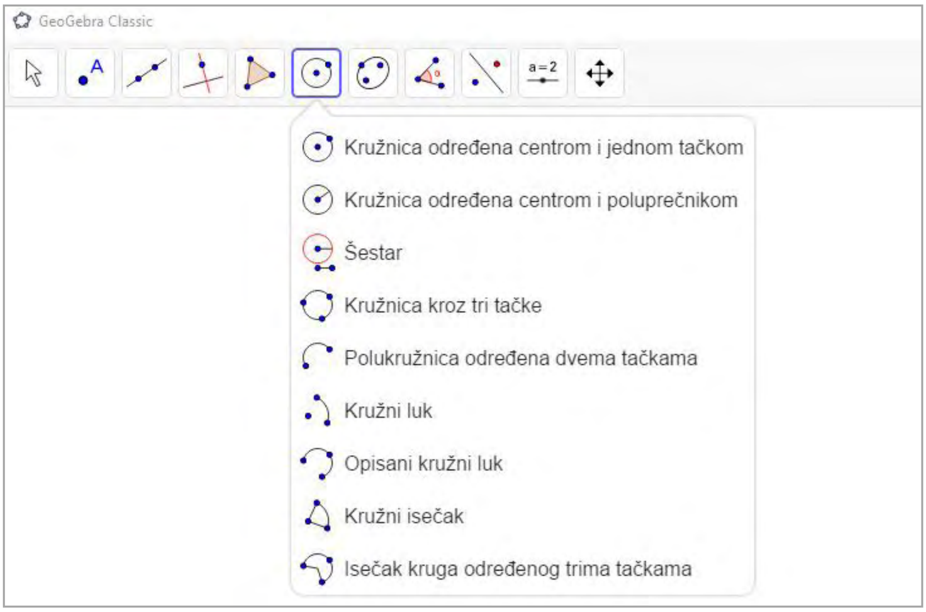
На Слици 21 приказана је падајућа листа која се добија кликом миша на четврту икону у траци са алатима и садржи укупно осам посебних *GeoGebra* алата за рад са линијама. Алатом Normala корисник може нацртати нормалу у односу на претходно задату праву која пролази кроз одређену тачку. С обзиром на то да настаје као зависни објекат, променом положаја било праве или тачке кроз коју нормала пролази, долази до промене положаја и саме нормале. Алат Paralela служи за одређивање праве паралелне са датом правом. Функционише на сличан начин као и алат за добијање нормале на дату праву. За одређивање симетрале дате дужи може се користити алат Simetrala duži, чијим се коришћењем добија нормала на дату дуж која је полови. Након избора алата, довољно је кликнути на крајње тачке дужи или саму дуж. Тачка пресека дужи и њене симетрале дели дуж на два једнака дела. Слично са одређивањем симетрале дужи, избором алата Simetrala ugla а затим означавањем жељеног угла може се добити симетрала угла. Означавање угла могуће је учинити на два начина, било означавањем три тачке (потребно је водити рачуна да друга означена тачка представља теме угла) или две дужи са заједничким теменом.

Уз помоћ алата Tangente могу се одредити тангенте на кружнице, конусне пресеке или графике функција. Тангенте на кружницу из тачке ван кружнице добијају се избором алата, а затим означавањем жељене кружнице и тачке или избором кружнице и праве (том приликом добијају се тангенте паралелне датој правој). Избором поменутог алата а затим две кружнице, као резултат добиће се њихове заједничке тангенте (уколико постоје, а највише четири тангенте). Следећи алат у падајућој листи Polara ili konjugovani prečnik служи да се одреди полара, односно коњуговани пречник конусног пресека. За одређивање поларе потребно је означити тачку, а затим и поменути конусни пресек, док је за коњуговани пречник потребно одабрати праву или вектор и конусни пресек. Уз помоћ алата Fitovana prava могуће је добити фитовану праву за унапред задати скуп тачака, и то креирањем селекционог правоугаоника којим се обухватају тачке или избором тачака из листе. Последњи из скупа посебних алата за рад са линијама јесте Lokus. За одређивање локуса треба одабрати две тачке. Најпре тачку која описује локус, а затим тачку од које прва тачка зависи (друга тачка се налази на неком од објеката, правој, дужи, кружници и сл.).

Следећа група алата намењена је раду са многоугловима (Слика 22). Први алат Mnogougao омогућава цртање многоугла задавањем тачака које представљају његова темена. Потребно је означити најмање три тачке како би многоугао могао бити креиран. У алгебарском приказу могуће је видети координате темена, дужине страница и површину насталог многоугла. Правилан многоугао (једнакостранични троугао, квадрат, правилан петоугао,...) може се нацртати уз употребу алата Pravilan mnogougao, и то избором две тачке а затим уписивањем укупног жељеног броја темена у дијалошки прозор који се појављује. Тиме, сем почетна два темена, остала темена добијеног многоугла јесу зависни објекти, а дужине свих страница многоугла зависе од растојања између две почетне независне тачке. Алатом Kruti mnogougao корисник има прилику да нацрта многоугао који ће у сваком тренутку задржати свој облик. Након избора тачака које ће представљати темена многоугла, а затим поново избором прве од њих добија се многоугао који остаје исти, без обзира на примењене изометријске трансформације (транслације, ротације). Слично али уз мале разлике функционише и алат Vektorski mnogougao. Након формирања многоугла стандардним поступком, померањем првог темена многоугла задржава се почетни облик, док померањем осталих темена може доћи до промене првобитног облика многоугла.

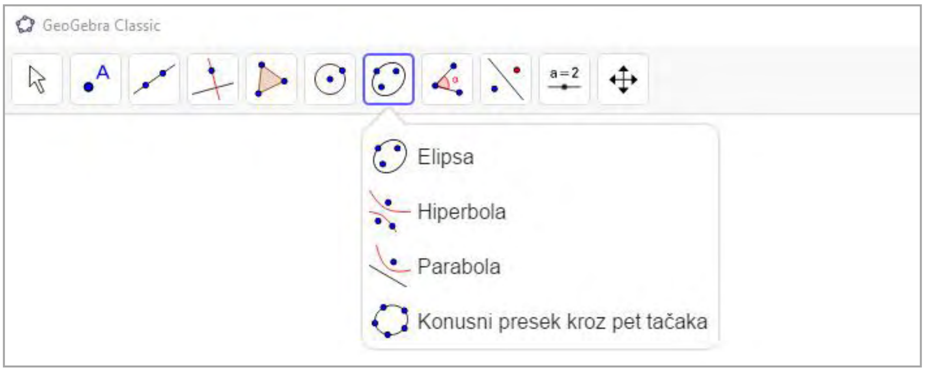
Слика 22. *Изглед алата за многоуглове*

Рад са кружницама и кружним луковима омогућава падајућа листа од укупно девет различитих алата (Слика 23). Први алат Kružnica određena centrom i jednom tačkom намењен је креирању кружнице уколико је позната тачка која представља центар кружнице и једна тачка са кружнице. Растојање између ових двеју тачака истовремено представља и полупречник настале кружнице. У случају када је унапред позната дужина полупречника, кружницу је могуће нацртати избором алата Kružnica određena centrom i poluprečnikom. Означавањем тачке која представља центар кружнице а затим уносом дужине полупречника у дијалошки прозор генерише се жељена кружница. Алат Šestar има сличну функцију као алат Kružnica određena centrom i jednom tačkom. Након што се одаберу дуж или две тачке за полупречник, треба кликнути на тачку која ће бити центар нове кружнице. Када су познате тачке кроз које пролази кружница, избором алата Kružnica kroz tri tačke а затим означавањем три тачке, конструише се кружница која садржи све три тачке.



Слика 23. *Изглед алата за кружнице и лукове*

Полукружница се може нацртати коришћењем алата Polukružnica određena dvema tačkama. Довољно је најпре изабрати алат, а потом и две тачке које одређују полукружницу. Приликом формирања кружног лука треба изабрати алат Kružni luk и означити три тачке. У том случају прва од тачака представља центар, док друге две тачке одређују дужину лука. Описани кружни лук настаје тако што треба изабрати алат Opisani kružni luk и три тачке које одређују лук. Померањем било које од три тачке долази до промене облика лука, а у алгебарском приказу у сваком тренутку приказана је његова дужина. Алатом Kružni isečak генерише се графички приказ кружног исечка задавањем центра и две тачке. Прва тачка представља почетну тачку исечка, док је другом тачком одређена дужина лука, при чему она сама не мора нужно лежати на исечку. Кружни исечак може се креирати и алатом Isečak kruga određenog trima tačkama, уз напомену да у том случају све три тачке морају припадати луку. Сам положај тачака једнозначно одређује центар, док је промену мерног броја површине кружног исечка могуће пратити у алгебарском делу пакета *GeoGebra*.



Слика 24. *Изглед алата за конусне пресеке*

Алати за цртање и рад са конусним пресецима груписани су испод иконе и укупно их је четири (Слика 24). Први алат Elipsa намењен је раду са елипсом. После избора алата потребно је одредити које две тачке ће представљати жиже (фокусе) и тачку кроз коју ће елипса пролазити. По избору тачака и графичког приказа елипсе, општи облик једначине елипсе аутоматски се приказује у алгебарском делу прозора. Слично је и са хиперболом. Уз помоћ алата Hiperbola и три тачке које одређују жиже и једна од њих се налази на хиперболи, кориснику је омогућено да нацрта конкретну криву другог реда. Касније, избором алата Pomeranje и означавањем неке од поменутих тачака, могуће је мењати облик хиперболе у зависности од положаја и вредности координата тачака. Алат Parabola намењен је цртању параболе, за унапред одређену тачку и праву које представљају жижу (фокус) и директрису параболе. Након избора алата потребно је кликнути на поменуте објекте како би се конструисала крива. С обзиром на то да изглед параболе зависи од положаја тачке и праве, било какве промене над њима утичу и на промену изгледа саме криве. Новије верзије софтверског пакета *GeoGebra* укључују и алат Konusni presek kroz pet tačaka уз помоћ којег је могуће нацртати конусни пресек на основу задатих пет тачака кроз које крива пролази. У зависности од узајамног положаја тачака, могуће је да конусни пресек има облик кружнице, елипсе или хиперболе.

Слика 25. *Изглед алата за мерење и посебних алата за објекте*

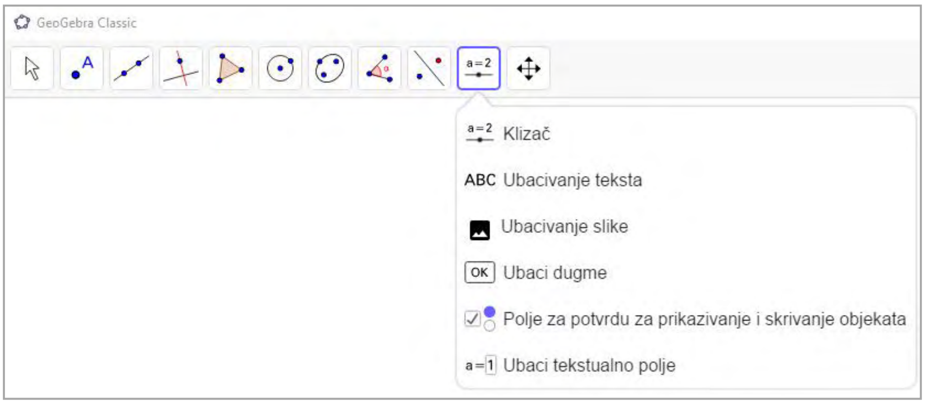
На Слици 25 дат је приказ падајуће листе која се добија кликом миша на икону у траци са алатима и садржи укупно шест алата за различита мерења (Odnos između objekata и Ispitivač funkcija спадају у групу посебних алата за објекте и о њима ће више речи бити касније). Алат Ugao омогућава цртање угла на различите начине, било да је угао одређен са три тачке (друга изабрана тачка представља теме угла), две праве, две дужи или два вектора. Избором овог алата и кликом на неки већ конструисани многоугао приказаће се сви његови унутрашњи углови. Избором алата Ugao zadate veličine могуће је нацртати угао жељене величине. По означавању тачке са крака и темена угла појављује се дијалошки прозор у коме се поред величине угла може изабрати и оријентација конструисаног угла.

За одређивање растојања између две тачке, тачке и праве или две праве може се користити алат Rastojanje. Такође, избором овог алата а затим означавањем кружнице или многоугла може се одредити њихов обим, који се приказује и у алгебарском делу пакета, али и у графичком у виду текста. Слично претходном, алат Površina намењен је одређивању мерног броја површине изабраног многоугла или дела равни ограниченог кружницом или елипсом. Све што је потребно јесте да се по одабиру алата кликне на жељени објекат након чега се површина појављује у виду текста у графичком приказу. Следећи алат у падајућој листи Nagib служи да корисник одреди коефицијент правца претходно нацртане праве. Као што је случај и са претходним алатима, поред вредности коефицијента приказане у алгебарском приказу, у графичком делу пакета поред праве појављује се текст са вредношћу коефицијента правца. Користећи алат {1,2} Napravi listu могуће је направити листу већ постојећих објеката у графичком делу пакета тако што се након избора алата селекционим правоугаоником изаберу жељени објекти. Такође, могуће је креирати листу и из табеларног дела пакета. Одабиром ћелија а затим кликом на алат појављује се дијалошки прозор у који је могуће унети назив листе и означити да ли се ради о независним или зависним објектима након чега се листа генерише.

Слика 26. *Изглед алата за трансформације*

Група алата дата на Слици 26 намењена је првенствено геометријским трансформацијама нацртаних објеката. Алатом Osna simetrija могуће је одредити осносиметричну слику изабраног објекта (тачке, кружнице, многоугла) у односу на изабрану праву која представља осу симетрије. Добијена слика зависна је у односу на изворни објекат и променом неког од делова почетног објекта аутоматски долази до промене и његове слике. Слично функционише и алат Centralna simetrija, код којег је након избора објекта за пресликавање потребно одабрати тачку која представља центар симетрије. Новије верзије пакета *GeoGebra* садрже алат Inverzija u odnosu na kružnicu који може користити за инверзију тачке у односу на кружницу. Довољно је означити тачку која је предмет инверзије и кликнути на већ нацртану кружницу како би се добила инверзна слика. Алатом Rotacija oko Tačke могуће је извршити ротацију изабраног објекта. Након избора алата, потребно је означити објекат, одредити тачку која представља центар ротације, и у дијалошки прозор унети величину и оријентацију угла ротације. Даље, транслацију је могуће обавити коришћењем алата Translacija za vektor. Треба означити објекат који је предмет транслације, а затим вектор. Објекат добијен након тога јесте слика почетног објекта и као такав зависи од његове промене, као и од промене правца, смера или интензитета вектора транслације. Последњи алат у падајућој листи Homotetija sa centrom i koeficijentom намењен је хомотетији. Да би наредба била извршена, након одабира алата, објекта трансформације и тачке која представља центар хомотетије, отвара се дијалошки прозор у који треба уписати коефицијент хомотетије.

Као што смо претходно навели, a=b Odnos između objekata спада у групу посебних алата за објекте. Користи за одређивање међусобног односа два објекта (Тончева, 2011). Избором алата, а затим означавањем два објекта у графичком делу софтвера појављује се информација о њиховом узајамном односу. Такође, и Ispitivač funkcija јесте један од посебних алата за објекте. Служи за испитивање функције, тако што по избору алата треба означити функцију која се жели испитати, након чега се отвара дијалошки прозор. У оквиру картице *Interval* дијалошког прозора може се унети интервал на којем ће алат одредити минимум и максимум функције, нулу функције и сл. У картици *Tačke* дате су координате неколико тачака у којима се може приказати тангента, вредност првог извода, другог извода функције итд.



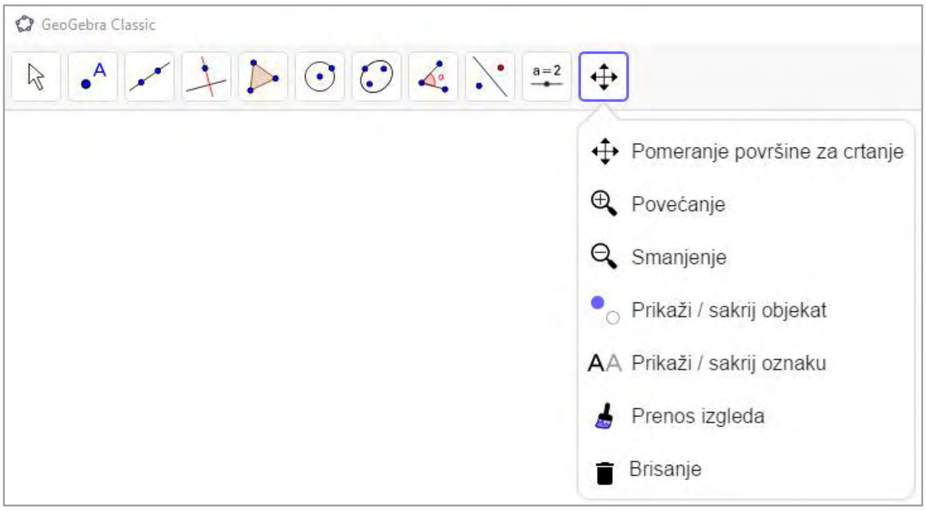
Слика 27. *Изглед посебних алата за објекте и акцијских алата*

У падајућој листи на Слици 27, поред поменутих, налазе се још неки посебни алати за објекте и акцијски алати. У посебне алате за објекте спадају ABC Ubacivanje teksta и Ubacivanje slike. Избором ABC Ubacivanje teksta могуће је креирање статичних или динамичних текстова и *LaTeX* формула у графичком делу пакета *GeoGebra*. Кликом на радну површину отвара се дијалошки прозор у који треба унети текст. Кликом на тачку појављује се дијалошки прозор у који се уноси текст чији је положај у графичком делу везан за тачку и било какво померање исте утиче на промену положаја текста. Такође, позиција текста може се задати као апсолутна у графичком делу пакета (зумирање не утиче на текст, увек остаје видљив у графичком делу) или релативна у односу на координатни систем. Текст директно унет у дијалошки прозор сматра се статичним, односно на њега не утичу промене објеката приказаних у графичком делу. За динамични текст који приказује променљиве вредности у зависности од промене објеката за које је везан, потребно је у дијалошком прозору у оквиру падајуће листе *Napredno* изабрати картицу ⬠, а затим означити жељени објекат. Уз помоћ опције LaTeX formula у истом прозору могу се написати математичке формуле једноставно и лако. Избором картице LaTeX formula појављују се разноврсни готови обрасци, а испод иконе αβγ доступан је велики број математичких симбола и оператора.

Убацивање слике врши се уз помоћ алата Ubacivanje slike. Након избора алата из падајуће листе отвара се прозор за избор датотеке у којој се жељена слика налази. По одабиру, слика се појављује у графичком приказу, са тачкама у доњем делу. Превлачењем тачака мишем или променом њихових координата у алгебарском делу могу се мењати положај и величина увезене слике.

Као што смо претходно навели, на Слици 27 приказана су четири акцијска алата. Први од њих, a=2 Klizač, служи за увођење клизача (променљиве) који може узети вредност броја или величине угла. Најпре треба изабрати алат и одредити позицију у графичком делу пакета где ће се клизач налазити, која као и позиција текста може бити апсолутна у графичком приказу или у односу на координатни систем. Дијалошки прозор који се по одређивању положаја активира омогућава задавање жељене ознаке променљиве, интервала вредности које променљива може узети, оријентацију клизача (хоризонталну или вертикалну), брзину којом се вредности мењају и сл. Креирање клизача и активирање једне од две врсте анимација које постоје у *GeoGebra*-и даје могућност динамичног манипулисања нацртаним објектима и праћења промена које том приликом настају и једна је од главних предности над осталим *DGS* софтверима. Једна је аутоматска анимација која се покреће избором опције Animiraj (појављује се кликом на десни тастер миша), док друга представља ручну анимацију насталу мануелним померањем клизача (Станковић, Јордановић, Јанковић, 2015). Аутоматска анимација се може понављати на три начина: растући (вредност клизача се константно повећава), опадајући (вредност клизача се смањује) и осцилујући (вредност клизача периодично расте до максимума, а затим опада до минимума).

Алат OK Ubaci dugme може користити за уметање дугмета у графички приказ. Најпре је потребно изабрати алат и положај дугмета, затим се појављује дијалошки прозор у који се може поставити натпис, а у оквиру картице *Na Click* задати наредба која ће се кликом на дугме извршити. Уз помоћ алата ☑ Polje za potvrdu za prikazivanje i skrivanje objekata могуће је направити поље за потврду како би се приказао или сакрио један или више објеката. По избору алата и кликом на графички део софтвера појављује се дијалошки прозор у који је потребно унети натпис поља и одредити на приказ/скривање којих објеката ће се поље односити. Избор објеката могуће је извршити са листе која се појављује у дијалошком прозору или их означити мишем у алгебарском или графичком приказу. Текстуално поље може се увести кликом на алат a=1 Ubaci tekstualno polje, а затим на графички приказ. Даље, у дијалошком прозору могуће је одредити натпис и повезане објекте, након чега се у графичком делу пакета генерише текстуално поље.



Слика 28. *Изглед општих алата*

Падајућа листа са општим алатима смештена је такође у траку са алатима (Слика 28). Садржи укупно седам алата, од којих је први Pomeranje površine za crtanje намењен померању видљивог дела графичког приказа. Избором алата а затим превлачењем мишем могуће је одредити који део радне површине графичког приказа ће бити видљив у оквиру прозора. Користећи исти алат могуће је променити размеру између координатних оса једноставним кликом и превлачењем мишем преко осе чији изглед се жели променити. Алати Povećanje и Smanjenje користе се како би се одређени делови увеличали или умањили. По одабиру алата довољно је кликнути мишем на део који се жели увеличати/умањити ради боље прегледности радне површине графичког приказа. Исту функцију имају иконе 🔍 и 🔍 које се налазе у десном делу графичког приказа. Икона ⌂, такође смештена у десном делу графичког приказа, омогућава враћање радне површине на почетни приказ координатног система.

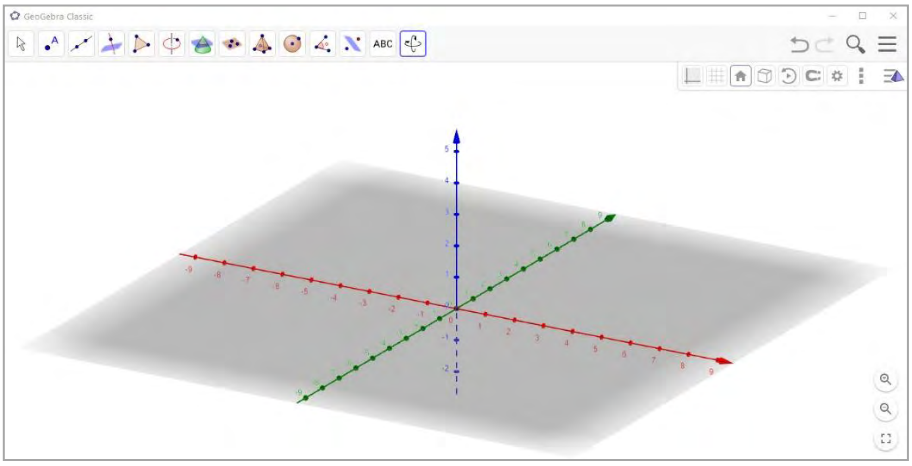
Уз помоћ алата Prikaži / sakrij objekat објекти нацртани у графичком делу пакета могу се сакрити са радне површине или поново приказати. По избору алата треба означити објекте које треба сакрити, а затим изабрати други алат како би наступила промена видљивости. Поновним одабиром истог алата појављују се обриси објеката који су сакривени, након чега је могуће поништити избор и поново их приказати. И алат AA Prikaži / sakrij oznaku на сличан начин функционише. Уз помоћ њега могуће је означити објекат чију ознаку/назив треба приказати или сакрити. За преношење визуелних својстава објеката може користити алат Prenos izgleda. Он омогућава да се боја, дебљина линије, стил линије преузму са једног објекта и пренесу на више других. Након избора алата и објекта чија својства треба пренети, потребно је означити објекте који треба да усвоје одговарајуће особине. Брисање објеката могуће је избором алата Brisanje након чега је потребно означити објекат који треба обрисати. Истовремено, брисањем у графичком делу пакета, у алгебарском приказу брише се и једначина објекта.

Поједина подешавања доступна су кликом на десни тастер миша над објектом, чиме се отвара падајућа листа са опцијама за приказивање/сакривање ознаке или самог објекта, приказ трага, преименовање или брисање. У оквиру опције Podešavanje могу се одабрати дебљина или стил линије, боја, величина и облик тачке и друге карактеристике нацртаног објекта.

Из претходног можемо закључити да је рад у софтверском пакету *GeoGebra* знатно поједностављен. Бројни алати који су интегрисани у софтвер дају велике могућности за креирање нових или модификацију постојећих материјала, док је кориснички интерфејс прилагођен корисницима који немају велико искуство у раду са образовним софтверима и развијене дигиталне компетенције.

1.5.2. Изглед радног окружења и карактеристике *GeoGebra* алата намењених раду са тродимензионалним објектима

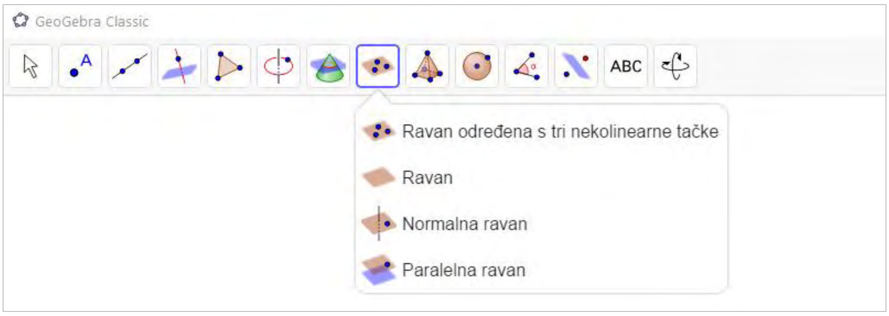
Избором опције ☐Površina za crtanje 3D у картици *Приказ*, пакет *GeoGebra* нуди могућност рада са тродимензионалним објектима (Слика 29), док се у траци са алатима појављују нови алати. У зависности од потреба, могуће је деактивирати приказ координатних оса и равни које се аутоматски приказују или активирати приказ координатне мреже ради лакшег цртања објеката.



Слика 29. *Изглед окружења за рад са 3D објектима*

Алат Presek dve površi користи се за одређивање линије пресека две површи, било да су у питању две равни, две сфере или раван и тело. За добијање линије пресека довољно је након избора алата означити жељене објекте и, уколико имају заједничких тачака, појавиће се линија пресека.

На Слици 30 приказана је група алата намењена раду са равнима. Избором алата Ravan određena s tri nekolinearne tačke а затим означавањем три тачке генерише се раван одређена тим тачкама. Слично, одабиром алата Ravan и три тачке, тачке и праве, две праве или многоугла, креира се раван коју одређују неки од поменутих објеката. Коришћењем алата Normalna ravan могуће је добити раван која садржи означену тачку и нормална је на означену праву. Аналогним поступком, уз помоћ алата Paralelna ravan настаје раван која садржи дату тачку и паралелна је са датом равни.



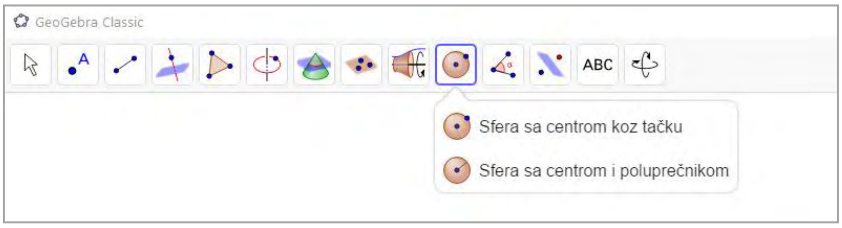
Слика 30. *Изглед алата за рад са равнима*

Група алата за рад са геометријским телима садржи укупно десет алата (Слика 31). Први од њих, алат Piramida, служи за цртање пирамиде. Након његовог избора, најпре треба одабрати или нацртати темена многоугла који ће чинити основу, а затим и изабрати тачку која ће представљати врх пирамиде. Слично, за цртање призме довољно је активирати алат Prizma и одабрати/нацртати многоугао који ће представљати доњу основу и једно теме које ће припадати горњој основи призме. Уз помоћ алата Izvuci u piramidu ili konus и Izvuci u prizmu ili cilindar могуће је постојећи многоугао или кружницу трансформисати у пирамиду или призму, односно конус или цилиндар, одабиром жељеног објекта и задавањем одговарајуће висине.

Слика 31. *Изглед алата за рад са геометријским телима*

Употребом алата Kupa и избором две тачке (центра основе и врха) а затим уносом дужине полупречника основе генерише се купа задатих димензија. Аналогно, избором Valjak и две тачке које ће представљати центар доње и горње базе, као и полупречника база добија се ваљак. Тетраедар је могуће нацртати избором алата Tetraedar а затим означавањем/цртањем двеју тачака које леже у истој равни, при чему ће основа новодобијеног тетраедра бити у тој равни. Слично, одабиром алата Kocka и двеју тачака генерише се коцка са дужином ивица једнаком растојању изабраних тачака. Уколико је потребно приказати мрежу коцке или неког другог полиедра, избором Mreža а затим означавањем жељеног објекта приказује се мрежа површи полиедра. Истовремено, у алгебарском делу пакета креира се клизач којим је могуће управљати процесом настанка мреже полиедра. На крају, алат Surface of Revolution служи како би се добио приказ површи настале ротацијом означеног графика функције или другог објекта око *x* осе за угао од 360° или мање.

Алате намењене раду са тродимензионалним објектима допуњују и два алата намењена раду са сферама (Слика 32). Алат Sfera sa centrom koz tačku омогућава цртање сфере одабиром/цртањем тачке која ће представљати центар и тачке која ће се налазити на сфери, док се алатом Sfera sa centrom i poluprečnikom може нацртати сфера задавањем центра и уносом дужине полупречника сфере.

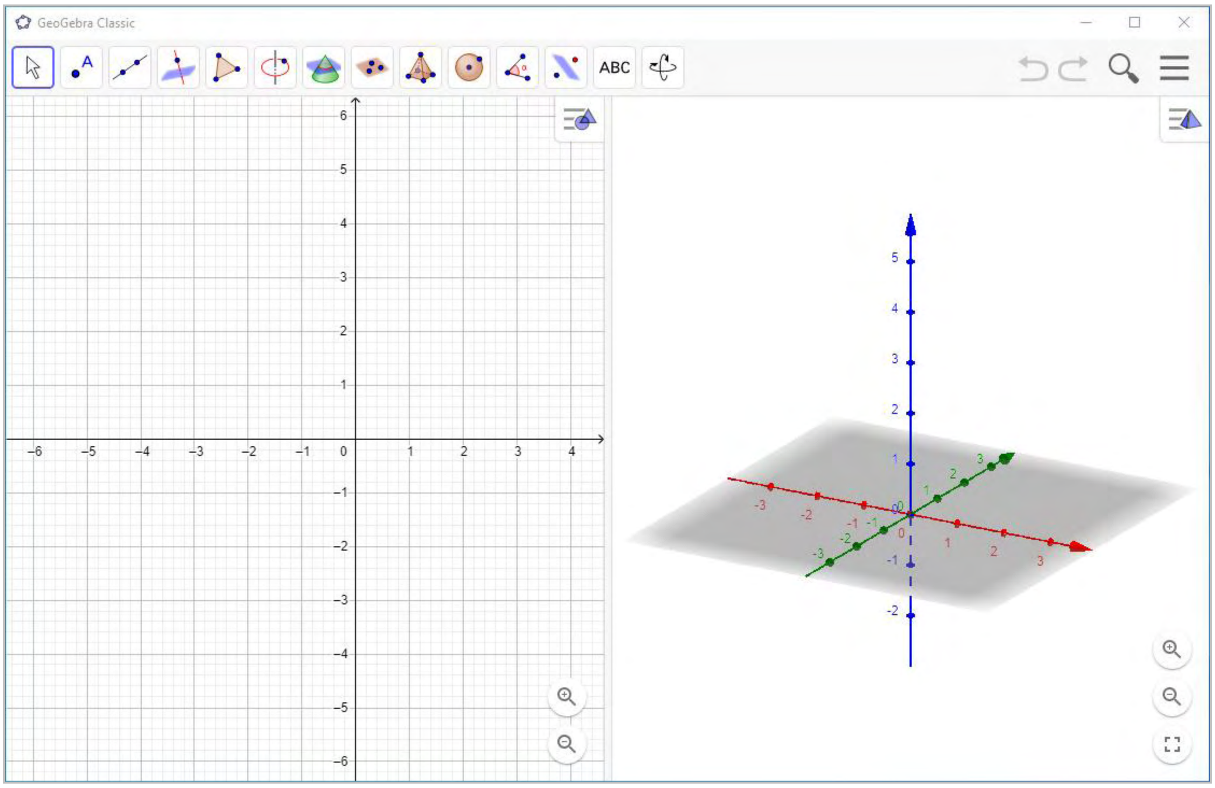


Слика 32. *Изглед алата за рад са сферама*

И палета алата за трансформације бива проширена са два нова алата. Избором алата Ravanska simetrija а затим означавањем објекта и равни симетрије креира се симетричан објекат датом. Другим алатом, Rotacija oko Prave, могуће је извршити ротацију изабраног објекта за жељени угао око дате праве.

Поред алата који се користи како би се одредила површина изабраног многоугла или дела равни ограниченог кружницом или елипсом, активирањем дела пакета *GeoGebra* за рад са 3D објектима постаје доступан и алат Zapremina након чијег избора је потребно кликнути на жељени објекат (пирамиду, призму, лопту, ваљак итд.) и вредност запремине се појављује у виду текста у графичком приказу. Доступни су и додатни општи алати који олакшавају праћење насталих промена. Избором Rotiraj 3D grafički prikaz а затим притиском на леви тастер миша могуће је заротирати нацртани објекат, док алат Posmatraj ispred користи за померање угла из којег се одабрани објекат посматра. Захваљујући палети додатних алата која се појављује у горњем десном углу, могуће је нацртани објекат посматрати са тачке гледишта која је потребна. Избором алата активира се ротација објекта тако да се може видети са свих страна, а помоћу клизача који се појављује испод алата могуће је подесити брзину ротације.

Посебно ваља истаћи могућност вишеструке репрезентације, односно истовременог приказа радног окружења за рад са објектима у равни и дела *GeoGebra* пакета намењеног раду са тродимензионалним објектима (Слика 33). Будући да су прикази међусобно повезани, да промене у једном приказу узрокују одговарајуће трансформације у другом, знатно је олакшана визуелизација креираних објеката и праћење насталих промена.



Слика 33. *Истовремени приказ радних окружења за рад са 2D и 3D објектима*

Све исказане карактеристике које одликују *GeoGebra* пакет, његови делови и алати, чине да рад у таквом динамичном окружењу буде што је могуће више поједностављен како би пажња ученика била усмерена искључиво на приказани садржај.

Имајући на уму да садржаје геометрије обухваћене почетном наставом математике ученици неретко доживљавају апстрактним и удаљеним, јавља се оправдана потреба за покушајем да се ти садржаји учине блиским ученицима, очигледним и визуелно пријемчивим. Из једне такве потребе проистекла је наша намера да истражимо да ли и у којој мери софтвер *GeoGebra* може помоћи ученицима млађих разреда основне школе у превазилажењу препрека са којима се сусрећу при усвајању садржаја геометрије. Желели смо да истражимо на који начин софтвер, омогућавајући истакнуту очигледност при раду са геометријским објектима, утиче на њихову лакшу визуелизацију и да ли примени софтвера треба дати предност у односу на традиционално коришћење манипулативних наставних средстава.

2. Геометрија у почетној настави математике

Математика је дуго била синоним за геометрију (Freudenthal, 1973: 401). Премда постоје и друге гране математике, упоређујући облике, предмете и њихове везе геометрија омогућава да боље разумемо свет који нас окружује. Она даје посебан допринос разумевању, интеракцији и дескрипцији средине у којој живимо и представља једну од најинтуитивнијих, најконкретнијих и најочигледнијих грана математике са којом ученици имају прилике да се сусретну током свог образовања (*The International Commission on Mathematical Instruction*, 1995).

Бајкул даје преглед разлога због којих геометрија треба да буде заступљена у настави математике (Baykul, 2005: 363, према Serin, 2018):

1) настава геометрије доприноси развијању критичког мишљења и решавања проблема;
2) геометријски појмови пружају основ за поучавање и учење других области математике, користе се приликом увођења појма разломка, рачунских операција и др.;
3) као једна од најважнијих области математике, геометрија се у великој мери користи у свакодневном животу (просторије, грађевински објекти, орнаменти за украшавање могу имати облике геометријских фигура);
4) бројни су примери примене у науци и уметности (у физици, хемији, архитектури, сликарству користе се облици и својства геометријских фигура);
5) омогућава ученицима да стекну свест о свету у којем живе;
6) геометрија може представљати и средство које ће мотивисати ученике да заволе математику (танграм, симетрична пресликавања, ротације, транслације и др.).

Глејзер наводи да резултати наставе геометрије могу бити достигнути само ако се наставом развија интелект ученика. Он истиче да је настава геометрије значајна са различитих аспеката (Глејзер, 1996: 3): 1) *логичког* – изучавање геометрије представља извор и средство активног интелектуалног развоја човека и његових менталних способности; 2) *сазнајног* – уз помоћ геометрије дете упознаје свет који га окружује, спознаје његове просторне и количинске односе; 3) *примењеног* – тродимензионална еуклидска геометрија је основа која обезбеђује спремност човека за савладавање како блиских области тако и многих професија, чини му доступним непрекидно образовање и самообразовање; 4) *историјског* – на примерима из историје развоја геометрије прати се не само развој математике, већ и људске културе у целини; 5) *филозофског* – геометрија помаже да се осмисли свет у којем живимо, да се код човека формирају развојне научне представе о реалном физичком простору.

„Геометријски појмови који су обично предвиђени програмом прва четири разреда основне школе почињу на опажајном нивоу, а затим помоћу њихових иконичних представа и кроз вербално изражавање постају све више апстрактни“ (Марјановић, 2004: 3). Премошћавању таквих препрека између стварности и геометријских апстракција доприноси обогаћивање наставног материјала и проширивање активности. Управо зато постоје различити ставови шта је геометрија и како је треба предавати. Фројдентал наглашава да је геометрија „једна од најбољих прилика која постоји да се научи како извршити математизацију стварности” (Freudenthal, 1973: 407). Он сматра да геометрија започиње као наука о физичком простору у којем деца живе и крећу се, организујући искуства до којих долазе у реакцији са окружењем.

Учењем геометрије у оквиру наставе математике ученици су у прилици да увиде линију резоновања, прецизног изношења својих ставова и доказивање основних концепата. На школском нивоу а и шире, геометрија „пружа поједностављен универзум у коме тачке и линије поштују одређена правила и где се закључци могу проверити" (Вуловић, 2011: 25). Недостатак геометријског резоновања може представљати препреку приликом учења и других математичких садржаја које би ученици лакше превазилазили трансфером знања из геометрије у друге домене (Houdement, Kuzniak, 2003; Романо, 2009б). Зато се поставља питање адекватне методичке трансформације и репрезентације садржаја геометрије у млађим разредима основне школе. Ово полазиште потврђују и резултати међународних студија које као закључак истичу чињеницу да је по својим ефектима настава геометрије неретко мање успешна у односу на друге области математике.

Разлози због којих ученици имају потешкоће у савладавању садржаја геометрије могу се пронаћи и у начину припреме, организације и реализације наставе. Осим тога, општи је став да класични приступ настави захтева од ученика да математику (а у оквиру ње и геометрију) уче меморисањем чињеница. Међутим, математика (геометрија) по својој природи од ученика захтева да критички промишља, исправно резонује и разматра различите феномене који у својим основама садрже сличне карактеристике. Да би се то постигло, није довољно користити само скице нацртане на папиру или табли (Doğan, Içel, 2011). Садржаји који се на тај начин уводе изгледају веома удаљени од свакодневног живота ученика, због чега они геометрију и доживљавају као веома тешку за учење (Soedjadi, 1991, према Fauzan, Slettenhaar, Plomp, 2002).

Геометријски појмови се код ученика формирају на начин на који су се идеје откривале кроз историју (Marjanović, 2007). Из тог разлога, зарад бољег разумевања геометријских концепата и редоследа њиховог формирања у свести деце, од велике је важности да се осврнемо и на историјски преглед уз истицање кључних момената који су представљали прекретнице у развоју геометрије.

2.1. Кратка историја геометрије од почетака до научних заснивања

Велики руски математичар Гнеденко, говорећи о разлозима зашто треба изучавати историју математике, између осталог истиче да нам она даје широку слику развоја математике, њеног настанка и проблема; да историја математике представља део свеопште историје човечанства које је математику развијало и користило се њеним резултатима; да доприноси усавршавању наставе математике и представља део општељудске културе (Гнеденко, 1996, према Дејић, Егерић, Михајловић, 2015). Имајући у виду да се геометрија одувек сматрала једним од најважнијих подручја математике (Chua, Tengah, Shahrill, Tan, Eu, 2017; *NCTM,* 1989, 1991, 1995, 2000), и историју геометрије можемо посматрати на аналоган начин.

Геометрија као научна дисциплина поникла је из свакодневне праксе и има веома дугу и богату историју. У етимолошком смислу, реч *геометрија* значи *мерење земље* (од грчких речи $\gamma\varepsilon\omega$ – земља и $\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$ – мерити). Приликом грађења домова, трасирања путева, људи су одређивали границе својих поседа, њихове димензије, а то је изискивало потребу за познавањем просторних особина објеката на које су у окружењу наилазили. Временом, законитости до којих су том приликом долазили проверaване су и потврђиване, било опажајно било експериментима. Тако грађена знања преношена су будућим генерацијама, у почетку усмено, а касније и писмено.

Забележено је да су најстарије сачуване трагове почетака геометрије направили пећински људи око 3000 година пре н. е. у долини Инда и Вавилону. За рану геометрију можемо рећи да је представљала скуп искуствено откривених принципа који су се односили на углове, дужине, површине и запремине, а насталим на основу потреба из свакодневног живота. Уколико бисмо, рецимо, емпиријски потврдили да је код једног троугла збир двеју страница већи од треће странице, а затим истим поступком потврдили да ово својство важи и код осталих троуглова, извели бисмо опште тврђење да је збир двеју страница било којег троугла већи од треће странице. Другим речима, емпиријски долазећи до појединачних сазнања, из којих су даље индукцијом изводиле општа тврђења, најстарије људске цивилизације геометрију су развијале као индуктивну науку. Такву геометрију развијали су древни Вавилонци, Египћани, Сумери, Индијци, Кинези и други (Lopandić, 1979: 3).

Херодот, грчки историчар из V века пре н. е., сматрао је да је геометрија потекла из Египта, а јавила се из потребе да се брзо и поуздано измере границе појединих поседа после поплаве Нила, јер су плављењем уклањани гранични знаци (Радојчић, 1961, према Мићић, 2019). И у Месопотамији почеци геометрије су стари колико и у Египту, археолошки налази сведоче да су у овим двема земљама одавно познавали поједине ставове о троугловима, проучавали површине правоугаоника, приближно израчунавали обим и површину круга, запремину купе и полулопте, а тачно одређивали запремину појединих пирамида, зарубљених пирамида и сл. Такође, археолошки остаци указују да су и Сумери решавали извесне задатке о дужини, ширини и површини, истоветно са решавањем квадратних, па и кубних једначина (Мићић, 2019: 65).

За египатску математику, па тако и за геометрију, сваки проблем је посматран појединачно, и за сваки је прописана одговарајућа процедура за његово решавање. Као и код Вавилонаца, није било општих разматрања нити доказивања. Искуствено, Египћани су знали да је троугао са страницама 3, 4 и 5 правоугли, а биле су им познате и друге Питагорине тројке целих бројева.

Египћани су умели да израчунају површину круга, док су множећи квадрат броја 89 и број 4 одредили да је вредност броја π приближно 3,1605 (Lučić, 2009) (Слика 34).

Претпоставимо да је приближна вредност P_o *површине круга*

са пречником d једнака површини квадрата који је описан око тог

круга. Тада је $P_o = d^2$*, односно приближна вредност броја* π *је 4.*

Ако даље површину квадрата умањимо за четири квадрата A_1

са дужинама страница $\frac{d}{6}$*, приближна вредност површине круга биће*

$$Po = d^2 - 4\left(\frac{d}{6}\right)^2 = \frac{8}{9}d^2.$$

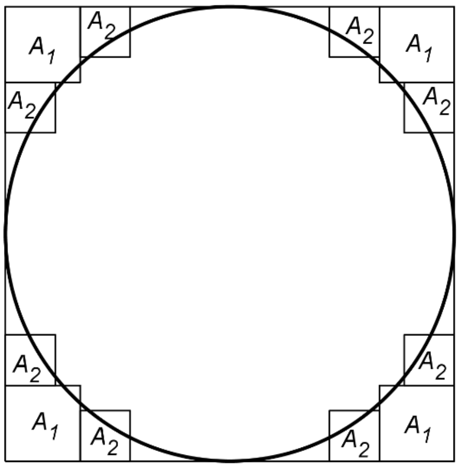
Из претходног следи да је $\pi \approx 3{,}555$.

Ако новодобијену површину поново умањимо, сада за осам квадрата A_2*,*

дужина страница $\frac{d}{9}$ *, приближна вредност површине круга биће*

$$Po = \frac{8}{9}d^2 - 8\left(\frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2.$$

Одавде следи да је $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3{,}1605$ (Lučić, 2009: 11–12).



Слика 34. *Сукцесивно смањивање површине квадрата* (Lučić, 2009)

Московски папирус који датира из око 1850. године пре н. е. сведочи да су Египћани знали и обрасце за израчунавање површине правоугаоника и троугла и израчунавање запремине правилне четворостране пирамиде.

Када су Грци око VI века пре н. е. преузели водећу улогу у науци и култури, геометрија почиње да се развија потпуно новим током. Геометрија је у Грчкој сазрела као научна теорија, која се самостално изграђује, у извесној независности од примена, да би утолико моћније захватала у своје многобројне примене. Управо у геометрији античких Грка појавила су се два велика начела науке: *систематско изношење градива* и доследност у спровођењу једне – *дедуктивне методе* (Радојчић, 1961, према Мићић, 2019: 65). Индуктивну методу налажења геометријских тврђења заменила је нова – дедуктивна метода, у оквиру које се најпре формулишу општа тврђења, да би из њих дошло до појединачних сазнања. Овој трансформацији геометрије из индуктивне у дедуктивну науку допринело је начело доказивања геометријских тврђења.

Сматра се да је до начела доказивања геометријских тврђења први дошао Талес. Прокло (412–485. године н. е.) преноси да је Талес први умео да докаже следеће геометријске ставове:

[1] „Пречник полови круг.

[2] На основици једнакокраког троугла углови су једнаки.

[3] Унакрсни углови међусобно су једнаки.

[4] Троуглови су подударни ако су ивица и на њој налегли углови једног од њих подударни одговарајућој ивици и угловима другог.

[5] Угао над пречником је прав.“ (Lučić, 2009: 16)

Начин на који је Талес изводио доказе ових ставова није поуздано познат. Због тога Божић поставља питање *Да ли је Талес ставове пронашао или доказао?* (Божић, 2010). Приметимо да је разлика велика. Искуствено познавање неких математичких резултата било је блиско још становницима Египта и Месопотамије, одакле их је Талес могао преузети путујући и истражујући. А опет, према Прокловим и Диогеновим записима, Талес је био први који је осетио потребу да ставове докаже. Премда их није дедуковао једног из другог или из неких других геометријских чињеница, Талес је закључио да ставови важе ослањањем на уверљивост слика којима их је представио (Lučić, 2009).

Могло би се рећи да је начело доказивања геометријских тврђења започело са Питагором. Питагори се приписују открића и докази бројних геометријских тврђења какви су: став о збиру унутрашњих углова троугла; први, трећи и четврти став подударности троуглова; ставови о разлагању равни на правилне троугаоне, четвороугаоне и шестоугаоне површи. Претпоставља се да је први започео учења о паралелним правама, пропорцијама, о сличним ликовима, узајамном односу правих и равни и о полиедрима. Питагорини савременици сведоче да је познавао особине пет правилних полиедара, и док се поуздано зна да је познавао начин конструкције прва три правилна полиедра, мало је вероватно да је умео да конструише додекаедар и икосаедар.

Велико достигнуће представља теорема њему у част названа Питагорина теорема. Она са једне стране представља камен темељац геометрије, а са друге превазилази искључиво геометријске оквире (Verstraelen, 2014):

Код правоуглих троуглова је квадрат на страни

наспрам правог угла (на хипотенузи) једнак квадратима

на странама које образују прав угао (на катетама). (Lučić, 2009: 71)

У зависности од тога шта се у претходној формулацији подразумева под квадратом, а шта под једнакошћу квадрата, теорема се може односити на геометријску једнакост, мерење дужи или мерење површина (Lučić, 2009).

Максима питагорејаца *Све је број* потврђивала је њихов дотадашњи став да се све може изразити као однос бројева. Међутим, откриће несамерљивих дужи сведочи да није свака ствар број (Marjanović, 2002). То сазнање, да се однос било које две дужи не може изразити као однос два позитивна цела броја, искористили су за развој геометријске алгебре померајући проблеме алгебре у геометрију, али промена фундаменталних ставова изазвала је велики потрес у целокупној геометрији, а даље утицала да се читава слика о математици промени. Изазвала је потребу да се преиспитају сва дотадашња математичка знања, да се систематишу и почну дедуктивно изводити.

Дедуктивна метода у заснивању геометрије била је широко прихваћена, не само од питагорејаца, већ и од других грчких математичара тог времена. Прокло истиче да је Хипократ са Хиоса (V век пре н. е.) творац многих открића у геометрији, а остао је упамћен и по првом покушају да се геометријска знања систематишу и изложе у дедуктивној форми (Lučić, 2009). Он је саставио прве *Елементе* пре око две и по хиљаде година и тако започео дугу историју заснивања геометрије као дедуктивне науке. Сматра се да је у том делу било сабрано све што се до тада знало у геометрији. Значај Хипократових *Елемената* у историји математике огледа се у утицају који су извршили на Еуклида при састављању нових *Елемената* (Stanković, 2006).

Посебно желимо да истакнемо најпознатије, најчитаније и најутицајније дело из геометрије свих времена – Еуклидове *Елементе* (Tabak, 2011). Написани око 325. године пре н. е., *Елементи* садрже систематски изложено, дедуктивно изведено тадашње основно, елементарно знање из геометрије (Радојчић, 1961, према Мићић, 2019: 66). Еуклидови *Елементи* нису преглед свих до тада познатих геометријских знања (Стевановић, 2013), али супериорност овог дела огледа се у чињеници да вековима после Еуклида није забележен ни покушај да се геометрија другачије утемељи. Бојер наводи да „*Елементи* нису само најраније значајно дело старогрчке математике које је дошло до нас, већ и најутицајнији уџбеник свих времена” (Boyer, 1991, према Стевановић, 2013).

Кључна карактеристика геометрије у *Елементима* је да се заснива на аксиоматским основама. Тако, прву књигу Еуклид започиње низом од 23 дефиниције којима уводи геометријске појмове као што су тачка, линија, површина (површ), права, раван и сл. Изнећемо првих десет дефиниција (Stanković, 2006: 12):

1. Тачка је оно што нема делова.
2. Линија је дужина без ширине.
3. Крајеви линије су тачке.
4. Права је линија она, која за тачке на њој подједнако лежи.
5. Површина је оно што има само дужину и ширину.
6. Крајеви површине су линије.
7. Раван је површина која за праве на њој подједнако лежи.
8. Угао у равни је узајамни нагиб двеју линија у равни које се секу и које не леже у истој правој.
9. Ако су линије које образују угао праве, угао се зове праволинијски.
10. Ако права, која стоји на другој правој, образује са овом два суседна једнака угла, сваки од њих је прав, а подигнута права зове се нормала на оној на којој стоји.

У *Елементима* Еуклид је основне ставове геометрије поделио на аксиоме и постулате. Наводи четрнаест основних тврђења, од којих је пет постулата и девет аксиома. Најпре наведимо постулате:

„Нека се претпостави:

1. Да се може повући од сваке тачке ка свакој другој тачки права линија.
2. И да ограничена права може бити продужена у свом правцу непрекидно.
3. И да се може описати од сваког средишта сваким растојањем круг.

4. И да су сви прави углови једнаки међусобно.
5. И да ће се, ако једна права у пресеку са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве бесконачно продужене сећи и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права угла.” (Stanković, 2006: 13)

Посматрано у односу на саму природу, постулати су строго геометријска тврђења. Прва три су конструктивног карактера (на њима почива теорија геометријских конструкција), док се за четврти и пети не може рећи да су конструктивног карактера. У савременој геометрији четврти Еуклидов постулат је тврђење које се доказује, док Лучић наводи да је занимљив јер је у свим тачкама простора прав угао исти, тј. простор је хомоген. Даље, Лучић истиче да пети постулат одудара од претходна четири, те га због његове неелементарности треба дедуковати из осталих аксиома геометрије, а не дозволити да буде један од основних ставова (Lučić, 2009).

Аксиоме, као и постулати, представљају нека основна тврђења, с том разликом што се не односе искључиво на геометријске објекте. Наведимо свих девет Еуклидових аксиома (Stanković, 2006: 13–14):

1. Они који су једнаки истом једнаки су међусобно.
2. И ако се једнаким додају једнаки целине су једнаке.
3. И ако се од једнаких одузму једнаки остаци су једнаки.
4. И ако се неједнаким додају једнаки целине су неједнаке.
5. И удвостручени једнаки једнаки су међусобно.
6. И половине од једнаких једнаке су међусобно.
7. И они који се могу поклопити једнаки су међусобно.
8. И целина је већа од дела.
9. И две праве не ограничавају област.

Као што се да приметити, већина аксиома је општег карактера, док су изузетак седма и девета које су изразито геометријског карактера.

Од времена античке Грчке и Еуклида, геометријска истраживања развијала су се у два правца. С једне стране, систем аксиома је проширивaн са циљем доказивања што већег броја тврђења, а са друге стране бројни су били покушаји да се Еуклидов систем аксиома редукује изостављајући пети постулат из списка постојећих основних ставова (Lučić, 2009). Непотпуност Еуклидове аксиоматике међу првима је приметио Архимед, и у свом делу *О сфери и цилиндру* додао пет аксиома сматрајући их потребним за заснивање теорије мерења геометријских фигура.

Осврнимо се на пету Архимедову аксиому, која и данас има статус једног од основних ставова геометрије:

Од двеју неједнаких линија, двеју неједнаких површина или двају
неједнаких тела, већа величина биће мања од оне величине која
се добија када мању умножимо потребан број пута.

Након Архимеда бројни су били покушаји да се употпуни систем аксиома геометрије. Табак наводи да се усавршавањем Еуклидовог дела бавио Аполоније у свом делу *Коника* и Папос у *Зборнику* (Tabak, 2011), а Станковић додаје да су се истим питањем бавили и Теон и Прокло (Stanković, 2006). Вековима су истраживачи покушавали да даље развијају геометрију као науку, али основе геометрије изложене у Еуклидовим *Елементима* нико није суштински унапредио. То је доказ да је грчка геометрија оставила неизбрисиве трагове у геометрији човечанства које ни две хиљаде каснијих година нису могле уздрмати (Радојчић, 1961, према Мићић, 2019: 65).

Током периода средњег века развој геометрије био је у извесном застоју. Тек током XVI и XVII века јавља се прожимање геометрије алгебром, али се не може говорити о аналитичкој геометрији, будући да се не заснива на координатном систему (Мићић, 2019: 67). До другог великог развоја геометрије дошло је у XIX веку, коначним разрешењем питања петог Еуклидовог постулата. Доказано је да пети постулат не зависи од осталих аксиома геометрије, чиме се после два миленијума доспело до првог геометријског резултата који је унапредио основе геометрије. Велика заслуга за овај резултат приписује се руском математичару Николају Ивановичу Лобачевском који је настојао да индиректним поступком пети постулат изведе из осталих Еуклидових постулата и аксиома. Пошавши од негације тврђења еквивалентног петом Еуклидовом постулату и не користивши нигде пети постулат у закључивању, нити његове еквиваленте, успео је да изгради потпуно нову непротивуречну теорију (Lopandić, 1979: 10). Ово достигнуће Лобачевског сматра се открићем нове, тзв. нееуклидске геометрије која се разликује од геометрије каква се среће у Еуклидовим *Елементима*. До открића исте, нееуклидске геометрије, дошао је и мађарски математичар Јанош Бољај (1802–1860), те стога поменуту геометрију данас називамо нееуклидском геометријом Лобачевског–Бољаја или хиперболичком геометријом (Lopandić, 1979).

Лучић наводи да су резултати рада Лобачевског и Бољаја постали јаснији последњих година деветнаестог века. У то време је коначно формиран поглед на логичке принципе на којима се заснива геометрија и она бива, по први пут, логички коректно заснована (Lučić, 2009: 55). Заснивању геометрије у великој мери доприноси немачки математичар Давид Хилберт који у свом делу *Основи геометрије* објављеном 1899. године на систематичан начин заснива геометрију на непротивречном, независном и потпуном систему аксиома. У овом делу Хилберт не описује појмове тачке, праве и равни, већ их узима за основне геометријске објекте (Хилберт, 1899, према Мићић, 2019: 1–2). Увео је укупно двадесет аксиома које се односе на геометријске објекте који могу имати разноврсна значења, за разлику од Еуклидових аксиома које су се односиле на конкретне геометријске објекте са потпуно одређеним значењем. Из тог разлога се сматра да Еуклидова аксиоматика има садржајни, а Хилбертова полуформални карактер (Stanković, 2006). Полуформални јер је сам Хилберт уочио могућност за изграђивање теорија које су аксиоматски потпуно формалног карактера.

У свом чувеном *Ерлангенском програму* из 1872. године немачки математичар Феликс Клајн даје решење за класификацију и карактеризацију геометрија уз употребу теорије група (Glasnović Gracin, 2010). Његова идеја била је да се испита скуп трансформација које су карактеристичне за сваку геометрију, јер је сматрао да скуп таквих карактеристичних трансформација чини групу, а свака геометрија би се могла повезати са одређеном групом трансформација. У еуклидској геометрији, на пример, скуп трансформација које је дефинишу представља скуп свих ротација и транслација које се могу применити на било коју фигуру (Tabak, 2011: 82). Клајн овакве трансформације назива Еуклидовим трансформацијама, док за њихову композицију каже да чине групу Еуклидових трансформација.

Уз помоћ реформулисане идеје пројективне геометрије, Клајн је открио и да скуп свих пројективних трансформација такође чини групу. Поредећи је са групом еуклидске геометрије, закључио је да група пројективне геометрије има сложенију структуру. Даље, упоредио је пројективну и еуклидску геометрију у односу на групу трансформација и закључио да су у кореспонденцији једна са другом (Tabak, 2011). Свака Еуклидова трансформација одговара трансформацији у пројективној геометрији, али обрнуто не важи – постоји много пројективних трансформација које нису Еуклидове. Овим је Клајн доказао да је пројективна геометрија фундаменталнија од еуклидске, да еуклидска заправо представља тек посебан случај веће и обухватније пројективне геометрије.

Један од тројице математичара који су обележили почетак двадесетог века када је развој геометрије у питању јесте и француски математичар Анри Поенкаре (1854–1912). У чувеном делу *Наука и хипотеза* из 1902. године у оквиру четвртог поглавља бави се појмовима простора и геометрије. Разликује два типа простора, геометријски простор и простор откривен помоћу чула (простор представа). Као суштинска својства геометријског простора Поенкаре истиче да је он непрекидан, бесконачан, тродимензионалан, хомоген (све његове тачке су међусобно равноправне) и изотропан (садржи једнака физичка својства у свим правцима) (Поенкаре, 1917, према Мићић, 2019: 39).

Када говори о простору сазданом од представа формираних помоћу чула Поенкаре разликује три облика: визуелни, тактилни и моторички простор (Мићић, 2019). Упоређујући визуелни и геометријски простор закључује да утисак који произлази из слике формиране на мрежњачи показује да та слика има својство непрекидности, али и само две димензије, што указује на једну од разлика између ова два простора. Даље, визуелни простор није хомоген. Различите тачке на мрежњачи имају различиту функцију, при формирању слике објекта жута мрља не може се сматрати идентичном са неком тачком са ивице мрежњаче. Трећу димензију, сматра Поенкаре, опажамо захваљујући могућности да уз помоћ вида процењујемо растојања и стварамо осећај дубине. Ова перцепција треће димензије своди се на напор потребан за извршење акомодације ока неопходне да би се јасно сагледао посматрани објекат. Овај напор може се сврстати у мишићна опажања различита од визуелних која су довела до формирања прве две димензије. Због такве, измењене улоге треће димензије, комплетан визуелни простор не може се назвати изотропним простором (Мићић, 2019).

За тактилни простор Поенкаре каже да је „сложенији од визуелног и да се још више разликује од геометријског простора“ (Мићић, 2019: 41). Поред чула вида и чула додира, истиче да и друга осећања подједнако доприносе формирању појма простора. То су мишићни осећаји који обухватају све покрете и прате сва кретања. Стога, како сваки мишић подстиче настанак посебног осећаја, укупност опажаја насталих под дејством мишића зависиће од броја промењљивих који је пропорционалан броју мишића. Посматрано на тај начин, сматра Поенкаре, број димензија моторног простора одговарао би броју мишића (Мићић, 2019: 41).

Када је однос геометријског и простора представа у питању, често се каже да „пројектујемо” објекте наших спољашњих перцепција у геометријски простор, да их „локализујемо” (Мићић, 2019: 41). Поставља се питање да ли тиме преводимо спољашње предмете у геометријски простор. Поенкаре указује на чињеницу да су представе само репродукција опажања, па се из тог разлога једино могу сместити у исти оквир у којем су и сама опажања, дакле у простор представа.

Простор представа представља само слику геометријског простора деформисану неком врстом перспективе. Из тога Поенкаре закључује да „спољашња тела не представљамо у геометријском простору, већ закључујемо о поменутим телима као да су смештена у геометријски простор“ (Мићић, 2019: 42). Говорећи о објектима који нас окружују (спољашњим телима), разликује чврста тела (објекте при чијем премештању не долази до промене њиховог облика) и тела променљивог облика. При премештању тела променљивог облика уочава појаву деформација при којима сваки део пролази кроз једноставну промену положаја приближно по истим законима као чврсто тело. Најзад, о функцији коју Поенкаре придаје чврстим телима у развоју геометрије најбоље сведочи реченица *Да нема чврстих тела у природи, не би било ни геометрије* (Мићић, 2019: 44).

Да сумирамо, математички појмови, методе и алгоритми који су садржани у програмима наставе математике у основној школи највећим делом формирани су до седамнаестог века. У литератури, овај период може се срести под називом *елементарна математика*. Један од разлога због којег смо се осврнули на радове математичара до деветнаестог века јесте што се од антике до тада настава геометрије одвијала под јаким утицајем Еуклидових *Елемената*, да би открићем нееуклидских геометрија био учињен подстицај за преиспитивање и даљи развој геометрије и наставе геометрије на свим нивоима.

2.2. Садржаји и исходи наставе геометрије у почетној настави математике

Циљеви и задаци наставе су начелни и глобални и представљају претпоставке укупног васпитно-образовног рада и наставе. Они произлазе из вредности које су значајне за одређено друштво, а васпитање у духу одређених вредности представља решење за одређивање циљева васпитања и образовања (Ђорђевић, 2010: 7). У прошлости, а и данас, у различитим друштвима постоје разлике како у односу на садржај циљева, тако и у односу на методе њиховог остваривања. На највишем нивоу обично се формулише један глобални, најопштији циљ који представља образовни идеал одређеног друштва. Тај циљ одражава најзначајније друштвене захтеве према личности – друштвену обавезу према образовању (Ђорђевић, 2010: 8).

У *Стратегији развоја образовања и васпитања у Републици Србији до 2030. године* утврђени су циљеви дугорочног развоја образовања.У складу са тим циљевима, и циљ учења предмета математика јесте „да ученик, овладавајући математичким концептима, знањима и вештинама, развије основе апстрактног и критичког мишљења, позитивне ставове према математици, способност комуникације математичким језиком и писмом и примени стечена знања и вештине у даљем школовању и решавању проблема из свакодневног живота, као и да формира основ за даљи развој математичких појмова” (*Програм наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017: 74). Основ за постизање овако формулисаног циља представљају пажљиво одабрани и адекватно методички обликовани садржаји предвиђени програмима наставе математике.

У програмима математике за основну школу садржаји геометрије заузимају значајан део (Милинковић, Мићић, 2008). У складу са тим, *Програм наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања* (2017) предвиђа реализацију следећих садржаја:

- просторне релације;
- величина предмета и бића;
- геометријска тела: лопта, коцка, квадар, ваљак, пирамида и купа;
- геометријске фигуре: круг, правоугаоник, квадрат и троугао;
- права, крива и изломљена линија;
- затворена и отворена линија;
- тачка и линија;
- дуж;
- мерење дужине нестандардним јединицама мере (*Програм наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017: 75).

У навођењу садржаја руководили смо се општим стандардима постигнућа, а у оквиру геометријских садржаја обухватили смо и садржаје који се односе на геометрију мерења. Под појмом геометрије мерења подразумевамо мерне јединице и поступке мерења геометријских величина (дужине, површине и запремине). Клементс и Батиста истичу да, иако сва мерења по својој природи нису геометријска, мерење представља суштински део геометрије (Clements, Battista, 1986).

У оквиру наведених садржаја *Програм наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања* подразумева да ће ученик на крају разреда бити у стању да:

- одреди међусобни положај предмета и бића и њихов положај у односу на тло;
- упореди предмете и бића по величини;
- уочи и именује геометријске облике предмета из непосредне околине;
- именује геометријска тела и фигуре;
- групише предмете и бића са заједничким својством;
- сложи/разложи фигуру која се састоји од познатих облика;
- разликује: криву, праву, изломљену, затворену и отворену линију;
- црта праву линију и дуж помоћу лењира;
- измери дужину задатом, нестандардном јединицом мере;
- преслика тачке и фигуре у квадратној мрежи на основу задатог упутства (*Програм наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017).

Програмом је предвиђено да се, од укупно 180 часова колико износи годишњи фонд часова за наставу Математике, оквирно 34 часа (око 19%) утроше за усвајање геометријских садржаја (*Програм наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017). Поређења ради, у Републици Хрватској, чији образовни систем је организационо доста сличан нашем, од 140 часова математике у току школске године, садржаји геометрије су заступљени са око 23% (*Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne školena razini 4.2*, 2019). Садржаји нашег програма обухватају пропедевтичко упознавање геометријских тела и фигура, при чему се на почетку уводе облици лопте и коцке, затим квадра и ваљка, а касније пирамиде и купе. На овом нивоу ученици геометријске фигуре упознају као целине. Препознају их само по облику, а не по карактеристичним својствима. Ученици фигуре препознају по спољашњем изгледу, што чини основу за формирање представа о геометријским фигурама. Геометрија омогућава ученику да идентификује, разликује, црта и именује различите геометријске фигуре (Дејић, Егерић, 2003). Издвајањем једне стране тродимензионалних тела, уводе се фигуре квадрата, правоугаоника, круга и троугла. Врсте линија уводе се као ивице претходно уведених геометријских облика. Појам тачке уводи се као пресек две линије, док дуж представља део праве ограничен двема тачкама. *Програм* предвиђа упознавање ученика са појмом мерења дужине, без увођења стандардних мерних јединица (*Програм наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017). Ученици врше мерења користећи се нестандардним јединицама мере и пребројавају јединичне мере. Уче да прикажу резултат мерења и упореде дужине.

Програм наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018) обухвата следеће садржаје који се односе на област геометрије:

- дуж, права и полуправа;
- тачка и права;
- отворена и затворена изломљена линија;
- графичко надовезивање дужи;
- дужина изломљене линије;
- обим геометријских фигура без употребе формула;

- цртање правоугаоника, квадрата и троугла на квадратној мрежи, на тачкастој мрежи;
- симетричне фигуре;
- подударност фигура (интуитивно);
- мерење дужине стандардним мерним јединицама (m, dm, cm) (*Програм наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања*, 2018: 44).

За крај другог разреда програм наставе и учења настоји да, ослањајући се на постојећа искуства и знања из претходног разреда, кроз следеће исходе процени да ли је ученик у стању да:

- разликује дуж, полуправу и праву;
- одреди дужину изломљене линије (графички и рачунски);
- одреди обим геометријске фигуре;
- нацрта правоугаоник, квадрат и троугао на квадратној мрежи и тачкастој мрежи;
- уочи подударне фигуре на датом цртежу;
- уочи симетричне фигуре;
- допуни дати цртеж тако да добијена фигура буде симетрична у односу на дату праву;
- изрази дужину у различитим јединицама за мерење дужине;
- измери дужину дужи и нацрта дуж дате дужине (*Програм наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања*, 2018: 44).

У оквиру годишњег фонда часова математике, програм даје оријентациони предлог од 29 часова (око 16%) предвиђених за изучавање геометријских садржаја. Наводимо као пример да су у хрватским основним школама, на нивоу другог разреда, геометријски садржаји обухваћени са око 20% часова наставе математике (*Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2*, 2019). У нашем образовном систему, ученици се у другом разреду основне школе упознају за појмом дужине изломљене линије и кроз адекватне активности врше израчунавање обима геометријске фигуре без коришћења формуле (троугла, квадрата и правоугаоника). Цртају геометријске фигуре (квадрат, правоугаоник и троугао) на квадратној, односно тачкастој мрежи. Упознају се са појмом подударности на нивоу интуиције. Уводе се стандардне мерне јединице за дужину (метар, дециметар и центиметар) које ученици користе у практичним активностима. Врши се претварање мерних јединица, већих у мање и обрнуто (*Програм наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања,* 2018).

Програм наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019) предвиђа да током школске године ученици савладају следеће садржаје геометрије:

- узајамни положаји правих (паралелне праве и праве које се секу);
- угао, врсте углова;
- троугао, врсте троуглова;
- кружница и круг;
- правоугаоник и квадрат;

- обим троугла, квадрата и правоугаоника;
- цртање паралелних и нормалних правих помоћу лењира;
- конструкције троугла и кружнице;
- пресликавање геометријских фигура на квадратној мрежи;
- мерење дужине (mm, km);
- мерење површине геометријских фигура задатом мером (*Програм наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања,* 2019: 65–66).

Ради ефикасније реализације програма наставе формулисани су исходи који указују на то да ће у оквиру садржаја који се односе на геометријске појмове и геометрију мерења по завршетку трећег разреда ученик бити у стању да са успехом:

- црта паралелне и нормалне праве, правоугаоник и квадрат;
- конструише троугао и круг;
- именује елементе угла, правоугаоника, квадрата, троугла и круга;
- разликује врсте углова и троуглова;
- одреди обим правоугаоника, квадрата и троугла, применом обрасца;
- опише особине правоугаоника и квадрата;
- преслика геометријску фигуру у квадратној или тачкастој мрежи на основу задатог упутства;
- користи геометријски прибор и софтверске алате за цртање;
- чита, упореди и претвара јединице за мерење дужине, масе, запремине течности и времена;
- упореди величине (дужина);
- измери површину геометријске фигуре задатом мером (правоугаоником, квадратом и троуглом);
- примењује концепт мерења у једноставним реалним ситуацијама (*Програм наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања,* 2019: 65–66).

Програмом наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019) предвиђено је да се у оквиру истог броја часова математике на годишњем нивоу као и у претходним разредима, 35 часова (око 19%) определи за изучавање садржаја геометрије. И овде ћемо направити паралелу са хрватским образовним системом, где су у трећем разреду геометријски садржаји обухваћени са 26% укупног броја часова математике (*Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2,* 2019). Програм предвиђа да се ученици, ослањајући се на већ уведене појмове, упознају са међусобним односима правих у равни (*Програм наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања,* 2019). На темељу већ упознатих геометријских фигура, ученици уочавају различите углове, а нормалност две праве уводи се преко појма правог угла. Ученици се упознају са појмом круга и кружнице, као и њихових елемената (центар, полупречник, пречник), затим врше класификацију врста троуглова у односу на дужине страница, као и конструисање када су познате дужине свих страница. Обим фигура (квадрата, правоугаоника, троугла) израчунава се уз употребу формуле или без ње, а уводи се и транслација једноставних геометријских фигура.

Претходно научене стандардне мерне јединице за дужину проширују се појмовима милиметра и километра и врши претварање вишеимених бројева у једноимене и обрнуто. Са појмом површине и њеног мерења ученици се упознају кроз решавање једноставних проблема поплочавања површи датом површи (квадратом, правоугаоником или троуглом), без увођења стандардних јединица мере.

Програм предлаже коришћење ИКТ и различитих софтвера који развијају логичко-комбинаторно размишљање. За геометријске садржаје, између осталог, упућује и на употребу *GeoGebre* за развијање основних геометријских појмова (за цртање троугла, праве кроз две тачке, кружнице).

Током четвртог разреда основне школе *Програм наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања* (2019) прописује да се ученици упознају са следећим садржајима који се односе на геометрију и мерење геометријских величина:

- „квадар и коцка;
- мерење површине (m^2, dm^2, cm^2, mm^2, km^2, ha, a);
- површина квадрата и правоугаоника;
- површина квадра и коцке;
- мерење запремине (m^3, dm^3, cm^3, mm^3);
- запремина квадра и коцке“ (*Програм наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања*, 2019: 40).

Поред садржаја, у истом програму формулисани су исходи према којима ученик на крају четвртог разреда треба да:

- „именује елементе и опише особине квадра и коцке;
- црта мреже и прави моделе квадра и коцке;
- препозна сликовну представу изгледа тела посматраног са различитих страна;
- прочита, упореди и претвори јединице за мерење површине и запремине;
- израчуна површину квадрата и правоугаоника;
- израчуна површину и запремину квадра и коцке;
- реши проблемске задатке у контексту мерења“ (*Програм наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања*, 2019: 40).

Програм наставе и учења прописује да се, од укупно 180 часова наставе математике у четвртом разреду, за садржаје геометрије мерења геометријских величина издвоји 40 часова (око 22%). Ако направимо паралелу са хрватским наставним програмом, уочићемо да он предвиђа да се садржаји геометрије изучавају на око 40% часова математике годишње (*Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2,* 2019). У програму се инсистира на геометрији облика и геометрији мерења (мерења површине површи). Анализом геометријских тела заокружује се прва етапа учења геометрије. Централно место заузимају коцка и квадар, а врши се и повезивање важних геометријских појмова из претходних разреда (фигура, линија, тачка, страна, ивица, теме, паралелност, нормалност, подударност). Својства геометријских тела коцке и квадра повезују се са квадратом и правоугаоником, са акцентом на одговарајућим везама и формирању мрежа површи коцке и квадра.

Након обнављања одговарајућих стандардних мерних јединица са којима су се ученици упознали у претходним разредима, уводе се јединице мере за површину и запремину. Врши се претварање мерних јединица, вишеимених бројева у једноимене и обрнуто, као и упоређивање величина датих у истим или различитим мерним јединицама. Уводи се формула за израчунавање површине фигуре, и повезује са поплочавањем површи датом површи са којим су се ученици раније срели. На овај садржај надовезује се изградња појма површине геометријских тела (квадра и коцке) и увођење одговарајућих формула, док се аналогно са развијањем појма површине уводи и појам запремине коцке и квадра.

На основу садржаја геометрије који су обухваћени програмима наставе и учења у прва четири разреда основне школе и њиховог распореда и са циљем бољег разумевања геометријских али и других математичких појмова са којима се ученици сусрећу у даљем школовању, одређени су и дефинисани стандарди образовања. На основама *Образовних стандарда за крај обавезног образовања* 2011. године донети су *Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања* за три наставна предмета: Српски језик, Математику и Природу и друштво.

У оквиру почетне наставе математике садржани су стандарди за области: Природни бројеви и операције са њима, Геометрија, Разломци и Мерење и мере, и у оквиру сваке области описани су захтеви на три нивоа. Имајући у виду да је у фокусу нашег истраживања садржај који се према општим стандардима постигнућа налази у оквиру области Геометрија, то ћемо на овом месту изнети стандарде на сва три нивоа:

На основном нивоу ученик:

- уме да именује геометријске објекте у равни (квадрат, круг, троугао, правоугаоник, тачка, дуж, права, полуправа и угао) и уочава међусобне односе два геометријска објекта у равни (паралелност, нормалност, припадност);
- зна јединице за мерење дужине и њихове односе;
- користи поступак мерења дужине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица;
- користи поступак мерења површине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица (*Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – Математика,* 2011: 1).

На средњем нивоу ученик:

- уочава међусобне односе геометријских објеката у равни;
- претвара јединице за мерење дужине;
- зна јединице за мерење површине и њихове односе;
- уме да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника када су подаци дати у истим мерним јединицама;
- уме да израчуна површину квадрата и правоугаоника када су подаци дати у истим мерним јединицама;

- препознаје мрежу коцке и квадра и уме да израчуна њихову површину када су подаци дати у истим мерним јединицама (*Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – Математика*, 2011: 2).

На напредном нивоу ученик:

- претвара јединице за мерење површине из већих у мање;
- уме да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника;
- уме да израчуна површину квадрата и правоугаоника;
- уме да израчуна обим и површину сложених фигура у равни када су подаци дати у истим мерним јединицама;
- уме да израчуна запремину коцке и квадра када су подаци дати у истим мерним јединицама (*Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – Математика*, 2011: 3).

Видимо да су дефинисани исходи наставе геометрије у млађим разредима основне школе конкретније одређени у смислу садржаја, у односу на образовне стандарде постигнућа. Треба имати у виду и чињеницу да су образовни стандарди дефинисани пре доношења новог програма наставе математике, па из тих разлога остају и извесна ограничења која образовни стандарди са собом носе. Са друге стране, исходи дефинисани за сваки разред понаособ показују која су то специфична знања и вештине који су ученику неопходни за даље учење геометрије и других математичких појмова у вишим разредима. У Упутству за остваривање наставе и учења математике сугерише се да за развијање основних геометријских појмова и „њихову употребу у реалном контексту ученици могу користити Геогебру (цртање троугла, праве кроз две тачке, кружнице), Гугл Мапе (улице које се секу или су паралелне, растојања између објеката, полупречник и пречник кружног тока) и сл.” (*Програм наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања*, 2019: 71). Ученике треба упућивати на алате који подстичу и развијају логичко-комбинаторно размишљање.

Анализа програма показала је да ученици у млађим разредима основне школе формирају основне појмове геометрије и праве добру и стабилну основу за учење и надоградњу ових садржаја и каснијем школовању. Та чињеница пред учитеља поставља важан задатак да направи што стабилнију основу за учење ових појмова, што није лак посао. Значајан део садржаја геометрије карактерише велика апстрактност, а неке геометријске појмове тешко је представити на очигледан начин (појам тачке, праве, полуправе, угла и др.). Оно што још карактерише садржаје геометрије јесте да су међусобно условљени, јер формирање једног појма зависи од тога да ли је појам на који се тај појам ослања формиран. Можда је то један од разлога што ученици постижу слабије резултате у учењу садржаја геометрије (Марушић Јаблановић, Гутвајн, Јакшић, 2017; Mullis, Martin, Foy, Hooper, 2016; Ђерић, Гутвајн, Јошић, Шева, 2020).

Стога је оправдано свако разматрање питања који методички приступ води ка формирању стабилних основа геометрије у млађим разредима основне школе, односно постизању што бољих исхода у овој настави. То питање је и централно питање овог рада и покушај да се креира приступ учењу садржаја геометрије, о чему ће у наредним поглављима бити речи.

2.3. Постигнућа ученика из геометрије на националним и међународним тестирањима

Као једну од полазних премиса у утврђивању тренутног стања и будуће промене приступа у реализацији садржаја геометрије, сматрамо да је од изузетне важности сагледати нивое постигнућа ученика кроз резултате остварене на националним и међународним тестирањима у којима су ученици из Републике Србије учествовали у претходном периоду.

У оквиру пројекта Министарства просвете и спорта под називом *Развој школства у Републици Србији* Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања реализовао је 2006. године Национално тестирање ученика IV разреда основних школа на репрезентативном узорку ученика. Циљ истраживања био је да се измере постигнућа ученика у оквиру предмета Српски језик и Математика, и утврди утицај појединих фактора на постигнућа ученика. Узорак тестирања чинило је 5120 ученика четвртог разреда, а само испитивање обављено је у мају 2006. године. Области наставног предмета Математика у оквиру којих су ученици тестирани били су: *Природни бројеви*, *Операције са природним бројевима*, *Геометрија*, *Разломци*, *Решавање проблема из свакодневног живота*. Међу задацима које су садржали тестови налазио се и одређени број задатака из TIMSS истраживања (*Trends in International Mathematics and Science Study*), како би добијене резултате било могуће поредити са другим образовним системима.

Укупно остварено просечно постигнуће популације ученика износило је 59,5% тачно решених задатака од укупног броја задатака у тесту, са медијаном од 62,1%. За област *Геометрија* дефинисано је седам дескриптора, и то:

- ученик препознаје и именује геометријске фигуре и уочава њихове једноставне међусобне односе;
- уочава међусобне односе геометријских фигура;
- уме да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника и да израчуна површину квадрата и правоугаоника када су сви потребни подаци експлицитно дати и у истим мерним јединицама;
- уме да израчуна обим и површину сложених фигура (троугла и квадрата, квадрата и правоугаоника итд.);
- уме да израчуна површину коцке и квадра; препознаје и црта мрежу коцке и квадра;
- разуме поступак мерења дужине и површине и користи одговарајуће јединице;
- уме да рачуна дужине, обиме и површине фигура када су подаци задати у различитим мерним јединицама; користи одговарајуће јединице и познаје њихове односе (Чапрић, 2007: 34).

Резултати добијени тестирањем показали су да су укупна постигнућа ученика у области *Геометрија* 47,57%, односно, посматрано према претходно формулисаним дескрипторима: 62,9% ученика који су учествовали у истраживању уме да препозна и именује геометријске фигуре и да уочи једноставније међусобне односе датих фигура; 27,2% испитаних ученика у стању је да уочи међусобне односе геометријских фигура; 46,3% испитаника уме да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника и да израчуна површину поменутих четвороуглова када су сви потребни подаци дати у истим мерним јединицама; 23,3% ученика оспособљено је да израчуна обим и површину сложене фигуре; 51,0% испитаника уме да израчуна површину геометријских тела коцке и квадра и може да препозна и нацрта њихову мрежу; 72,1% тестираних ученика разуме поступак мерења дужине и површине и оспособљено је за коришћење одговарајућих мерних јединица; 41,5% испитаника у стању је да израчуна дужине и површине фигура чије су димензије дате у различитим јединицама мере, при чему користе одговарајуће јединице и познају међусобне односе тих јединица.

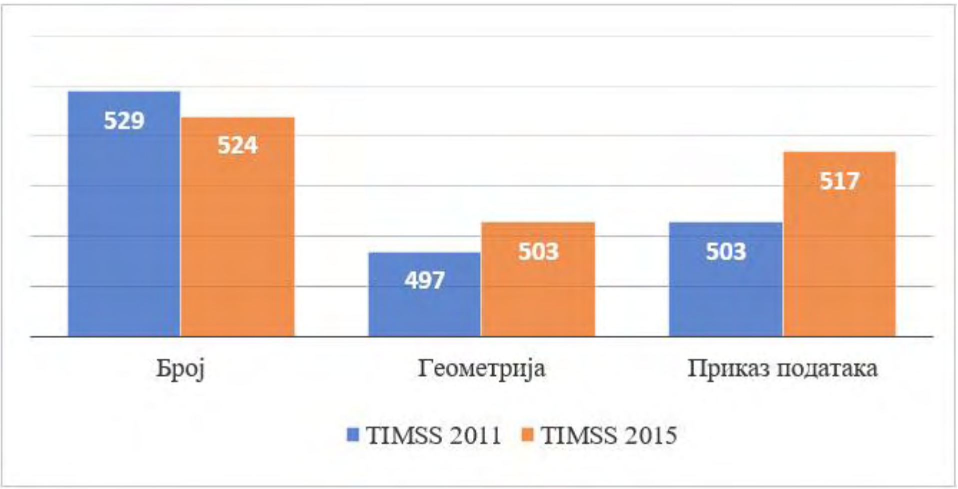
Ако се постигнућа тестираних ученика у области *Геометрија* упореде са постигнућима из других области, запазићемо да су најнижа. Док су постигнућа ученика у областима *Природни бројеви* и *Операције са природним бројевима* (68,34% и 66,29%) и областима *Разломци* и *Решавање проблема из свакодневног живота* (57,28% и 61,20%) прилично уједначена, у области *Геометрија* су знатно нижа. Овај закључак потврђују и међународна истраживања. Наиме, уочено је да су у садржинском домену геометрије постигнућа ученика из Србије слабија од укупних резултата остварених из математике (Гашић-Павишић, Станковић, 2012; Марушић Јаблановић, Гутвајн, Јакшић, 2017; Mullis, Martin, Foy, Hooper, 2016).

Један од два међународна пројекта евалуације знања у којем учествују и ученици из Србије јесте TIMSS. Носилац TIMSS истраживања јесте Међународна асоцијација за евалуацију образовних постигнућа (International Association for the Evaluation of Educational Achievement – IEA). TIMSS истраживања се реализују почев од 1995. године у циклусима од четири године и за предмет имају постигнућа ученика у области математике и природних наука. Постигнућа ученика испитују се у четвртом и осмом разреду основне школе. Србија је први пут узела учешће у циклусу TIMSS 2003, а у циклусима TIMSS 2011, TIMSS 2015 и TIMSS 2019 учествовала је у испитивању постигнућа ученика четвртог разреда.

TIMSS испитивање образовних постигнућа ученика конципирано је у односу на две димензије – димензију садржаја и когнитивну димензију. Димензија садржаја односи се на математичке садржаје организоване у три области: *Број*, *Геометрија* и *Приказ података*. Когнитивна димензија односи се на сазнајне захтеве који се срећу у задацима, у оквиру сваке области садржаја. Издвојена су три когнитивна подручја: знање (познавање чињеница, појмова и процедура), примена знања и закључивање/резоновање (укључује решавање сложенијих проблема) (Станојевић, Милинковић, 2013: 10).

У истраживачким циклусима TIMSS 2011 и TIMSS 2015 област *Број* чинила је 50% укупног броја задатака у тесту, док су области *Геометрија* и *Приказ података* заступљене у 35%, односно 15% задатака. У циклусу TIMSS 2019 дошло је до одређених промена у вези са темама *Геометрија* и *Приказ података* како би садржаји тестова у што већој мери одражавали националне планове и програме. Тако, задаци из области *Мерење и геометрија* чинили су 30%, а задаци из области *Подаци* 20% укупног броја задатака из којих се састојао тест (*IEA's Trends in International Mathematics and Science Study TIMSS 2019*). Ако направимо паралелу са бројем часова који се у почетној настави математике у нашем образовном систему посвећује појединим областима, можемо закључити да област *Број* обухвата највећи део (приближно 79%), док се преостали део наставног програма односи на садржаје геометрије и мерења и мера (приближно 21%) (Милинковић, Марушић Јаблановић, Дабић Боричић, 2017: 41). Напоменимо и да у нашим наставним програмима област *Приказ података* није засебно дефинисана.

У TIMSS 2011 испитивању просек скале математичких постигнућа ученика износио је 500 бодова, док су ученици из Србије остварили средњу вредност од 516 бодова, што је статистички значајно изнад просека скале. Посматрано према доменима садржаја, у оквиру области *Број* просек постигнућа ученика износио је 529 бодова, *Приказ података* 503, а у оквиру области *Геометрија* 497 бодова, што је испод просека скале. Четири године касније, у TIMSS 2015 ученици из Србије остварили су просечно 518 бодова, што је такође статистички значајно изнад просека TIMSS скале (Mullis et al., 2016). Милинковић са сарадницима даје упоредни графички приказ постигнућа ученика из Србије у различитим математичким областима обухваћеним TIMSS испитивањем (Графикон 1).



Графикон 1. *Приказ постигнућа ученика из Србије у пројектима TIMSS 2011 и TIMSS 2015* (Милинковић и сар., 2017)

Са графикона је могуће уочити да је постигнуће ученика у области *Геометрија* најслабије. За разлику од TIMSS 2011 када су постигнућа ученика била испод просека TIMSS скале, у TIMSS 2015 резултати су изнад TIMSS просека, али 15 бодова испод просечног броја бодова које су ученици из Србије укупно остварили. Милинковић са сарадницима запажа неуједначеност у познавању три области математичких садржаја обухваћених TIMSS испитивањем, при чему је разлика у постигнућима ученика у доменима *Број* и *Геометрија* упадљиво велика. У оквиру области *Геометрија*, у TIMSS испитивању разликују подобласт *Дводимензионални и тродимензионални облици*, у којој идентификују следеће теме:

- коришћење основних својстава како би се описали и упоредили 2D и 3D геометријски облици;
- симетрија и ротација;
- повезивање 3D облика са њиховим 2D приказом;
- рачунање обима многоугла;
- рачунање површине квадрата и правоугаоника;
- процена површине и запремине геометријских фигура помоћу датих облика или помоћу коцки (Милинковић и сар., 2017: 39).

Постигнуте резултате ученика у коришћењу основних својстава 2D и 3D геометријских облика, повезивању 3D облика са 2D приказом и рачунању обима многоугла, који су на нивоу изнад 50% оцењују као очекиване, док су постигнућа ученика у задацима у вези са симетријом и ротацијом и израчунавањем површине квадрата и правоугаоника испод 50%. Разлог томе делимично се може пронаћи и у неподударању наставног програма у Србији и дефинисаних области у TIMSS испитивању, имајући у виду да се коришћење елементарних својстава геометријских фигура, укључујући осну симетрију и ротацију, према програму не обрађују на овом нивоу обавезног образовања (Станојевић, 2014). Разлог нижих постигнућа везаних за израчунавање површине и запремине геометријских фигура може се пронаћи у податку да израчунавање запремине геометријских фигура у периоду тестирања такође није чинило саставни део програма наставе.

Када је реч о подобласти *Тачке, линије и углови*, у њој су идентификоване следеће теме:

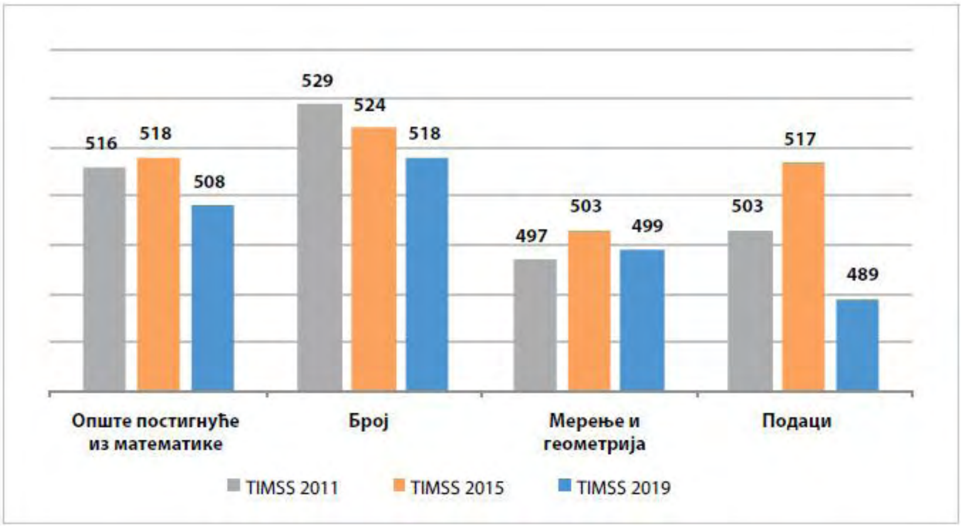
- мерење и процена дужине;
- препознавање и цртање паралелних и нормалних правих;
- препознавање, поређење и цртање различитих врста углова (прави, оштри и тупи);
- употреба неформалног координатног система за лоцирање тачке у равни (Милинковић и сар., 2017: 40).

У оквиру ове подобласти ученици су имали просечно 48,8% тачних одговора. Посматрано по темама, изузев мерења и процене дужине, у преостале три теме ученици су остварили исподпросечна постигнућа. Напоменимо да, сем коришћења неформалног координатног система, остале теме су саставни део важећих програма почетне наставе математике. Наиме, процена је да од укупног броја задатака из области математике у TIMSS 2011 испитивању 78,8% одговара садржају наставног програма у Србији (Martin, Mullis, Foy, Stanco, 2012, према Станојевић, 2014; Милинковић, Лазић, 2018).

У оба циклуса TIMSS испитивања, 2011. и 2015. године, резултати ученика четвртог разреда из области *Геометрија* лошији су од укупног просека ученика у Србији. Један од разлога могао би се пронаћи у времену које програми предвиђају за обраду одређених математичких садржаја. Чињеницу да већи број часова наставе не утиче нужно и на постизање бољих резултата ученика (Haahr, Nielsen, Hansen and Jakobsen, 2005) потврђују садржаји који се односе на израчунавање површине квадрата и правоугаоника и препознавање, поређење и цртање различитих врста углова а који су су обухваћени наставним програмом, па ипак резултати мерења ученичких постигнућа указују на недовољно познавање поменутих садржаја.

Јелић и Ђокић анализирале су актуелне уџбеничке комплете према структурним блоковима TIMSS испитивања (Јелић, Ђокић, 2017). Као закључак истраживања постављају питање да ли је било очекивано побољшање постигнућа ученика у TIMSS 2015 испитивању ако се зна да између два циклуса наставни програми нису суштински мењани, што се одразило и на структуру самих уџбеника. Пажљивијим планирањем структуре уџбеника математике за четврти разред, са нагласком на садржајима геометрије, ауторке истичу да би ученици овладали вишим нивоима геометријског знања што би резултирало повећањем нивоа постигнућа.

И на последњем циклусу TIMSS 2019, чији резултати су објављени у децембру 2020. године, просечна постигнућа ученика четвртог разреда из Србије када је математика у питању износе 508 поена и статистички су значајно виша од просека међународне скале који износи 500 поена. Иако изнад међународног просека, у поређењу са претходна два циклуса TIMSS 2011 и TIMSS 2015, математичка постигнућа ученика на последњем тестирању статистички су значајно нижа у односу на TIMSS 2015 за чак 10 поена. У извештају о спроведеном тестирању TIMSS 2019 у Србији дат је графички приказ постигнућа ученика према садржинским доменима из математике из којег се може уочити да је до пада у постигнућима дошло у све три области обухваћене истраживањем (Графикон 2). За разлику од TIMSS 2015, када су у односу на остале области постигнућа ученика из области *Геометрија* била на најнижем нивоу, у циклусу TIMSS 2019 у домену геометрије запажа се најмањи пад у броју поена у односу на претходни циклус. Просечна постигнућа ученика из геометрије у TIMSS 2019 лошија су у односу на претходно, TIMSS 2015 тестирање, али су исто тако и незнатно виша од постигнућа остварених осам година раније.



Графикон 2. *Приказ постигнућа ученика из Србије према садржинским доменима*

(Ђерић, Гутвајн, Јошић, Шева, 2020)

За разлику од TIMSS теста који претендује на проверу формално стечених математичких знања, PISA није тест математичких знања, већ се фокусира на функционална знања и подразумева примену знања при решавању проблемских ситуација (Marković, Pikula, Zubac, 2019). Међународни програм процене ученичких постигнућа (*Programme for International Student Assessment* – PISA) у овом тренутку је највеће међународно истраживање у области образовања (Виденовић, Чапрић, 2020). По први пут је реализовано на иницијативу OECD-а (*Organisation for Economic Cooperation and Development*) 1997. године, под чијим покровитељством се и данас одржава у циклусима од три године. При увођењу студије, OECD се водио ставом да се постигнућа најбоље тестирају провером нивоа „писмености" (Божић, 2012), па тако PISA тест процењује овладавање ученика на узрасту између петнаест и шеснаест година читањем, математиком и природним наукама.

Ученици из Србије, изузев 2015. године, од 2003. године континуирано учествују у PISA тестирању. У свих пет циклуса постигнућа ученика била су статистички значајно испод просека који износи око 500 поена. На последњем циклусу PISA 2018 (реализација тестирања планираног за 2021. годину због неповољне глобалне ситуације узроковане пандемијом вируса SARS-CoV-2 одложена је за 2022. годину), компетенције ученика у оквиру математичке писмености износиле су 448 поена, што је 41 поен ниже од OECD просека (Виденовић, Чапрић, 2020). Овакви, скромни резултати из области математике, указују на потребу за дубљом анализом недовољне математичке писмености ученика у Србији. Под појмом математичке писмености, у смислу PISA тестирања, подразумева се капацитет ученика да „формулише, примењује и тумачи математику у разноврсним контекстима. Обухвата математичко резоновање и коришћење математичких концепата, алгоритама, чињеница и алата да би се описале, објасниле и предвиделе различите појаве. Помаже ученицима да препознају улогу коју математика има у свету и да доносе добро утемељене судове и одлуке какве су потребне конструктивним, ангажованим грађанима који размишљају“ (OECD, 2003, према Haahr et al., 2005: 24–25). На Графикону 3 приказана је стопа промене математичке писмености током учествовања ученика из Србије у PISA студији. Можемо закључити да се просечна вредност постигнућа није статистички значајно променила и да скоро 40% ученика није достигло ниво функционалне математичке писмености.

Графикон 3. *Тренд у средњој вредности постигнућа из математичке писмености* (Виденовић, Чапрић, 2020: 54)

Ако бисмо анализирали области у које спадају проблеми заступљени у PISA тестовима, запазићемо одређена неслагања са садржајима наставе математике у Србији (Табела 1). Неслагања су изразита у садржинским доменима бројева и мера и функција, док наши наставни програми ни једним својим делом не обухватају домене статистике и вероватноће. Оваква дискрепанца може се идентификовати као један од фактора исподпросечних постигнућа ученика.

Табела 1. *Заступљеност садржаја у PISA тестовима и наставним програмима у Србији* (Божић, 2012)

Област	PISA	Србија
Бројеви и мере	37,6%	65,9%
Геометрија	21,2%	23,5%
Алгебра	3,5%	3,5%
Функције	10,6%	2,7%
Статистика	21,2%	0,0%
Вероватноћа	5,9%	0,0%

Напослетку, садржаји геометрије који су обухваћени почетном наставом математике, број часова које програми наставе и учења предвиђају за њихову реализацију и постигнућа ученика на досадашњим тестирањима говоре у прилог томе да постоји потреба за променама у приступу настави. Поређења ради, просечна постигнућа ученика четвртог разреда из Хрватске на TIMSS 2019 тестирању готово су на истом нивоу као постигнућа ученика из Србије, али када се упореде постигнућа из домена геометрије њихови резултати су знатно виши (518 бодова наспрам ученика из Србије који су имали просечно 499 бодова). Посматрано глобално, овакви резултати потврђују став да већи број часова намењених настави одређеног предмета није у директној повезаности и са остваривањем бољих резултата (Haahr et al., 2005) јер, подсетимо још једном, према плану и програму за наставу математике у прва четири разреда основне школе у Хрватској предвиђено је 140 часова годишње, док је у Србији тај број далеко већи – 180 часова. Оно што се може окарактерисати као значајно за добра постигнућа ученика у раду са садржајима геометрије јесте њихова процентуална заступљеност у оквиру броја часова предвиђених планом и програмом наставе, будући да се у хрватским школама тај проценат повећава и у четвртом разреду износи 40% (око 55 часова) док је у нашем образовном систему на нивоу 20% (око 35 часова).

Још један од фактора који има утицаја на ниво ученичких постигнућа јесте припремљеност учитеља за наставу. Адекватна припрема, добра организација и употреба различитих манипулативних средстава током часа могу пружити ученицима прилику за развој математичког мишљења и допринети повећању укупне математичке писмености, а тиме и бољим резултатима у међународним студијама.

Евидентно је да су потребна побољшања на плану учења садржаја геометрије у настави математике. У овом контексту треба посебно скренути пажњу на потребу обезбеђивања и стварања услова за већу очигледност, коришћење вишеструких визуелних репрезентација које могу обезбедити софтвери. У том циљу најпре ћемо, кроз призму теоријских поставки развоја геометријског мишљења, размотрити суштину и карактеристике геометријског резоновања ученика млађег школског узраста, како бисмо на бази тога развили оквир методичког приступа у учењу садржаја геометрије.

2.4. Теоријска заснованост учења геометрије у почетној настави математике

О геометрији се може размишљати на два потпуно различита, а опет међусобно повезана начина. Први од њих односи се на просторно размишљање, обухвата начин на који ученици размишљају о облицима и простору и може се дефинисати као интуиција о облицима и међусобним односима које облици граде. Са друге стране, Џонс геометрију сматра неодвојивом од способности визуелизације. Усискин издваја чак четири димензије геометрије: 1) визуелизација, која се односи на цртање и конструкцију фигура; 2) проучавање просторних аспеката физичког света; 3) геометрија као средство за репрезентацију математичких појмова и односа који нису визуелног карактера; 4) репрезентација као формално математички систем (Usiskin, 1987, према Clements, Battista, 1992). Усискин истиче да прве три наведене димензије неизоставно захтевају употребу просторног мишљења. За подстицање просторног мишљења коришћењем разних математичких модела и промоцију примене математике у свакодневном животу крајем XIX века залагао се Феликс Клајн (Glasnović Gracin, 2010). Сматрао је да развоју просторног мишљења доприноси визуелизација у настави математике и геометрије, остварена кроз графичко приказивање и употребу разних модела.

Као што смо претходно навели, други начин размишљања о геометрији разматрао је Џонс. Он у оквиру извештаја са састанка Британског друштва за истраживања у математичком образовању (*British Society for Research into Learning Mathematics*) наводи да је са порастом интересовања за геометријске идеје постало важно стећи јасну представу о природи и развоју геометријског мишљења (Jones, 1998). Иако наглашава да математичком литературом двадесетог века доминира алгебра, Џонс повећање интересовања за геометрију везује за развој рачунарски потпомогнуте геометрије и софтверских пакета са акцентом на визуелизацији. Под појмом визуелизације подразумева могућност стварања менталних слика облика у глави, и како нека трансформација утиче на промену облика. Од ученика, као непосредних учесника математичког образовања, очекује визуелизацију облика датих у две и три димензије, док свака додатна активност која захтева трансформацију облика у мислима доприноси даљем развоју способности визуелизације.

Херкович, наглашавајући улогу визуелизације, повезује развој геометријских појмова са Ван Хилеовим нивоима (Hershkowitz, 1989, према Clements, Battista, 1992). Поменути нивои геометријског знања резултат су заједничког рада брачног пара Холанђана Дине и Пјера ван Хиле (Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele) на изградњи посебног модела развоја геометријског мишљења. Након смрти супруге, Пјер је 1986. године објавио књигу *Теорија математичког образовања – структура и увид* (*Structure and insight, a theory of mathematics education*) у намери да објасни и идентификује потешкоће које се јављају код ученика приликом учења геометрије (Mason, 2009, према Chua et al., 2017). У поменутој књизи Ван Хиле даје основу за разумевање дечијих развојних способности и предлаже пет хијерархијски постављених нивоа геометријског знања кроз које је неопходно да ученици прођу почев од препознавања геометријских облика до извођења дедуктивних доказа (Ђокић, 2014; Милинковић, Мићић, 2008; Patsiomitou, Emvalotis, 2010; Romano, 2009a; Романо, 2009б; Chua et al., 2017;). Начин нумерације нивоа геометријског знања разликује се, с обзиром на то да су нивои изворно нумерисани од 0 до 4, док је међу америчким истраживачима прихваћена нумерација од 1 до 5 (Ma, Lee, Lin, Wu, 2015; MdYunus, Mohd Ayub, Hock, 2019; Vojkuvkova, 2012; Романо, 2009б).

- Ниво 1 (ниво *визуелизације*) – на основу перцепције, ученик препознаје геометријске фигуре (облика троугла, четвороугла, круга итд.), али му њихове особине нису познате; не врши класификације и изводи закључке на основу једног примера;
- Ниво 2 (ниво *описа и анализе*) – ученик непотпуном индукцијом изводи закључке на основу неколико примера, види фигуру као скуп својстава усредсређивањем на облик унутар класе; када описује неку фигуру набраја све карактеристике, не успевајући да открије које су потребне а које довољне за њено описивање; још увек није у стању да користи дедуктивне начине закључивања;
- Ниво 3 (ниво *неформалне дедукције* или *апстрактни* или *релациони* ниво) – „развијају се способности уопштавања које укључују навођење потребног и довољног услова, као и неки вид логичке аргументације“ (Ђокић, 2013: 193); на пример, ученик зна да је квадрат четвороугао који има странице једнаких дужина и један прав угао; постоји могућност да ученик класификује геометријске фигуре на основу уочавања особина; почиње размишљати дедуктивно али још увек не разуме правило формалног дедуктивног закључивања;
- Ниво 4 (ниво *формалне дедукције*) – ученик може да препозна особине геометријских фигура, изводи средњошколске доказе помоћу исказа, разуме дефиниције и аксиоме, користи апстрактне појмове уз извођење закључака не интуитивним путем, већ заснованих на логици;
- Ниво 5 (*ригидноматематички* ниво или ниво *строгости*) – ученик резонује ослањајући се искључиво на дефиниције, аксиоме и теореме; јављају се разумевање геометријског система који није еуклидски и способност да се разуме индиректно доказивање путем коришћења контрапозиције.

Ван Хиле сматра да је прелазак са једног нивоа геометријског знања на следећи условљен структурама које су изграђене на актуелном нивоу (Chua et al., 2017). Прелазак нивоа једном речју је инваријантан, односно пут до највишег нивоа води кроз све претходне, без прескакања нивоа. Успешност приликом преласка са нивоа на ниво захтева поступност у стављању захтева пред ученике, али и у преласку са конкретног, очигледног, на појмове вишег нивоа апстракције. Сваки од поменутих пет нивоа карактеришу посебан језик, симболи и структура, при чему се, што је за нас од највеће важности, у почетној настави математике достижу нивои 1 и 2 (Gunčaga, Tkačik, Žilkova, 2017; Ma et al., 2015; Maričić, Stamatović, 2017; Ђокић, Зељић, 2017; Škrbec, Hodnik Čadež, 2015). Оно што карактерише ова два нивоа јесу именовање облика без одговарајућег објашњења, идентификација геометријских фигура и њихових односа уз изостанак логичког уређења јер ученици нису у стању да увиде суштинске везе међу објектима (Van Hiele, 1986).

Изворно, Ван Хилеови нивои односе се на учење геометрије, али се могу применити и на друге области (Jovičić, 2015a; Pegg, 1992, према Jones, 1998). Тако, неки истраживачи сматрају да се пет Ван Хилеових нивоа може проширити на укупно осам. Клементс и Батиста су предложили увођење нултог нивоа – *пре-препознавање* (Clements, Battista, 1992: 27). На овом нивоу ученици нису у стању да разликују облике због ограничене способности просторне визуелизације. Опажају геометријске облике и формирају класе фигура на основу визуелних карактеристика, у стању су да разликују квадрат и круг, али не и квадрат и троугао.

Ђокић и Зељић (2017) наводе да је јаснији поглед на Ван Хилеове нивое геометријског мишљења дао Гутиерез (Gutiérrez, 2014) који је за сваки ниво идентификовао одговарајући математички процес (Табела 2).

Табела 2. *Карактеристике математичког процеса према Ван Хилеовим нивоима* (Gutiérrez, 2014, према Ђокић, Зељић, 2017: 627)

Карактеристике математичког процеса	Ниво 2	Ниво 3	Ниво 4	Ниво 5
Препознавање и опис	Физичка својства	Математичка својства	/	/
Употреба дефиниција	/	Само дефиниције једноставних структура	Било која дефиниција	Прихватање неколико различитих еквивалентних дефиниција
Формулисање дефиниција	Листа физичких својстава	Листа математичких својстава	Скуп потребних и довољних својстава	Доказивање еквивалентних дефиниција
Класификација	Заснована на физичким својствима	Заснована на математичким својствима	Дефиниције се мењају	/
Доказивање	/	Емпиријска провера путем примера	Неформални дедуктивни докази	Формални дедуктивни докази

Дати приказ математичких процеса карактеристичних за сваки ниво геометријског мишљења ученика даје и јаснију оријентацију за учење и поучавање у настави геометрије и прецизније операционализовање исхода учења. Ово је посебно важно јер учење ће бити успешно само ако је у потпуности прилагођено когнитивним могућностима ученика.

Како укупно постоји пет нивоа геометријског мишљења и како би ученици напредовали са једног на други ниво, Ван Хилеови предлажу пет фаза учења сачињених од одговарајућих поступака. Ти поступци треба да помогну ученицима у савладавању одређеног нивоа геометријског мишљења. Фазе учења су следеће:

- фаза *информисања*: ученици истражују и упознају се са предметом;
- фаза *усмереног вођења*: ученици обављају одређене задатке како би кроз њих открили различите односе;
- фаза *објашњавања*: ученици откривају односе и покушавају да објасне резултате претходног рада;
- фаза *слободног усмеравања*: ученици примењују дотадашња знања за решавање сложенијих задатака добијених од учитеља;
- фаза *интегрисања*: ученици резимирају претходна знања и размишљају о учењу са циљем запамћивања обрађене информације (Van Hiele, 1996, према Abdullah, Tahir, Surif, Ibrahim, Zakaria, 2015: 106–107).

Да би достигли сваки од пет нивоа геометријског мишљења, ученици морају проћи кроз свих пет поменутих фаза учења (Abdullah et al., 2015). При преласку са једног на следећи ниво од ученика се захтева да понове претходне фазе учења на наредном нивоу мишљења (Husnaeni, 2006, према Abdullah et al., 2015). Такође, неким ученицима ће бити потребно да кроз неке фазе прођу више пута како би стекли знања о одређеном појму (Mason, 2009, према Chua et al., 2017). Можемо закључити да ће појединим ученицима бити потребно више времена како би прешли са тренутног на наредни ниво мишљења, а то се управо поклапа са ставом Ван Хилеових да се прелазак са једног нивоа на следећи не одвија у кратком временском периоду (Chua et al., 2017).

Ван Хиле истиче да фронтални облик рада, рецептивна настава заснована на пасивности и меморисању информација од стране ученика, не доприноси напретку (Romano, 2009a). У сагласју са ставом Ван Хилеа су и препоруке *Националног савета наставника математике* (*NCTM*), према којем се наставници математике морају одрећи класичног модела наставе у корист реформски оријентисане наставе у којој су ученици активни учесници процеса учења (*NCTM*, 2000). Савремени токови наставе захтевају да активност ученика буде манифестована не разумевањем излагања наставника, већ сопственим актом учења и обраде садржаја, материјала и радом над средствима очигледности и репрезентацијама објеката учења (Дамјановић, 2016). Ученици у процесу учења морају да износе претпоставке, истражују и као последицу сопствених активности доносе закључке. Да би у томе успели, неопходно је у почетној настави математике створити амбијент који је подстицајан и доприноси развоју ученикове когнитивне сфере.

Батиста теорију Ван Хилеа сматра најбољим моделом који се може употребити за дефинисање нивоа геометријског мишљења ученика (Battista, 2002, према Chua et al., 2017). Удемон и Кузниак заступају став да је Ван Хилеов приступ геометрији, иако исувише строг, у великој мери тачан, али и да не омогућава разумевање препрека на које се наилази развијањем геометријског мишљења (Houdement, Kuzniak, 2003). Ослањајући се на научне револуције Куна које замењују старе парадигме новима (Kuhn, 1962) и Гонсетове облике знања о простору (интуиција, експеримент и дедукција) (Gonseth, 1945–1955, према Houdement, Kuzniak, 2003), Удемон и Кузниак износе три парадигме у којима се огледају три приступа разумевању геометрије:

- *Геометрија I* (*природна геометрија*) представља реалност у којој су перцепције извори провере. Објекти *геометрије I* јесу материјални објекти, линије нацртане на листу папира или линије приказане на екрану рачунара (Panaoura, Gagatsis, 2010). Оваква геометрија доминира наставом математике у основним школама, односно то је геометрија која је заступљена у почетној настави математике (Jovičić, 2015a).
- *Геометрија II* (*природно-аксиоматска геометрија*) је заснована на хипотетичко дедуктивним законима аксиоматског система. Аксиоме ове геометрије су у великој мери блиске реалности и интуицији. Објекти ове парадигме постоје само у дефиницијама, па и у случају ослањања на неке карактеристике реалности и објеката реалистичног света (Ђокић, Зељић, 2017: 630). На нивоу *геометрије II* требало би да се налазе учитељи и наставници математике у основној школи.
- *Геометрија III* (*формално-аксиоматска геометрија*) заснива се на аксиомама које нису базиране на осећају и у оквиру које долази до губљења везе са реалношћу. Одликује је формално и логичко закључивање као у *геометрији II*, уз потпун систем аксиома изузет од примене у реалности. Обавезно школовање у малој мери обухвата ову геометрију, а на овом нивоу налазе се студенти – будући наставници математике у средњој школи (Romano, 2009a).

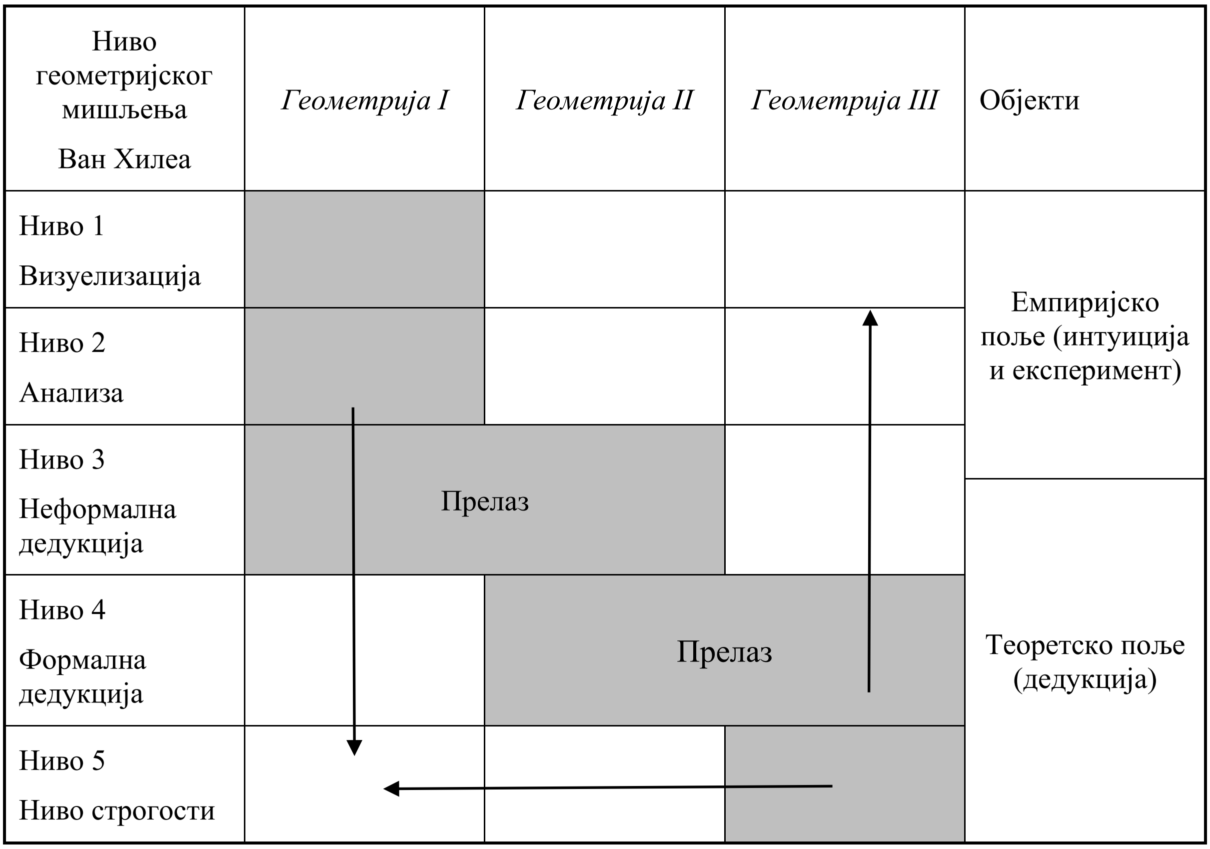
Удемон и Кузниак сматрају да су три претходно изнете парадигме хомогене, односно да је „могуће расуђивати унутар једне од њих без познавања карактеристика других” (Houdement, Kuzniak, 2003: 4). Оно што истичу као извор неразумевања непосредних учесника образовног процеса, ученика и учитеља, јесте што једни и други нису нужно смештени у истим парадигмама. Зарад лакшег превазилажења поменутих неразумевања аутори дају преглед различитих аспеката геометријских парадигми (Табела 3).

Табела 3. *Аспекти геометријских парадигми* (Houdement, Kuzniak, 2003: 5)

Аспект	*Геометрија I* (*природна геометрија*)	*Геометрија II* (*природно-аксиоматска геометрија*)	*Геометрија III* (*формално-аксиоматска геометрија*)
Интуиција	Заснована на осећају, повезана са перцепцијом, подржана експериментом	Повезана са фигурама	Интерна, у математици
Искуство	Повезано са мерљивим простором	Повезано са схемама реалности	Ослања се на логику
Дедукција	Блиска реалности и повезана са експериментом	Базирана на аксиомама	Базирана на потпуном систему аксиома
Врста простора	Интуитивни и физички простор	Физички и геометријски простор	Апстрактан Еуклидов простор
Статус слике	Објект проучавања и провере	Подршка резоновању и „фигуралном појму” (Fischbein, 1993)	Схема теоријског објекта, хеуристички алат
Повлашћени аспект	Очигледност и конструкција	Својства и демонстрација	Демонстрација и везе међу објектима; Структура

Ради објашњења промене парадигми и прелажења са једног на други ниво Ван Хилеа, Удемон и Кузниак креирају табелу која јасније приказује међусобни однос и интеракцију међу парадигмама (Табела 4).

Табела 4. *Однос геометријских парадигми и Ван Хилеових нивоа*
(Houdement, Kuzniak, 2003: 7)



Ниво геометријског мишљења Ван Хилеа	*Геометрија I*	*Геометрија II*	*Геометрија III*	Објекти
Ниво 1 Визуелизација	▨			Емпиријско поље (интуиција и експеримент)
Ниво 2 Анализа	▨			
Ниво 3 Неформална дедукција	Прелаз			
Ниво 4 Формална дедукција		Прелаз		Теоретско поље (дедукција)
Ниво 5 Ниво строгости			▨	

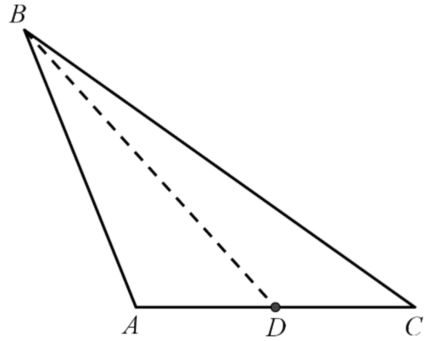
Као што се из Табеле 4 може видети, Ван Хилеов ниво 5 није део *геометрије II*. Када се јави у *геометрији I*, јавља се у виду префињене геометрије у којој алати развијени у *геометрији II* потврђују емпиријско искуство *геометрије I*. Осим тога, и хоризонти различитих парадигми су различити (Houdement, Kuzniak, 2003: 7). Док *геометрију I* одликује технолошки хоризонт, *геометрију III* карактерише формални и структурни хоризонт. *Геометрија I* обухвата Ван Хилеове нивое 2 и 3 и припада емпиријском пољу, садржи интуицију, експеримент и дедукцију материјалних објеката, односно фокусира се искључиво на физичке аспекте разматраних објеката. *Геометрија II* садржи ниво 4 и обухвата дедукцију и аксиоматски систем. *Геометрија II* представља ниво прелаза у којој веза са реалношћу остаје важна. Ниво 5 садржан је у *геометрији III* у којој долази до губљења везе са реалношћу. Дакле, разлика у схватањима Ван Хилеа и Удемона и Кузниака огледа се у томе што нивои геометријског мишљења представљају својеврсну хијерархију размишљања наспрам геометријских парадигми које настоје да одрже унутрашњу кохерентност и засноване су на хомогеним теоријама.

Оно што је од значаја за наставу геометрије јесу потешкоће које се могу јавити при прелазу између две геометријске парадигме. Ученици и учитељи најчешће се не налазе у истој парадигми, па та чињеница може представљати један од узрока потешкоћа. Наиме, ученици и садржаји наставе геометрије у основној школи налазе се на нивоу *геометрије I,* док би на нивоу геометрије *II* требало да се налазе њихови учитељи и наставници математике у основној школи.

Фишбајн сматра да када говоримо о геометријским објектима, морамо узети у обзир њихову двојну природу – *фигурални* и *појмовни* карактер (Fischbein, 1993). Обе компоненте су уско повезане и чине да разликујемо *фигуре* и *цртеже* (Fischbein, 1993; Jones, 1998; Maracci, 2001, према Larios-Osorio, 2007). Под појмом цртежа подразумевамо графички, материјализован приказ геометријског објекта. Према Фишбајну (Fischbein, 1993), цртежи одговарају фигуралном аспекту геометријског објекта и понекад садрже и информације које нису од значаја, какве су боја или дебљина. Како нисмо у могућности да геометријским објектима директно приступимо – представљамо их цртежима, односно „додељујемо им *значења* и односе које граде са другим објектима” (Larios-Osorio, 2007: 1013).

Поменута значења одговарају фигури или фигуралном аспекту геометријског објекта. У *Теорији фигуралних појмова* (*The Theory of Figural Concepts*) Фишбајн наводи да се геометрија бави менталним сликама, такозваним геометријским фигурама, које у исто време одликују и појмовни и фигурални карактер (Fischbein, 1993: 139). Као пример, Фишбајн наводи геометријску сферу која као и сваки прави појам има свој идеални модел, а поседује и фигурална својства (одређени облик). Управо због поменуте двоструке природе геометријских фигура Фишбајн их именује фигуралним појмовима, јер се идеални апсолутно савршени модели геометријских фигура не могу наћи у стварности. Троугао, круг, квадрат, тачка (која нема димензије), линија (има једну димензију), раван (има две димензије), и уопште све геометријске фигуре представљају менталне слике које поседују и појмовни и фигурални карактер. Модели или цртежи геометријских фигура само су материјализовани приказ менталних слика које не могу постојати у стварности (Fischbein, 1993: 141). На темељу Фишбајнове теорије фигуралних појмова, Двора и Драјфус под појмовни карактер геометријске фигуре укључују својства комплетности, апстрактности и генерализације, док под фигуралним карактером подразумевају својства каква су боја, величина и облик (Dvora, Dreyfus, 2004, према Patsiomitou, Emvalotis, 2010). Мариоти пак истиче однос између појмовног и фигуралног аспекта геометријских фигура (Mariotti, 1995, према Panaoura, Gagatsis, 2010). Она наводи да тачно и ефикасно геометријско мишљење карактеришу интеракција и склад између ова два аспекта геометријских фигура.

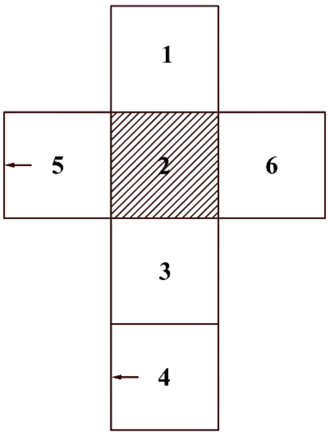
Када су дидактичке импликације теорије фигуралних појмова у питању, Фишбајн првенствено сматра да се однос објекта и дефиниције разликује у емпиријским наукама и математици. Он налази да „потешкоћа у манипулисању фигуралним аспектима, односно склоност ученика ка занемаривању дефиниције, представља велику препреку геометријском резоновању” (Fischbein, 1993: 155). Због тога сматра да ученици треба да буду обучени да се суоче са оваквом врстом конфликата. Фишбајн једну такву конфликтну ситуацију илуструје примером у којем ученици нису у стању да исправно нацртају висину из темена *B* троугла *ABC*, при чему цртају дуж *BD,* иако знају дефиницију висине троугла (Слика 35). Ученици треба да знају дефиницију висине троугла и да дати проблем реше у складу са дефиницијом, а не онако како им делује са слике (Fischbein, 1993).



Слика 35. *Проблем цртања висине* (Fischbein, 1993: 155)

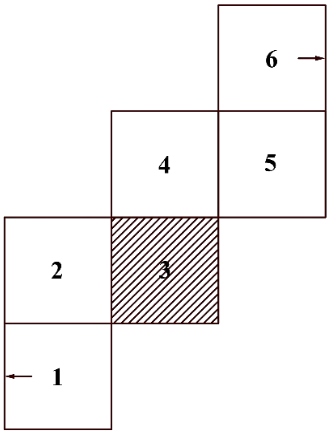
Фишбајн даље сматра да у почетној настави геометрије треба да постоји могућност вежбања менталних активности ученика у којима се захтева посебан вид сарадње између фигуре и појма (Fischbein, 1993). Такве активности изискују од ученика да манипулише објектом уз извршавање операција како над фигуром тако и над логичким односима и операцијама. При реализацији таквих задатака од ученика се захтева да: нацртају слику добијену развијањем мреже површи геометријског тела (заиста доживљено или ментално представљено); препознају геометријско тело које је могуће добити замишљајући склапање дате дводимензионе слике; кажу које ивице се могу спојити како би геометријско тело поново било конструисано (Fischbein, 1993).

Поједини од поменутих захтева прилично су једноставни, док су други прилично комплексни. Као пример, лако је увидети да Слика 36 илуструје мрежу коцке. Дакле, можемо закључити да су у овом случају фигурални и појмовни аспект добро интегрисани. На основу дате слике није тешко уочити ни суседне ивице које се поклапају приликом састављања модела коцке, док је нешто теже уочити да се и ивице на слици обележене стрелицама такође поклапају.



Слика 36. *Мрежа коцке код које су фигурални и појмовни аспект добро интегрисани* (Fischbein, 1993: 158)

Комплекснији задатак био би препознати да Слика 37 представља мрежу површи коцке. Такође, сложенији је и захтев препознати да се ивице означене стрелицама поклапају приликом формирања модела коцке. Оваква ментална конструкција не захтева од ученика само да „види” фигуру, већ да врши трансформације, да замисли положаје након трансформације и да замисли ефекат који трансформације имају на фигуре.



Слика 37. *Мрежа коцке која од ученика захтева да врши трансформације* (Fischbein, 1993: 159)

Ђокић и Зељић разматрају термин *фигурални појам* који је увео Фишбајн наглашавајући чињеницу да се ради о одређеној врсти менталног објекта (Ђокић, Зељић, 2017). Ауторке сматрају да недостатак фигуралних појмова утиче на недовољно добро описивање проблема у настави геометрије. Као један од водећих разлога сложености геометријских садржаја математичког образовања истичу чињеницу да се „фигурални појмови не формирају природно, према својим идеалним облицима“ (Ђокић, Зељић, 2017: 632). Наводе да слике и појмови међусобно врше утицај једни на друге у когнитивној активности ученика, некад сарађујући, а некад супротстављајући се једни другима.

Приступом геометрији са когнитивног и перцептуалног аспекта, ослањајући се на Пијажеову теорију когнитивног развоја, бавио се француски психолог Дувал (Duval). У средишту ове теорије налази се развој когнитивних процеса код деце, попут опажања, памћења, мишљења, менталне репрезентације и других (Jovičić, 2015b). Наиме, швајцарски психолог Жан Пијаже је, заједно са својим сарадницима, истицао биолошке факторе као фундаменталне за когнитивни развој, сматрао учење активним процесом самооткривања путем којег појединац сам конструише своје знање. Током тог процеса појединац ступа у интеракцију са окружењем и остварује напредак у развоју. Према мишљењу Пијажеа и Инхелдер, до формирања геометријских појмова долази током развојних фаза у којима ученици у почетку идентификују објекте у складу са њиховим тополошким карактеристикама, а затим и на основу аксиома Еуклида (Piaget, Inhelder, 1967). Осим тога, „мишљење детета је глобално, недиференцирано, тако да дете геометријске облике идентификује са предметима који имају то својство” (Maričić, Stamatović, 2017: 6176).

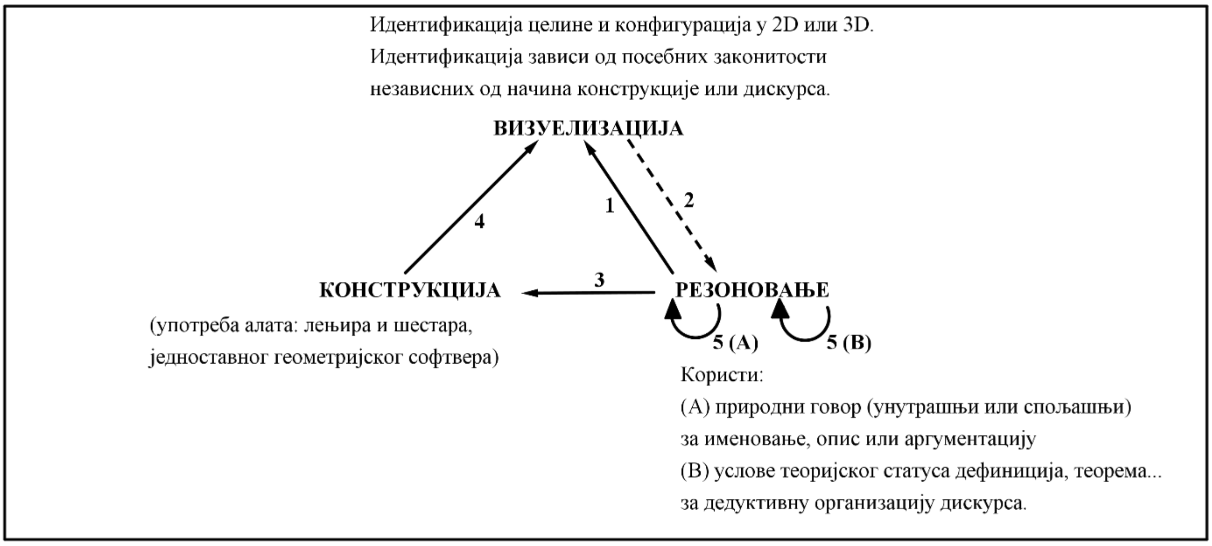
У бројним истраживањима когнитивног развоја деце Пијажеа и његових сарадника Дувал проналази методолошке и теоријске оквире за објашњење свог модела геометријског мишљења. Дувал анализира семиотику геометријских слика разликујући четири типа когнитивних схватања повезаних са начином на који особа посматра цртеж геометријске фигуре (Duval, 1995, према Jones, 1998: 31), и то:

- *перцептуално схватање*: односи се на оно што особа уочава на први поглед, на пример неки облик који је небитан за формирање геометријске фигуре;
- *секвенцијално схватање*: потребно при конструкцији или њеном опису; у том случају, фигуралне јединице нису зависне од перцептуалног схватања, већ од ограничења у математичком и техничком смислу (било да су у питању лењир и шестар, или једноставни образовни софтвер);
- *дискурзивно схватање*: перцептуално схватање је зависно од дискурзивних тврдњи јер математичке особине представљене цртежом није могуће одредити искључиво перцептивним поимањем, нешто мора бити саопштено путем говора или изведено из датих својстава;
- *оперативно схватање*: зависи од различитих модификација дате слике, дакле укључује рад на фигури, ментално или физички, чиме доприноси увиду у решење проблема.

Дувал истиче да дискурзивно и перцептуално схватање често утичу да долази до мисконцепције оперативног схватања, односно да оперативно схватање не функционише независно од других. Панаура и Гагатсис то делимично потврђују, напомињући да решавање геометријских проблема у највећем броју случајева захтева интеракцију различитих схватања (Panaoura, Gagatsis, 2010). Када је о геометрији реч, Дувал наводи да је неопходно комбиновати употребу најмање два система репрезентације, једног за својства, и другог за визуелизацију. На пример, појам „геометријске фигуре” врши повезивање дискурзивних и визуелних репрезентација, чак и онда када је у зависности од потреба конкретне математичке активности истакнута само једна од њих (Duval, 2006).

Мању Гера и Вијалакшми преносе да је, према мишљењу Дувала, модел учења у којем су различити начини резоновања хијерархијски постављени неприкладан (Manju Gera, Vijaylakshmi, 2015). Уместо да се разликују по нивоима, различити когнитивни процеси имају своје специфичности и независно се развијају. Дувал тврди да три врсте ових процеса формирају геометријско резоновање, и то: *визуелизација*, *конструкција* и *резоновање*. Визуелизација се односи на визуелну репрезентацију геометријског тврђења или хеуристичко истраживање сложених геометријских ситуација, при конструкцији се врши употреба геометријских инструмената, док се процес резоновања односи на дискурзивни процес ширења знања, за објашњавање и доказивање (Jones, 1998: 32). Џонс даље наводи да ова три процеса могу функционисати и одвојено (Jones, 1998). На пример, визуелизација не мора зависити од конструкције. Слично, и ако конструкција води визуелизацији, она зависи од интеракција математичких особина и ограничена је коришћеним алатима. Такође, чак и када је визуелизација помоћ при резоновању, рецимо при проналажењу доказа, у неким случајевима она може водити погрешним путем. Поред свега тога, Дувал ипак истиче да синергија сва три поменута процеса представља неопходност у циљу доброг познавања геометрије (Panaoura, Gagatsis, 2010: 747).

Џонс на сликовит начин схематски приказује везе и односе који постоје између когнитивних процеса које издваја Дувал (Слика 38).



Слика 38. *Основне когнитивне интеракције укључене у геометријске активности према Дувалу* (Jones, 1998: 32)

На схеми стрелице представљају начине на које когнитивни процеси подржавају једни друге у оквиру било које геометријске активности (Jones, 1998). Стрелица која води од визуелизације до резоновања је испрекидана јер визуелизација некада може водити погрешним путем. Стрелице које почињу и завршавају у резоновању представљају независност овог процеса од осталих, односно да се може развијати независно од конструкције или визуелизације.

Дувал посебну пажњу у радовима посвећује и улози коју динамички софтвери могу остварити у процесу учења геометрије. Сматра да приликом рада у оваквом типу софтвера ученици користе повлачење и друге интерактивне технике подржане у софтверу како би модификовали своје конструкције. У зависности од врсте, разликује три врсте операција у складу са начином модификације дате фигуре (Duval, 1988, 1995, према Duval, 1999: 18):

- *Мереолошки* начин: дата фигура може се поделити на делове различитих облика (траке, правоугаоникe) који се могу комбиновати при састављању нове фигуре. На тај начин долази до мењања облика почетне фигуре те се један многоугао може трансформисати у други;
- *Оптички* начин: може се направити већи или мањи облик, као приликом коришћења сочива. Тако се без икаквих промена објекти могу приказати другачије. Фигуре дате у равни могу се видети као да су смештене у тродимензионални простор.
- *Локацијски* начин: могуће је променити оријентацију у равни слике, што представља најмању промену. Ово углавном утиче на препознавање правих углова визуелно сачињених од вертикалних и хоризонталних линија.

Генерално гледано, Дувал је математичку активност разматрао са два аспекта. Док се видљива страна огледа у математичком објекту који има важеће процесе који се користе за решавање проблема, невидљиву страну сматрао је пресудном за когнитивне операције. Како коришћење неке од наведених операција може да допринесе решавању проблема, Дувал ово назива оперативним схватањем неке фигуре и разликује га од перцептуалног и дискурзивног схватања.

Разматрање теоријских концепција геометријског развоја ученика дало нам је основу за даља разматрања и креирање методичког оквира учења ових садржаја. Заједничка нит која повезује претходно изнете теорије огледа се у потреби за изразитом очигледношћу и способностима визуелизације. Основу на којој геометријско резоновање почива чини перцепција, поимање природе ствари на бази графичких приказа геометријских објеката. Фишбајн истиче да због немогућности директног приступа геометријским појмовима прибегавамо њиховом представљању путем цртежа и из тог разлога неопходно је да представе реалистично приказују односе које граде са другим објектима. Сам дводимензионални приказ тродимензионалног простора доводи до немогућности да се ти односи адекватно материјализују и стога захтева од ученика додатни интелектуални напор. Како би се тај напор учинио оптималним и минимализовале негативне последице визуелних репрезентација геометријских појмова треба искористити предности које у том смислу могу да пруже образовни софтвери. Осим тога, основни циљ образовних софтвера намењених раду са садржајима геометрије огледа се у прилици да ученици знања стичу помоћу одговарајућих перцепција које ће уз помоћ мишљења даље уопштавати у геометријске појмове. Дакле, очигледност никако не би требало да сама себи постане циљ, већ средство којим се формирају појмови и развија геометријско мишљење.

2.5. Очигледност и визуелизација – императиви у учењу геометрије у почетној настави математике

Очигледност се као потреба јавила још у античко доба. Још је Сократ истицао да су чула најубедљивији рецептори за примање, разумевање и схватање нових сазнања (Дејић, Егерић, Михајловић, 2015). Аристотел је говорио да они који обучавају треба да показују предмете, да речи повезују са представама о предметима и цртају предмете ради бољег истицања њихових особина (Janković, 2015; Шпијуновић, Маричић, 2016). Залагао се за увођење цртања у садржаје образовања првенствено јер је увидео колику примену и значај има у односу са чулним искуством у процесу сазнавања.

Процес стицања знања започиње перцепцијом (опажањем, чулним сазнањем), на чијим основама се стиче представа (ментална слика) о појму. Уочивши ову чињеницу и потребу за обезбеђивањем наставе која је очигледна, лако доступна учениковим чулима, чешки филозоф и један од највећих педагошких мислилаца Јан Амос Коменски у свом познатом делу *Велика дидактика* разматра очигледност као један од десет основних принципа који треба да послуже као основа за ефикасније поучавање и учење. Коменски истиче да ће учење лако напредовати ако:

1. се рад отпочне пре него што се духови искваре;
2. настаје после потребне припреме духова;
3. се иде од општег ка појединачном;
4. се иде од лакшег ка тежем;
5. се нико не оптерећује сувишношћу оного што ваља учити;
6. се полако иде напред;
7. се духови не присиљавају ни на шта чему сами не теже својевољно према своме добу и методу;
8. се све предаје уз учешће чула;
9. је за очигледну употребу;
10. се све врши по једном истом трајном методу (Коменски, 1954, према Tomčić, 2020: 46–47).

Као неопходност наставе која се заснива на чулном опажању, Коменски разматра очигледност као један од основних принципа дидактике и методике наставе. Искуства стечена чулним опажањем мисаоно се обрађују чинећи основу за лако поучавање и учење. У оквиру осмог принципа, Коменски наглашава да чула треба што више да буду ангажована како би се садржај лакше памтио „јер слух ваља стално повезивати са видом, говор са руком, не само на тај начин што ћемо причати оно што ученици треба да знају, већ ћемо и сликати да би им ствари могле кроз очи бити утиснуте у памет. Треба наизменично учити и исказивати ствари језиком и извршавати руком, и не удаљавати се од ствари све док им се није јасно утиснула у уши, очи, дух, памћење. Ако се тако поступи, невероватно је колико то помаже памћењу” (Tomčić, 2020: 47).

У делу *Велика дидактика* Коменски је формулисао и златно правило очигледности *Дела пре речи* (*Res sed verba*) (Ђукић, Ђерманов, 2012), истичући „да се пред чула износи што год се може” и то на следећи начин (Коменски, 1954, према Шпијуновић, Маричић, 2016: 106):

Што је видљиво – чулу вида,
што се чује – чулу слуха,
што мирише – чулу мириса,
што има укуса – чулу укуса,
што је опипљиво – чулу додира,
а ако више чула могу нешто у исти мах да осете,
треба то изнети пред више њих одједном.

Ваља истаћи да, иако је очигледност сматрао златним правилом наставе, Коменски је није сматрао циљем, већ средством добре наставе. За њега је очигледност претпоставка мисаоне активације ученика (Bakovljev, 1994). Сличан став може се пронаћи и код Првановића, који сматра да треба почети очигледношћу, али је неопходно што пре прећи на мисаону операцију (Првановић, 1974). Првановић наглашава да принцип очигледности нарочито долази до изражаја приликом формирања појмова, али не у свакој ситуацији и по сваку цену. Не очигледност ради очигледности, не очигледност по сваку цену или било каква очигледност, већ искључиво очигледност која омогућује формирање одговарајућег појма (Првановић, 1974: 17).

У *Педагошкој енциклопедији*, образлажући принцип очигледности, аутори полазе од чулног доживљаја и мишљења које не сматрају двема супротностима, већ говоре о њима као о дијалектичком својству (Potkonjak, Šimleša, 1989). Када је о почетној настави математике реч, принцип очигледности може се разматрати са различитих аспеката. Према традиционалном схватању, очигледност се своди на природну очигледност у оквиру непосредног посматрања и упознавања ствари или пак њихових модела који треба да омогуће што приближнију слику стварности. За разлику од традиционалног, савремено схватање принцип очигледности гледа шире него што је сазнање путем перцепција. Оно обухвата и представе маште и сећања, као и дедуктивно закључивање на основу уопштених искустава и претходно стечених знања (Дејић, Егерић, Михајловић, 2015; Шпијуновић, Маричић, 2016: 106). На тај начин очигледност прожима све етапе наставног процеса, она је у функцији мисаоне активизације ученика, односно полазне етапе у процесу сазнања и завршне фазе у смислу практичне провере сазнатог, присутна је током посматрања, у апстрактном мишљењу и примењује се у пракси (Janković, 2015).

Због првенствено визуелног карактера знања и искустава ученика о почетним математичким појмовима, у настави математике у млађим разредима основне школе потребно је уважавати принцип очигледности. Процес учења и формирања геометријских појмова има полазиште у конкретним објектима материјалног света, који су представљени путем модела. Они чине прву етапу у стварању представа о геометријским појмовима јер уколико ученик кроз сопствено искуство не сагледа све елеменете појма и мисаоно не преради то искуство, нема ни учења. Појмови у геометрији не могу се формирати ако су ученици пасивни у процесу учења и само меморишу без сагледавања садржаја учења. У том процесу треба поћи од једноставних реалних ситуација и кретати се према сложеним ситуацијама блиским учениковом поимању света, односно ситуацијама искуствено могућим у окружењу ученика (Ђокић, 2013). Будући да се ученици млађег основношколског узраста налазе у фази конкретне операторне интелигенције, сазнања о појмовима ваља започети посматрањем конкретних примера везаних за те појмове, а даље се мисаоним операцијама примењеним над чулно-искуственим сазнањима долази до самог појма (Ђокић, 2013).

Наставу геометрије на овом ступњу образовања карактерише, поред принципа очигледности, и доминантна примена индуктивног облика закључивања. Посматрање конкретних ствари а затим уопштавање њихових заједничких особина води ка формирању јасних геометријских појмова и других генерализација вишег степена сложености.

Антонијевић наглашава да се улога принципа очигледности мора посматрати из угла природе наставног садржаја који се у процесу сазнања открива и коришћених средстава (Antonijević, 2005). Зато се пред нас поставља питање *Да ли очигледност у настави омогућава откривање унутрашњих својстава предмета или упознавање само спољашњих својстава доступних чулима?* Општи одговор на ово питање био би да почетна настава математике може бити очигледна и без коришћења било каквих очигледних предмета, а исто тако не мора бити очигледна уколико коришћена средства нису адекватно примењена. Како се место и улога коју очигледна средства имају у почетној настави математике разликују, то имамо две групе средстава: 1) средства која су сама предмет проучавања, када су ученици у прилици да посматрају модел неког геометријског тела или фигуре са циљем стицања представе о конкретном посматраном појму; 2) средства која сама по себи нису предмет проучавања, већ служе како би се ученицима приближио неки процес или одређена законитост и у таквим случајевима ученици се не усмеравају на посматрање карактеристика самог средства, већ се предмет проучавања налази иза посматраног средства (Шпијуновић, Маричић, 2016). У оба случаја примењена очигледност представља процес сазнајног откривања предмета проучавања, дубљег продирања и упознавања његове суштине. Заједнички је став теоретичара и истраживача математичког образовања да процес наставе треба да одликује очигледност, да настава треба да буде прожета активним учешћем ученика у изградњи математичких, односно оно што је за нас од значаја – геометријских појмова. Будући да геометријске појмове одликује апстрактна природа, веома важну улогу у обезбеђивању очигледности имају начини репрезентације ових појмова.

Џером Брунер, један од најзначајнијих теоретичара у области развојне психологије, у својој теорији когнитивног развоја посебну пажњу посветио је начинима репрезентације математичких појмова. Наиме, предложио је теоријски модел у оквиру којег разликује три нивоа репрезентације (Bruner, 1966):

- енактивни (акциони, конкретни) – заснива се на формирању појмова путем извршавања конкретних акција уз употребу манипулативних наставних средстава;
- иконички (графички, сликовни) – подразумева ослобађање од потребе за непосредним манипулисањем наставним средствима и прелазак на визуелни приказ математичких појмова (слике геометријских фигура, тела, скице, шеме);
- симболички – физичко поступање и графички приказ појмова преводи на формални језик математике.

На нивоу енактивне репрезентације очигледност се обезбеђује кроз физичко поступање са наставним средствима (моделима геометријских фигура и тела), док је ниво иконичке репрезентације неодвојив од визуелизације и очигледност се на том нивоу достиже искључиво одговарајућим графичким приказом. За ученике је иконички ниво посебно значајан, јер представља основу за прелаз ка симболичком. Циљ учења на млађем школском узрасту јесте да се ученик добро служи иконичким начином представљања, јер ће касније те иконичке репрезентације постати основ за размишљања на симболичком нивоу реперезентације. На овом нивоу визуелне репрезентације представљају полазну тачку за учење.

Због карактеристика мишљења ученика млађег школског узраста, у процесу учења улога визуелизације посебно долази до изражаја (Маричић, Стојковић, 2021), нарочито када су садржаји геометрије у питању (Hershkowitz, Arcavi, Bruckheimer, 2001). Гузман истиче значај визуелизације која у математици може послужити за уочавање апстрактних односа називајући је још и математичком визуелизацијом (Guzman, 2002). Слично Гузману, Пресмег наводи да је визуелизација од великог значаја за представљање математике и да се почев од предшколског узраста може користити на свим образовним нивоима како би се боље разумели апстрактни појмови и симболичке репрезентације. Разликује пет компонената визуелизације: конкретне слике, слике шаблона, слике формула, кинестетичке слике и динамичке слике (Presmeg, 1986: 43). Приликом визуелних приказа није свака компонента у истој мери присутна код ученика, преовлађују конкретне слике и слике формула, док су кинестетичка и динамичка компонента најмање заступљене (Presmeg, 2006).

Гутиерез визуелизацију доживљава као „начин резоновања који за основу има визуелне и просторне елементе, менталне или физичке” (Gutierrez, 1996: 9). Дефинише четири структурна елемента визуелизације (менталне слике, спољашње репрезентације, процесе визуелизације и способности визуелизације), а процес визуелизације везује за менталне и физичке акције које укључују менталне слике. Аутор разликује визуелну интерпретацију информације која води формирању менталних слика од интерпретације менталних слика која генерише информацију. Ослањајући се на резултате истраживања просторних способности ученика, МекГи способности просторне визуелизације и просторне оријентације издваја као две посебне класе. Према његовом мишљењу, четири врсте визуелних способности неопходне су за формирање менталне слике:

- способност ученика да замисли ротацију посматраног објекта, формирање мреже површи геометријског тела и промену положаја у простору;
- способност визуелизације целине при промени положаја њених делова;
- способност замишљања покрета у тродимензионалном простору и манипулације објектима у свести;
- способност трансформације или манипулације просторним шаблонима у другом систему (McGee, 1979, према Gutierrez, 1996: 9).

Барнеа идентификује три типа способности тродимензионалне визуелизације са којима се ученици могу сусрести у раду, и то: *просторну визуелизацију*, односно способност адекватног разумевања тродимензионалних објеката представљених дводимензионалним репрезентацијама; *просторну оријентацију* која се огледа у способности замишљања приказаног објекта из другачије перспективе и *просторне односе*, односно способност визуелизације ефеката насталих применом изометријских трансформација или манипулисања посматраним објектом у свести (Barnea, 2000: 308). Оно што је карактеристично за поменуте вештине јесте да су хијерархијски постављене, при чему се просторни односи доживљавају као способности од највеће важности.

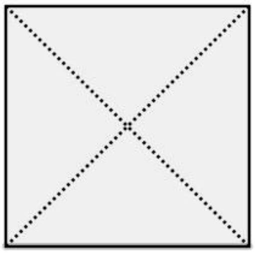
Можда једну од најцеловитијих дефиниција визуелизације, на бази одређења Цимермана и Канингема (Zimmermann, Cunningham, 1991) и Хершковича и сарадника (Hershkowitz, Ben-Chaim, Hoyles, Lappan, Mitchelmore, Vinner, 1989), дао је Арцави који сматра да „визуелизација представља способност, процес и производ стварања, интерпретације и употребе слика, илустрација, дијаграма у нашој свести, на папиру или технолошким средствима а у сврху приказивања и комуникације информацијама, размишљања и развијања претходно непознатих идеја и унапређивања разумевања” (Arcavi, 2003: 217). Дакле, илустрације, дијаграми и различити геометријски облици и модели представљају својеврсне алате за визуелизацију мисли, идеја и апстрактних математичких појмова. Будући да визуелизација није сама себи циљ, то од квалитета њихове репрезентације зависи у којој мери ће допринети разумевању појмова као крајњем циљу.

Имајући на уму да се визуелизација превасходно односи на способност представљања, трансформације и генерисања информација, Цимерман и Канингем истичу да је технолошки развој у извесној мери допринео својеврсној „ренесанси визуелизације” (Zimmermann, Cunningham, 1991). Појава образовних софтвера, њихова примена у настави, учинили су да се обим и моћ визуелизације прошири. Математика више није повезана искључиво са неколицином статичних и превасходно дводимензионалних приказа. Употреба софтвера омогућава визуелизацију не само ограниченог броја примера и извођење закључака на основу њих, већ постоје хиљаде варијација једног истог проблема (Davis, 2006; Tiwari, Obradović, Rathour, Narayan Mishra, Narayan Mishra, 2021). Њихов развој и графичке могућности дају прилику за тестирање и потврду геометријских претпоставки чиме визуелизација све више добија на значају и актуелности.

Голденберг и Куоко сматрају да се геометрија која се одвија у оквиру софтвера намењених динамичкој геометрији разликује од геометрије на папиру (Goldenberg, Cuoco, 1998). Према њиховом мишљењу, осим мисаоних процеса који се одвијају у умовима ученика, геометрија на папиру укључује само акције над статичним објектима, не инсистирајући на опису поменутих акција. Са друге стране, софтвери пружају опцију „виртуелне манипулације” (Sinclair, Bruce, 2015: 325). Софтвери дају могућност активног манипулисања објектима уз визуелизацију промена насталих мењањем сваког од параметара. Сарама и Клементс наводе да употреба динамичких софтвера подстиче ученике да постану свесни акција које врше над објектима (Sarama, Clements, 2002), рецимо свесном променом одговарајућих параметара могу трансформисати паралелограм у правоугаоник не нарушавајући притом кључна својства паралелограма.

Статични типски прикази геометријских појмова додатно могу ометати ученике да исправно закључују. Најчешће графичке репрезентације ромба и паралелограма са искошеним бочним страницама чине да ученици понекад не укључују квадрате и правоугаонике као њихове посебне случајеве, чак и када су у стању да наведу одговарајућу дефиницију појма (Fujita, 2012; Haj-Yahya, Hershkowitz, 2013). Такође, и формирање појма праве представља велику апстракцију за ученике, првенствено због њене неограничености. Шпијуновић и Маричић зато истичу да је неоходно пронаћи адекватан методички приступ и наставна средства како би се у том процесу обезбедила потребна очигледност и ученици имали прилику да визуелизују појам праве (Шпијуновић, Маричић, 2016). Манипулативним наставним средствима или пак цртањем праве на табли или папиру није могуће на најбољи начин представити неограниченост праве, будући да их није могуће неограничено продужавати. Ово је у контрадикцији са чињеницом да се дужина праве не може измерити. Са друге стране, представљањем у софтверима намењеним динамичкој геометрији ученици имају прилику да се увере да дужину праве није могуће измерити.

И Гутиерез се бавио истраживањем утицаја динамичких софтвера на развој визуелизације геометријских појмова. Сматрао је визуелизацију основном компонентом у учењу и поучавању геометрије простора, а једини начин на који уџбеници и други штампани извори могу да представе ову област геометрије јесте дводимензионални приказ (Gutierrez, 1996). До појаве софтвера учитељи су недостатке вишеструких репрезентација ублажавали коришћењем манипулативних наставних средстава, а са њиховом појавом ученици су у прилици да геометријска тела виде на екрану рачунара из више углова и по потреби их трансформишу. Као последицу таквог начина рада ученици могу да стекну богато искуство и формирају адекватнију менталну слику него када о геометријским телима сазнају искључиво из штампаних извора. Као пример, Гутиерез наводи да ученици који су појмове пирамиде или октаедра формирали само на основу њиховог типског дводимензионалног приказа не би били у стању да на Слици 39 препознају ове појмове.



Слика 39. *Дводимензионални приказ пирамиде и октаедра према Гутиерезу*

(Gutierrez, 1996: 11)

Када би ова тела била приказана у неком од софтвера намењених динамичкој геометрији ученици би могли да их заротирају, сагледају из различитих углова, у специјалним положајима, градећи тако целовиту менталну слику о посматраном појму. Додајемо да би се овакав проблем могао јавити и са другим геометријским телима (лоптом, призмом, ваљком).

3. Софтверски пакет *GeoGebra* и учење геометрије у млађим разредима основне школе

Из претходних разматрања специфичности учења геометерије, разматрања теоријских концепција развоја геометријског мишљења добили смо основу за обликовање методичког приступа у учењу и одабиру средстава која ће потпомогнути учење како би било у складу са когнитивним способностима ученика. Заједнички став свих аутора је да приступ учењу геометрије у прва четири разреда основне школе треба да буде заснован на очигледности и визуелним репрезентацијама самог појма. За већину геометријских појмова може се обезбедити очигледност путем модела конкретних објеката, али постоји велики број појмова када се та очигледност и визуелизација не могу обезбедити на тај начин, већ је потребно наћи неки други. Наше полазиште јесте да тај приступ можемо обезбедити применом софтверског пакета *GeoGebra*.

У процесу учења геометрије вишеструке репрезентације користе се како би помогле ученицима у разумевању и повезивању садржаја, омогућавају ученицима дубље разумевање појмова, њихових особина и међусобних веза. Вишеструки прикази доступни у пакету *GeoGebra* доприносе бољој репрезентацији геометријских појмова и њихових особина, нарочито када је о геометријским телима реч. У поређењу са моделима геометријских фигура и тела, чији су број и могућности приказа ограничени, број тела доступних коришћењем поменутог пакета је неограничен.

Абу Бакар и сарадници истичу предности примене *GeoGebra*-е у настави математике од основношколског до универзитетског нивоа (Abu Bakar, Mohd Ayub, Tarmizi, 2010: 93):

1) једноставна је за употребу, нуди једноставно руковање интерфејсом, поседује вишејезични мени, команде и помоћ;
2) подстиче ученичке пројекте из математике, вишеструке репрезентације и учење путем открића;
3) могуће је прилагодити радно окружење подешавањем интерфејса (величине фонта, избора језика, квалитета графике, боје, врсте координата, стила и дебљине линије);
4) осмишљена је тако да помогне ученицима у разумевању математике манипулисањем променљивим било превлачењем слободних објеката или увођењем клизача; ученици могу пратити утицај трансформације слободних објеката на промене зависних објеката;
5) класичну наставу замењује проблемски оријентисаном наставом у којој примарна улога није рецептивно учење, већ преношење знања стварањем ситуације која ће неговати формирање неопходних когнитивних структура ученика; пружа добру прилику за кооперативно учење било у малим групама, било у интерактивној настави или путем ученичких презентација;
6) стимулише учитеље да примењују ИКТ у визуелизацији математике, истраживању, интерактивним часовима математике било у учионици или на даљину.

Основе принципа рада софтвера *GeoGebra* заснивају се на учењу путем открића (Kay, Kwak, 2018; Rambe, Syahputra, Octariani, Matondang, 2020; Станковић, Јордановић, Јанковић, 2015; Tran, Nguyen, Bui, Phan, 2014), чиме његова примена на часу чини да настава буде усредсређена на ученике. Учитељ престаје да буде централна фигура наставе, његова улога се огледа у избору адекватног окружења које подстиче и усмерава ученике да снагом сопственог ума откривају нове појмове и начела (Klemer, Rapoport, 2020). Тран је са сарадницима испитивао и утврдио у којој мери *GeoGebra* може да буде од користи ученицима при учењу путем открића. Ослањајући се на динамичност којој доприноси, *GeoGebra* пружа могућност за проналажење решења многих математичких проблема, као и на отварање нових. Тиме омогућава стварање окружења које замењује класичан начин рада проблемски оријентисаном наставом подстичући ученике да истражују. Активно учење путем открића потпомогнуто софтвером за резултат има чврсту структуру знања, такво знање је дуготрајније и већег квалитета од знања стеченог класичним моделом наставе у којем ученици добијају знања у готовом облику. Активности изведене уз употребу софтвера подстичу интеграцију нових знања у базу већ постојећих знања ученика, при чему *GeoGebra* помаже у свакој фази учења путем открића (стимулација, формулисање проблема, прикупљање података, обрада података, верификација и генерализација) (Juandi, Priatna, 2018; Murni, Sariyasa, Ardana, 2017). Ученици се стављају у позицију да уче путем експеримената и открића разматрајући више потенцијалних начина решавања проблема пре извођења коначног закључка.

GeoGebra је алат који повезује теорију математике, школску математику и пројектни модел наставе (Bu, Spector, Haciomeroglu, 2011). Помаже ученицима да боље разумеју математичке појмове и представља мотивацију за достизање виших нивоа когнитивног развоја (Shadaan, Eu, 2013). Представља софтвер који омогућава ученицима да конструишу интерактивне репрезентације тачака, линија и кругова, док уопштено гледано може допринети стварању узајамних веза геометрије, мерења и алгебре (Furner, Marinas, 2012: 63). Рад у оваквом окружењу пружа и учитељима могућност да развију нове начине да повежу, прошире и обогате садржаје како би код ученика подстакли боље разумевање апстрактних математичких појмова (Furner, Marinas, 2012; Tamam, Dasari, 2021; Xistouri, Pitta-Pantazi, 2013).

Маинали наводи да ученици препознају предности које пружа рад у динамичном окружењу, јер правовремене повратне информације које омогућава рад у *GeoGebra* пакету нису доступне приликом класичног начина рада уз употребу папира и оловке (Mainali, 2014: 36). Ученици развијају математичко резоновање и вештине решавања проблема добијањем упутстава подржаних садржајима израђеним у *GeoGebra*-и. Васи и Заргав истичу бројне области математике (бројеви, појам угла, тригонометрија) за које се повећава интересовање ученика када су обухваћене радом у овом пакету (Wassie, Zergaw, 2019). Закључују да ученици испољавају већу одговорност за сопствено учење уколико оно укључује коришћење пакета *GeoGebra* и знатно се увећава њихово учешће у настави математике. Повећању интересовања ученика доприноси и могућност креирања клизача и анимирања, чиме се на динамичан начин манипулише нацртаним објектима и прате промене које том приликом настају. Са друге стране, велика база са преко милион готових садржаја (модела, активности, симулација, вежби, анимација) доступних на сајту *www.geogebra.org* представља саставни део програма, што доприноси смањењу времена и ресурса потребних учитељима да креирају адекватне материјале неопходне за извођење наставе математике (Radović, 2013).

Испитујући утицај софтвера на побољшање геометријског мишљења, Аделабу је са својим сарадницима утврдио да промене геометријских облика у динамичком окружењу какво обезбеђује *GeoGebra* подстичу ученике „да визуелно, аналитички и дедуктивно размишљају о решавању проблема” (Adelabu, Makgato, Ramaligela, 2019: 50). Ученици су у могућности да више пута изведу одређену активност, док са друге стране, у раду са папиром и оловком, изводе закључке у статичном окружењу у којем изостаје динамичност. Даље, наводи иста група аутора, у класичној настави број примера на основу којих ученици промишљају о неком појму је ограничен, јер су за цртање геометријских облика на табли потребни време и други ресурси. Наглашавају и да нису сви учитељи вешти у графичком представљању облика на табли, што може узроковати лоше разумевање геометријских појмова, односно обесхрабрити ученике и тиме довести до ниских постигнућа.

Будући да је визуелизација једна од најчешће истицаних компоненти *GeoGebra* пакета, а ниво визуелизације и први ниво Ван Хилеове теорије геометријског резоновања, то „*GeoGebra* има изразити допринос при преласку са нижег на виши ниво геометријског резоновања ученика" (Ansah, Asiedu-Addo, Kabutey, 2022: 32). Позитиван ефекат на Ван Хилеове нивое геометријског резоновања *GeoGebra* постиже и приликом увођења појма круга. Кутлуца је спровео експеримент у оквиру којег су ученици захваљујући комјутерски потпомогнутим активностима развијеним уз помоћ софтвера били у прилици да „откривају и конструишу сопствену структуру знања" (Kutluca, 2013: 1511). Радни листови које су ученици користили пружали су им упутства о активностима уместо да им дају готова знања о кругу. У интерактивном окружењу ученици су могли да померају задате облике, креирају сопствене геометријске облике, тестирајући тиме своја знања и истовремено откривајући константне и релативне односе у математичким структурама. Као резултат, употреба *GeoGebra*-е утицала је на повећање Ван Хилеових нивоа геометријског мишљења. До сличних закључака дошла је и Хуа са сарадницима. Они су испитивали степен ефикасности Ван Хилеових нивоа геометријског мишљења уз коришћење *GeoGebra*-е на садржајима ротације (Chua et al., 2017). Посебно су истакли визуелизацију којој *GeoGebra* доприноси, сматрајући је пресудном за концептуализацију појма ротације и „одскочном даском за боље разумевање теме" (Chua et al., 2017: 212).

Рамлан и сарадници покушали су да уз помоћ Ван Хилеове теорије и примене *GeoGebra* пакета открију потешкоће са којима се ученици суочавају приликом решавања проблема геометријског резоновања тродимензионалних фигура, да идентификују узроке тих потешкоћа и дају предлог корака које би требало предузети како би се потешкоће савладале (Ramlan, Cahyono, Fahinu, Hali, 2020). Као главне проблеме у разумевању тродимензионалних фигура истичу њихову апстрактну природу, недовољно развијене способности ученика за цртање и коришћење дигиталних алата за цртање тродимензионалних фигура, као и смањену способност ученика да разумеју математичке концепте. Примену Ван Хилеових нивоа геометријског мишљења допуњених применом софтвера *GeoGebra* препознају као алтернативу у предвиђању потешкоћа и њиховој елиминацији приликом учења садржаја геометрије.

Ор се бавио управо дизајнирањем задатака у виртуелном *GeoGebra* окружењу са циљем подстицања ученика да визуелизују и исправно резонују (Or, 2013). Акценат је ставио на Дувалов модел геометријског мишљења који почива на три уско повезана когнитивна процеса: визуелизацији, конструкцији и резоновању. Ор указује да је улога конструкција изведених у *GeoGebra* пакету да подстакну и олакшају синергију три претходно поменута процеса, а виртуелног окружења софтвера да „олакша презентацију сложених геометријских садржаја и омогући визуелизацију и манипулацију његовим елементима и конструкцијама" (Sousa, Alves, Azevedo, 2021: 623).

У настави геометрије од изузетног је значаја да су ученици у стању да замисле, конструишу и разумеју конструкције објеката са циљем њиховог бољег повезивања са осталим геометријским појмовима. У том смислу рецептивна настава, заснована на меморисању информација од стране ученика, не доприноси напретку ученика и развоју њиховог геометријског мишљења. Истраживања указују да услед наставе засноване на пасивном запамћивању чињеница велики број ученика није у стању да развије адекватно геометријско резоновање, разумевање геометријских појмова и вештине решавања геометријских проблема (Boo, Eu, 2016). Из тог разлога, примена интерактивних рачунарских софтвера какав је *GeoGebra* омогућава ученицима да активно учествују, самостално истражују и тако конструишу сопствено разумевање геометрије.

3.1. *GeoGebra* – алат који обезбеђује визуелизацију у учењу геометрије

Објављени научни подаци о теми визуелизације указују да визуелни стил учења преферира 61% ученика, док аудитивни и кинестетички стил преферира 33%, односно 6% (Aulakh, Khan, Sana, 2018). Са друге стране, резултати бројних истраживања потврђују значај примене пакета *GeoGebra* у визуелизацији математичких садржаја. Гокче и Гунер истраживали су фреквенцију научних радова објављених на *WoS* (*Web of Science*) сервису током протекле деценије на тему *GeoGebra* софтвера и том приликом открили су да је појам „визуелизација” међу десет најзаступљенијих појмова који га ближе одређују (Gökçe, Güner, 2022).

Многи истраживачи математичког образовања истичу да *GeoGebra* вишеструким репрезентацијама доприноси визуелизацији, демонстрацији, конструкцији, односно може послужити за откривање математике и стварање подстицајне атмосфере за учење (Hohenwarter, Fuchs, 2004; Mthethwa, Bayaga, Bossé, Williams, 2020; Nzaramyimana, Mukandayambaje, Iyamuremye, Hakizumuremyi, Ukobizaba, 2021; Ratnasari, Mariani, Mulyono, 2020; Saha, Ayub, Tarmizi, 2010). Бали налази да је *GeoGebra* користан алат који „позитивно утиче на ангажовање ученика, повећава њихову интеракцију, повећава постигнућа и помаже ученицима који се боре са визуелизацијом” (Bwalya, 2019: 25). Клогјери као предност *GeoGebra* софтвера наводи могућност визуелног представљања великог броја примера, што ученицима олакшава извођење закључака. У супротном, учитељу би било потребно много времена и ресурса како би заједно са ученицима дошао до жељених закључака (Kllogjeri, 2015). Визуелизација коју *GeoGebra* обезбеђује омогућава ученицима боље сагледавање проблема, избегавање алгебарских препрека и има позитиван утицај на решавање проблема (Iranzo, Fortuny, 2011; Murni, Sariyasa, Ardana, 2017).

Својим визуелним карактеристикама *GeoGebra* помаже учењу геометријских садржаја, пре свега полихроматски приказ буди интересовање ученика и чини да лакше усвајају садржај. Бу и Еу као узроке ниских постигнућа ученика у области геометрије идентификују „лошу способност визуелизације” (Boo, Eu, 2016:291). Међутим, наводе да визуелна својства *GeoGebra* пакета омогућавају ученицима да креирају интерактивне приказе тачака, линија и кругова, да трансформишу њихове карактеристике и мењају им положај. Управо конструисање таквих, интерактивних објеката, пружа прилику ученицима да науче да:

- користе разноврсне алате за цртање геометријских облика;
- измере углове и растојање;
- примењују клизаче како би задали опсег вредности за које ће вршити испитивање природе одређеног математичког проблема;
- идентификују обим као карактеристику геометријских фигура;
- разликују мерне јединице за дужину и површину (Furner, Marinas, 2012: 65).

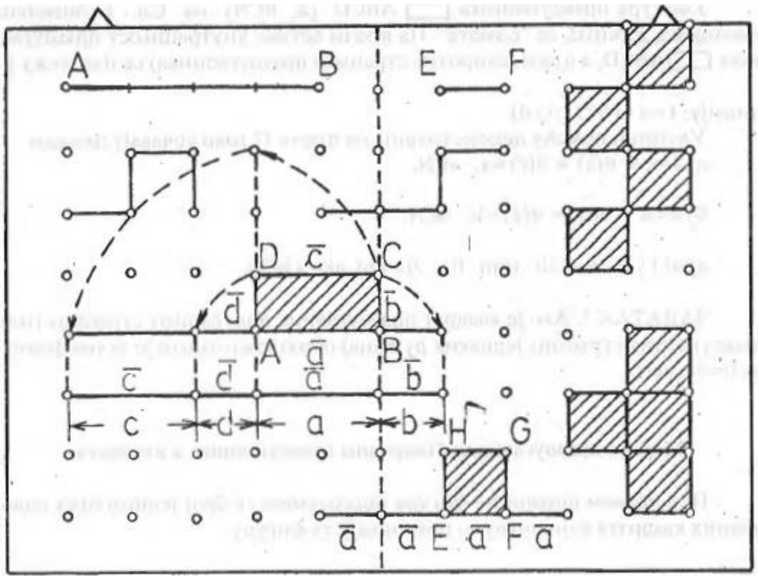
Говорећи о значају визуелизације, Идрис истиче важност просторне визуелизације и њену повезаност са добрим знањем садржаја геометрије (Idris, 2006). У студији случаја, Вагова и Кметова испитивале су колико успешно ученици са ниским нивоом просторних способности успевају да реше проблем просторне визуелизације тродимензионалних тела (Vágová, Kmetová, 2019). Ученици су проблеме решавали у два правца, коришћењем искључиво папира и оловке и комбиновањем папир–оловка окружења и рада у *GeoGebra* софтверу. Ауторке су откриле да је комбинована употреба папир–оловка окружења и динамичког софтвера помогла ученицима да потврде и исправе решења до којих су дошли решавајући проблем на први начин, те закључују да рад у динамичном окружењу помаже ученицима да „створе исправне визуелне слике и развију просторне способности" (Vágová, Kmetová, 2019: 236). Олсон наводи да софтвер пружа ученицима могућност да истражују различите варијације геометријских облика (Olsson, 2019), на пример да за унапред задат обим и/или површину правоугаоника одреде које све могу бити дужине његових страница. Хал и Лингеферд сматрају значајним што *GeoGebra* поступно, корак по корак, генерише динамичку визуелизацију основних математичких објеката (тачака, углова, дужи, кругова, правих,...) (Hall, Lingefjärd, 2016), нудећи аутономију ученицима да уче истражујући уместо да буду концентрисани искључиво на проналажење решења. Са друге стране, Ор наводи да превлачење објеката или делова објеката при извођењу конструкција у *GeoGebra* пакету пружа „визуелну верификацију валидности изведене конструкције" (Or, 2013: 93).

Поред наведених, бенефити коришћења *GeoGebra* софтвера посебно долазе до изражаја приликом графичке репрезентације тродимензионалних објеката. Будући да ученици често закључују на основу приказа на екрану рачунара, могућност истовременог вишеструког графичког приказа геометријског објекта који *GeoGebra* обезбеђује помаже ученицима да критички промишљају, исправно визуелизују и правилно тумаче односе између делова објекта. У наставку ћемо на конкретним примерима садржаја геометрије у млађим разредима основне школе илустровати које су то предности које употреба *GeoGebra* софтвера доноси.

3.2. Примена софтверског пакета *GeoGebra* у учењу геометрије

У програмима математике за основну школу садржаји геометрије заузимају значајан део и из тог разлога посебну пажњу треба обратити методичком обликовању и трансформацији ових садржаја. Бројна истраживања страних и домаћих аутора указују на проблеме и потешкоће са којима се ученици сусрећу приликом усвајања садржаја геометрије а који као узрок имају недовољно развијене способности визуелизације апстрактних геометријских појмова. Из тог разлога се потреба за изразитом очигледности и адекватним графичким приказом поменутих појмова јављају као неопходност.

У прошлости, различити аутори предлагали су могућа практична решења која би учинила садржаје математике динамичним и очигледним. Тако, Петровић и Трнинић (Петровић, Трнинић, 1996) за формирање појма дужи и дужине дужи предлажу модел дужи, односно металну плочу за коју се лепе танке намагнетисане цеви (Слика 40). Аутори наводе да уз помоћ модела ученици одређују дужине дужи, недовезују дужи, уочавају неподударне изломљене линије једнаких дужина, конструишу различите отворене и затворене линије. Истовремено, ученици закључују о особинама дужи, да свака има своју дужину, да подударне дужи имају исте дужине, да дуж састављена надовезивањем више дужи има дужину једнаку збиру дужина дужи из којих је састављена (Петровић, Трнинић, 1996).



Слика 40. *Формирање појма дужи и дужине моделом дужи*
(Петровић, Трнинић, 1996: 57)

Урбан, Мурајова и Гаџаова предлажу да се у процесу наставе математике у основној школи статични модели примењују у комбинацији са динамичним који ученицима пружају „драгоцено искуство и могућност активног манипулисања створеним моделима” (Urban, Murauyova, Gadzaova, 2017: 82). С тим у вези, учитељи данас имају бројне могућности да користе ИКТ за вишеструке репрезентације апстрактних математичких појмова коришћењем доступних образовних софтвера. Као пример једног таквог образовног софтвера наводимо пакет *GeoGebra*. Први корак у његовој успешној примени јесте обезбеђивање техничких услова за извођење оваквог модела наставе. Учионица или кабинет у којима се изводи настава требало би да буду опремљени рачунаром са инсталираним софтвером *GeoGebra*, а сам рачунар требало би повезати са пројектором или интерактивном таблом. Рачунар би требало да има приступ интернету како би материјали на сајту *www.geogebra.org* у сваком тренутку били доступни (Manganyana, Putten, Rauscher, 2020). Напоменимо и да учитељ, у зависности од оспособљености, може у складу са потребама креирати сопствене моделе и сачувати их на серверу а затим једноставно користити током реализације часа. С тим у вези, Миликић, Вуловић и Михајловић истраживали су у којој мери учитељи и наставници користе дигиталне технологије у настави математике и дошли до податка да свега 17,59% испитаника има нека сазнања о софтверу *GeoGebra* и користили су га барем једанпут на часу (Миликић, Вуловић, Михајловић, 2020). Љајко наводи са којим се проблемима сусрећу учитељи који одлуче да примене образовни софтвер у настави (Љајко, 2014: 55):

- потребно је савладати особине софтвера;
- прилагодити наставну материју приказу у рачунарском окружењу;
- саставити радне листове који на адекватан начин одражавају проблематику изучаване материје;
- детаљно испланирати активности на часу тако да се изучавано градиво и радни листови најефикасније уклопе са циљем покретања истраживачких потенцијала ученика.

Требало би обезбедити услове да ученици могу да се крећу по учионици и дођу до табле или рачунара када је потребно да изврше одређени захтев, односно прилагодити распоред седења како би сви били у прилици да виде садржај приказан на платну или табли. Приказани садржај требало би да по својим карактеристикама буде одговарајући како би ученици који седе у последњим клупама могли да га виде и активно учествују у настави.

3.3. Примена *GeoGebra* пакета у увођењу појма линије, тачке и угла

Програмима наставе и учења у млађим разредима основне школе предвиђено је да се ученици у оквиру наставе математике упознају и овладају карактеристикама геометријских фигура у равни и простору. Према редоследу изучавања, најпре упознају облике геометријских тела, равне и криве површи, предмете облика круга, правоугаоника, затим линије: праву, полуправу и дуж, и тачку и угао.

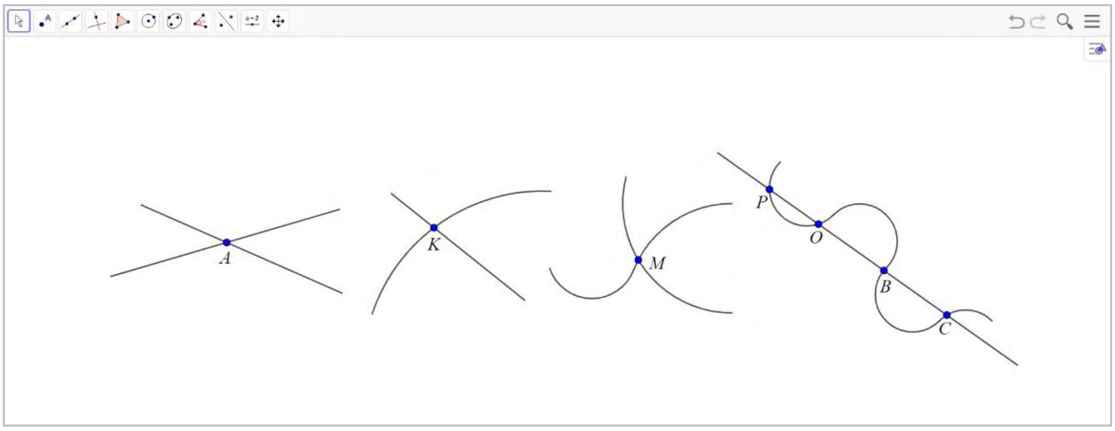
У оквиру класично организоване наставе ученици поменуте појмове усвајају посматрајући њихове моделе, слике и цртеже. Најчешће се ради о моделима израђеним од различитих материјала или статичним приказима у уџбенику, на табли или у свесци. Овакви прикази пружају ученицима ограничене могућности када је процес истраживања у питању. Ученици нису у стању да прате процес креирања графичког приказа поменутих појмова и посматрају само њихов крајњи облик. Са друге стране, употреба вишеструких визуелних репрезентација у *GeoGebra* окружењу чини да ученици у сваком тренутку могу пратити промене настале мењањем неких њихових својстава и тако доприноси дубљем разумевању ових појмова. У овом делу представићемо модел учења који подразумева примену софтверског пакета *GeoGebra* у формирању геометријских појмова код ученика млађих разреда основне школе како бисмо подстицали њихово правилно схватање. Добро разумевање основних геометријских појмова линије, тачке, угла, од изузетне је важности јер помаже ученицима да разумеју и на адекватан начин формирају остале геометријске појмове у будућем математичком образовању.

До појма *линије* ученици могу доћи тако што ћемо користити алат Olovka а затим цртати слободном руком у графичком делу пакета *GeoGebra*. Учитељ може повлачити линије у различитим правцима, а пажњу ученика усмерити на посматрање трага који остаје на подлози како би линију замислили као траг који оставља тачка која се креће (Дејић, Егерић, Михајловић, 2015). Док посматрају линије које остају на подлози ученици могу уочити да линије могу бити криве и праве, односно да је за цртање правих линија потребно користити лењир. Избор алата Oblik slobodnom rukom олакшава цртање правих линија тако што аутоматски препознаје облик и врши потребне корекције, али истовремено ученицима треба напоменути да у својим свескама за цртање правих линија морају користити лењир. Како би усвојили појам праве линије и диференцирали је у односу на криву линију треба нацртати више правих линија у различитим положајима (Слика 41). Треба омогућити ученицима да и сами покушају да нацртају праву или криву линију у *GeoGebra* пакету. Додатно, могу се променити боја, стил или дебљина линија како би визуелни ефекат био интензивнији и помогао ученицима да усвоје појам линије.

Слика 41. *Приказ криве и праве линије у пакету GeoGebra*

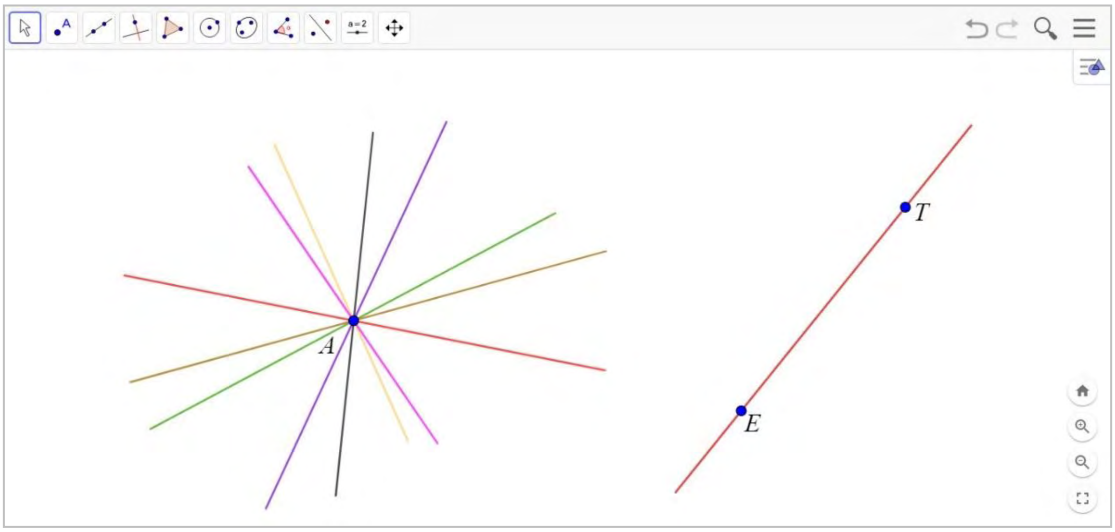
Појмове *отворена* и *затворена линија* такође је могуће представити ученицима користећи се истим алатима. Спајањем крајева отворене линије добија се затворена линија, док се отворена линија може добити брисањем једног дела затворене криве линије. Захваљујући динамичном приказу, могу се приказати бројни начини како је могуће од отворене линије формирати затворену и обратно.

Методичари сугеришу да се појам тачке уводи посматрањем пресека двеју линија (Шпијуновић, Маричић, 2016). Ученицима у пакету *GeoGebra* приказујемо различите врсте линија (праве и криве линије), а затим коришћењем алата Presek dva objekta можемо истаћи тачку у којој се поменуте линије пресецају (Слика 42).



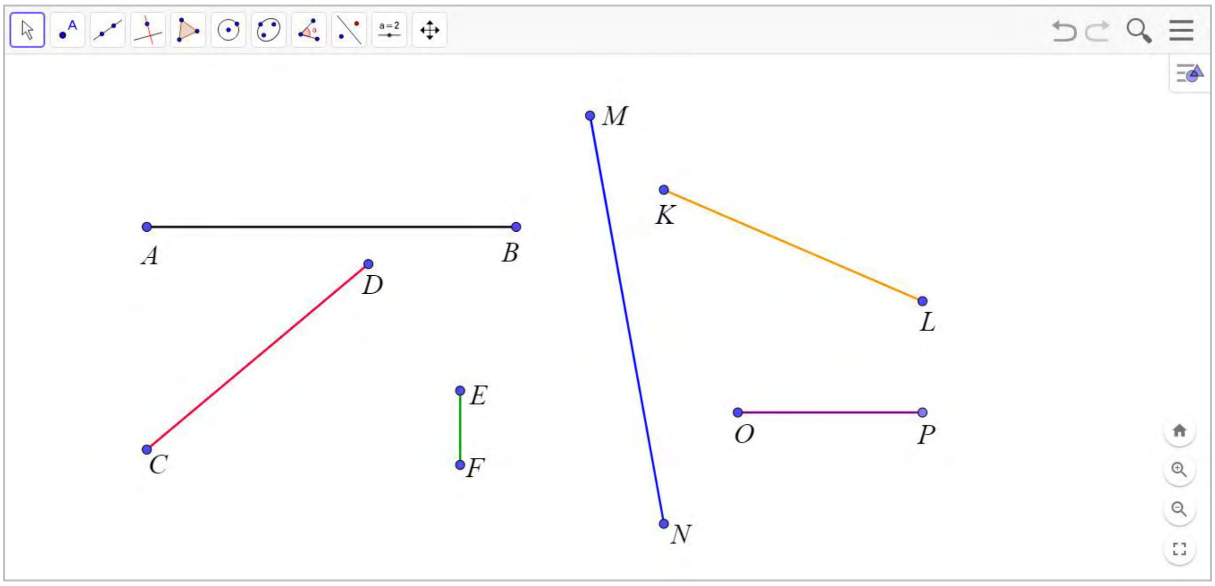
Слика 42. *Увођење појма тачке у пакету GeoGebra*

На основу неколико конкретних примера ученици закључују да две праве линије могу имати највише једну тачку пресека, док права и крива линија (или две криве линије) могу имати више тачака пресека. Такође, ученици на конкретним примерима уочавају везу и однос тачке и праве линије, односно да се кроз једну тачку може поставити бесконачно много правих линија док се кроз две тачке може повући само једна права (Слика 43). Са аспекта Ван Хилеових нивоа геометријског мишљења, извођење оваквих закључака можемо идентификовати као прелаз са нивоа визуелизације на ниво описа и анализе. Додатно, у извођењу закључка да се кроз две тачке може повући само једна права линија може помоћи коришћење алата Prava kroz dve tačke који се користи како би се у пакету *GeoGebra* на поједностављен начин нацртала права.



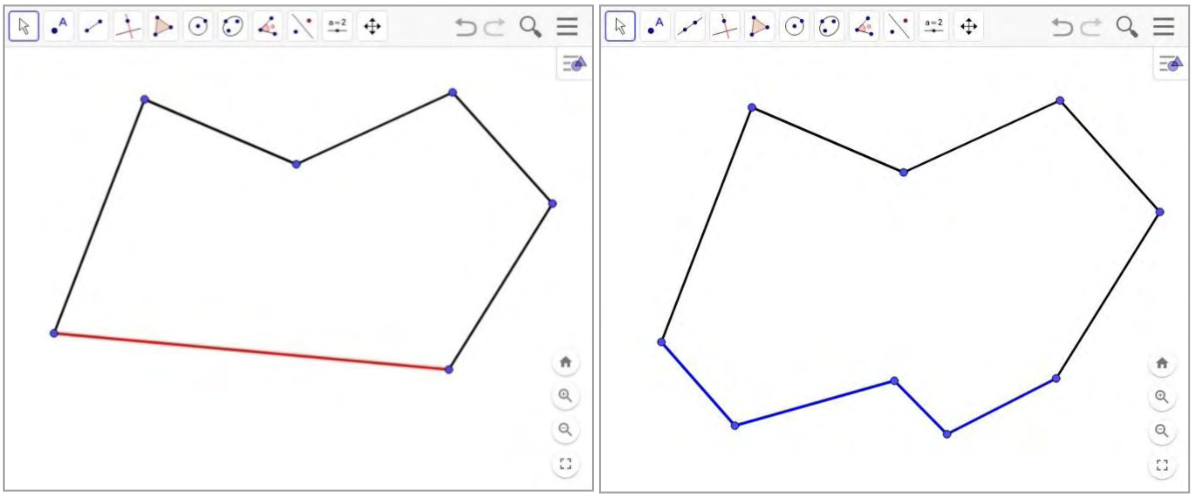
Слика 43. *Приказ односа тачке и праве у пакету GeoGebra*

Када су ученици формирали појмове праве линије и тачке, стекли су се услови за формирање појма *дужи*. Дуж, као најкраће растојање између две тачке, могуће је креирати уз помоћ алата Duž, на основу чега ученици могу да уоче да дуж представља праву линију која спаја две тачке. Променом положаја крајњих тачака дужи мењају се и њен положај и дужина. Избором алата Duž fiksne dužine могуће је нацртати дуж задате фиксне дужине којој је мењањем положаја једне крајње тачке могуће мењати положај али не и дужину. Ученици могу уз помоћ учитеља да покушају да у пакету *GeoGebra* нацртају дужи уз помоћ једног од два поменута алата и да прате промене њихових карактеристика. Овакве, вишеструке репрезентације дужи пружају прилику ученицима да је боље схвате и дубље разумеју (Слика 44). Да закључе да дуж може мењати своје карактеристике, за разлику од статичних приказа у уџбенику којима су дужи приказане у финалном облику и које ученици нису у прилици да модификују и прате настале промене. Такође, активностима у динамичном окружењу ученици стичу јаснију менталну слику о појму дужи, да може заузимати различите положаје а не само хоризонтални положај како се врло често представља.



Слика 44. *Приказ различитих положаја дужи у пакету GeoGebra*

Надовезивањем више дужи тако што се на крај једне дужи надовезује почетак друге ученицима се може увести појам *изломљене линије*. Такође, избором алата Izlomljena linija могуће је нацртати отворену изломљену линију (линија представљена црном бојом на Слици 45). Појам *затворене изломљене линије* може се увести на сличан начин на који смо увели затворену криву линију. Од ученика можемо тражити да открију како могу отворену изломљену линију трансформисати у затворену. Аналогно са формирањем затворене криве линије, ученици долазе до закључка да могу спојити почетну тачку прве дужи и крајњу тачку последње дужи отворене изломљене линије. То могу учинити на више различитих начина, цртањем дужи која је представљена црвеном бојом на Слици 45а или надовезивањем неколико дужи тако да се добије затворена изломљена линија (Слика 45б). Приказаним начинима се не исцрпљују све могућности за формирање затворене изломљене линије, већ треба пружити прилику ученицима да уз помоћ пакета *GeoGebra* сами покушају да пронађу начине за њено формирање.

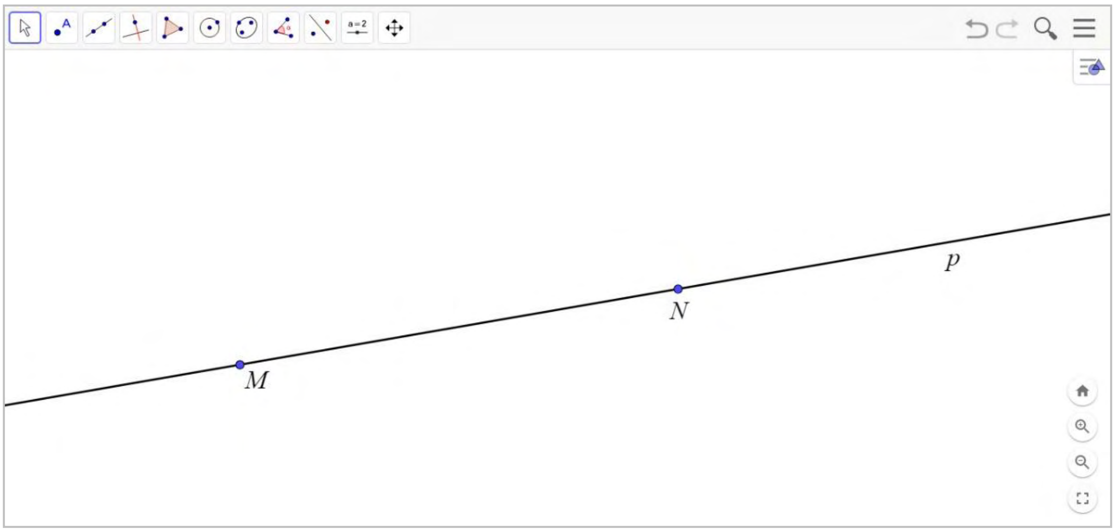


а) б)

Слика 45. *Приказ затворене изломљене линије у пакету GeoGebra*

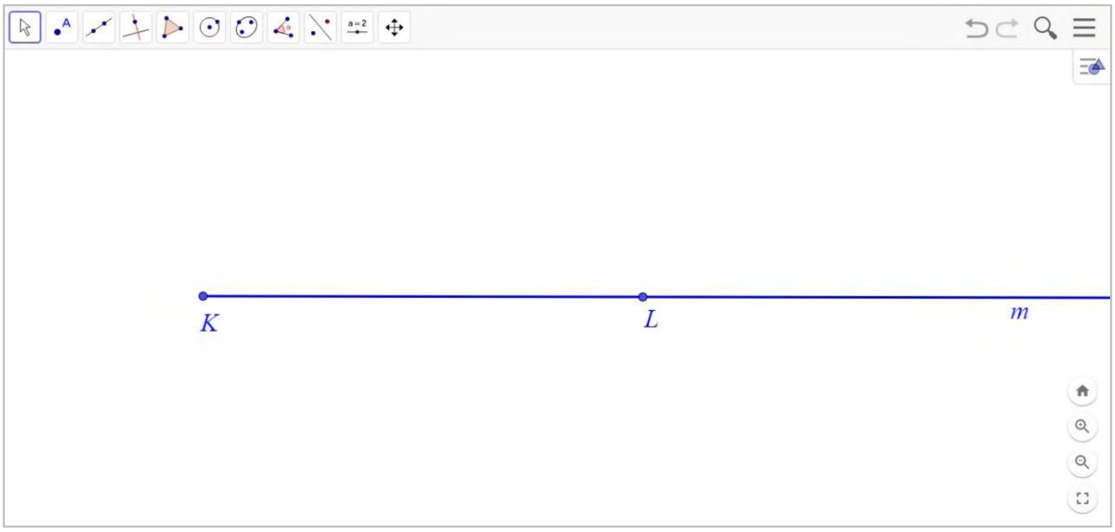
Због своје неограничености, формирање појма *праве* у млађим разредима основне школе представља велику апстракцију, те *GeoGebra* може послужити да ученици лакше визуелизују ову њену особину. Ученици треба да схвате појам праве као мисаоно продужење дужи, преко њених крајњих тачака, у оба смера. Графички, ученицима је праву тешко представити у уџбеницима или на табли због ограниченог простора, али за софтверски пакет *GeoGebra* оваква ограничења не постоје.

Ученици посматрају праву добијену уз помоћ алата Prava kroz dve tačke на којој могу уочити дуж *MN* и праву линију која се протеже преко њених крајњих тачака (Слика 46). Како бисмо приближили ученицима неограниченост праве можемо праву *p* померати у графичком прозору пакета и тако показати да нема краја. Такође, алатом Smanjenje можемо умањити приказ и уверити ученике да права заиста нема ни почетак ни крај.



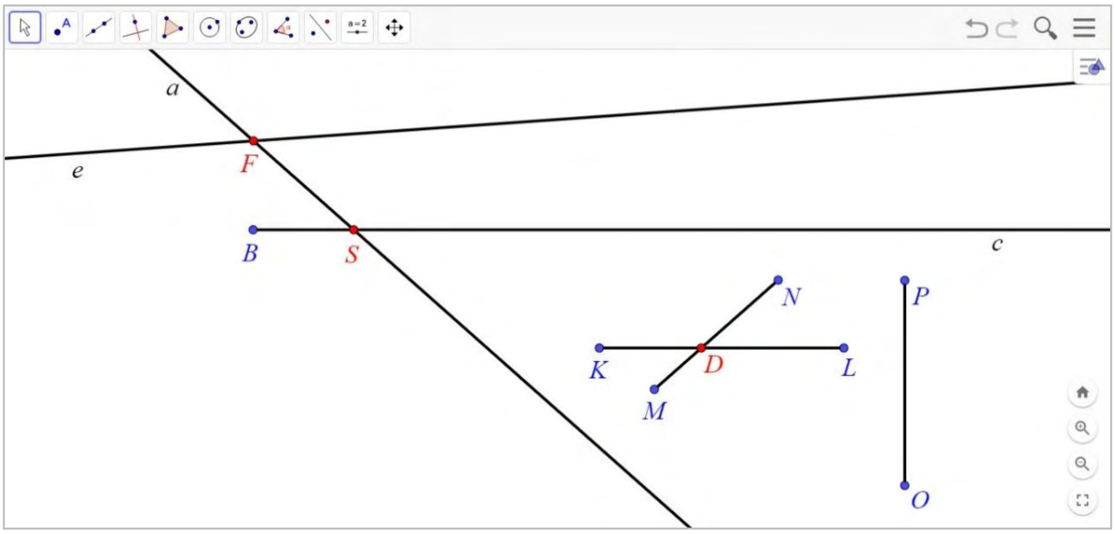
Слика 46. *Визуелизација појма праве у пакету GeoGebra*

Ученици могу и самостално нацртати неколико правих у софтверу и на основу више примера закључити да две тачке једнозначно одређују тачно једну праву. Користећи алат Poluprava kroz dve tačke могуће је нацртати полуправу, а ученици су у ситуацији да увиде да за разлику од праве, полуправа има почетак али нема крај (Слика 47). Појам полуправе уводимо као мисаоно продужење дужи *KL*, преко крајње тачке *L*. Да бисмо уверили ученике да је полуправа неограничена са једне стране (што је такође тешко представити цртањем полуправе на табли или у свесци) можемо померати полуправу у графичком делу пакета и тако показати да заиста нема крај. Додатно, захваљујући динамичном окружењу софтвера можемо ученицима показати да од положаја тачке *L* зависи правац полуправе, односно да се променом њеног положаја мења и правац полуправе док положај почетне тачке *K* остаје фиксиран.



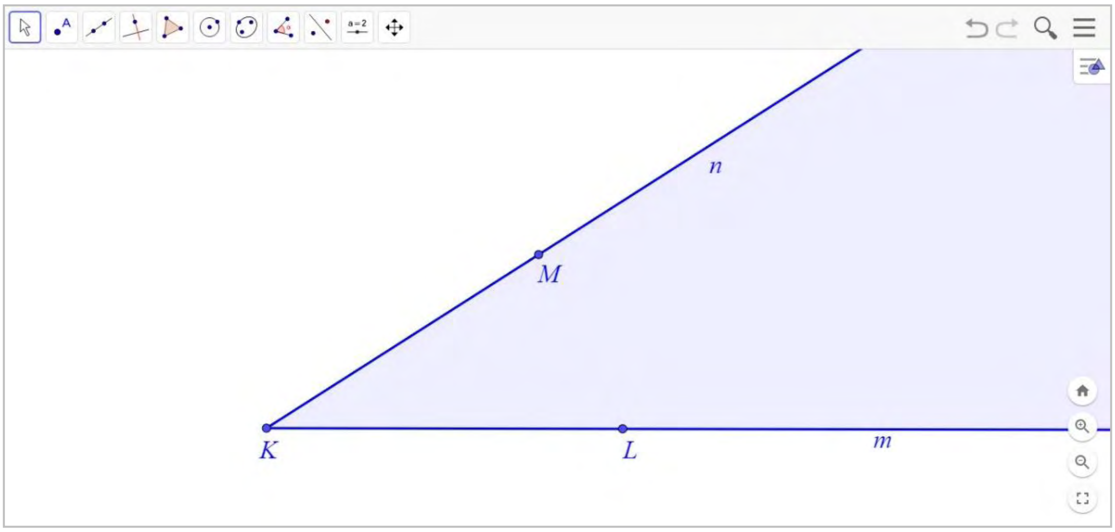
Слика 47. *Визуелизација појма полуправе у пакету GeoGebra*

Након формирања појмова дужи, праве и полуправе, уз помоћ пакета *GeoGebra* можемо приказати њихов међусобни однос. На конкретним примерима ученици могу уочити колико заједничких тачака могу имати две праве, две дужи, односно права и полуправа (Слика 48). Цртањем правих у различитим међусобним положајима ученици могу закључити да две праве имају највише једну тачку пресека. Додатно, оно што омогућава динамично окружење *GeoGebra* пакета јесте да се мења положај правих, па је могуће од две праве које се секу добити две праве које немају пресечних тачака а које називамо паралелним правама. Дужи, као ограничени делови правих, такође могу имати највише једну пресечну тачку. Променом њиховог положаја, уз помоћ динамичног окружења пакета *GeoGebra*, ученици могу пратити како је од две дужи које имају пресечну тачку могуће добити дужи које немају тачака пресека и обратно. Слично је могуће и са правом и полуправом. Уз предности које *GeoGebra* нуди, ученици могу да истражују колико пресечних тачака имају права и полуправа. Тако, након коначног броја покушаја ученици закључују да могу имати највише једну тачку пресека, а да немају пресечних тачака када су паралелне или када полуправа заузима карактеристичан положај у односу на праву (права *e* и полуправа *Bc* на Слици 48).



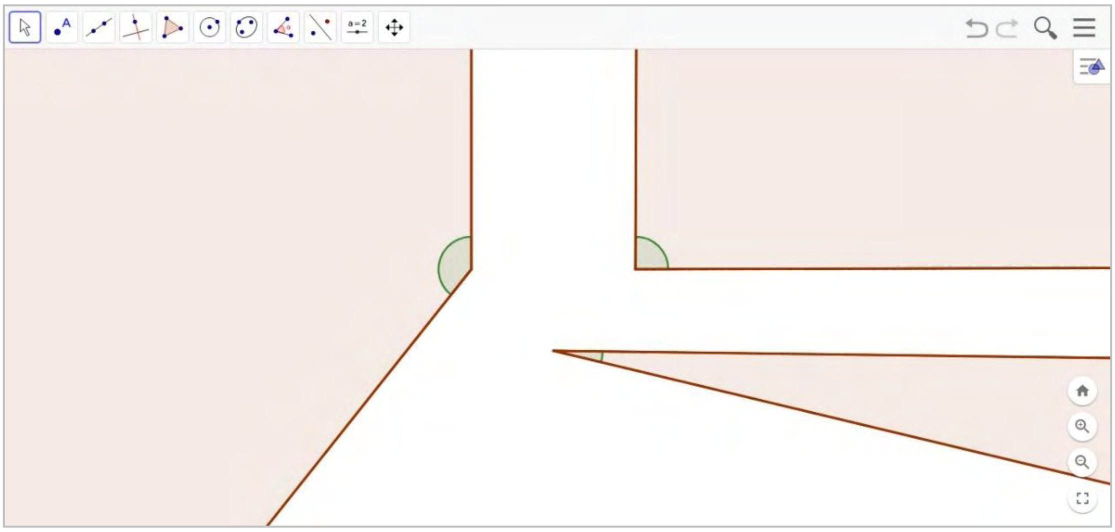
Слика 48. *Приказ међусобног односа праве, полуправе и дужи у пакету GeoGebra*

Појам *угла* можемо увести тако што код ученика формирамо представу да угао настаје обртањем једне од две полуправе око тачке у којој су полуправе спојене (Слика 49). Како ученици не би схватили угао као фигуру састављену из само две полуправе спојене у једној тачки већ да угао чини и део равни између њих, то унутрашњу област угла можемо додатно нагласити другом бојом. Захваљујући могућности померања приказаног угла или умањењем приказа ученике можемо уверити да је област угла ограничена крацима угла, док се са друге стране неограничено протеже.



Слика 49. *Приказ угла у пакету GeoGebra*

Како би ученици потпуније формирали појам угла можемо искористити предности софтвера и приказати различите врсте углова чији су краци у различитим положајима (оштри, прави, тупи углови) (Слика 50). Уз помоћ троугаоног лењира ученици могу одредити да ли је одређени угао прав, мањи од правог угла (оштар) или већи од правог угла (туп угао). Померањем једног од кракова могу трансформисати дати угао у жељени и на очигледан начин пратити промене до којих током тог процеса долази.

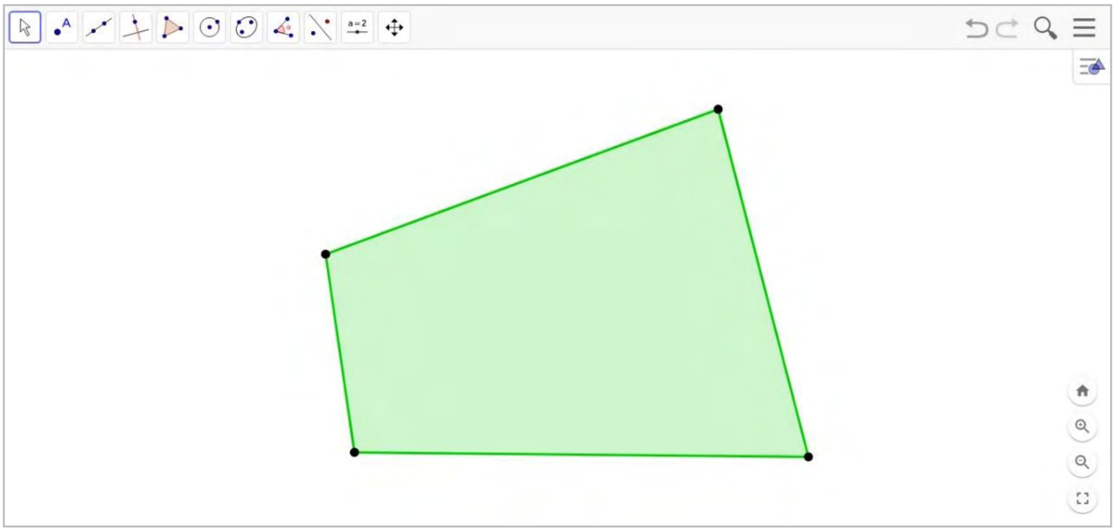


Слика 50. *Приказ различитих врста углова у пакету GeoGebra*

Коришћење представљених модела представља основу за даље креирање модела који могу користити приликом решавања конкретних математичких проблема. Моделовањем ових проблема олакшава се његово решавање и чини да ученици на једноставнији начин визуелизују односе који су успостављени међу датим објектима.

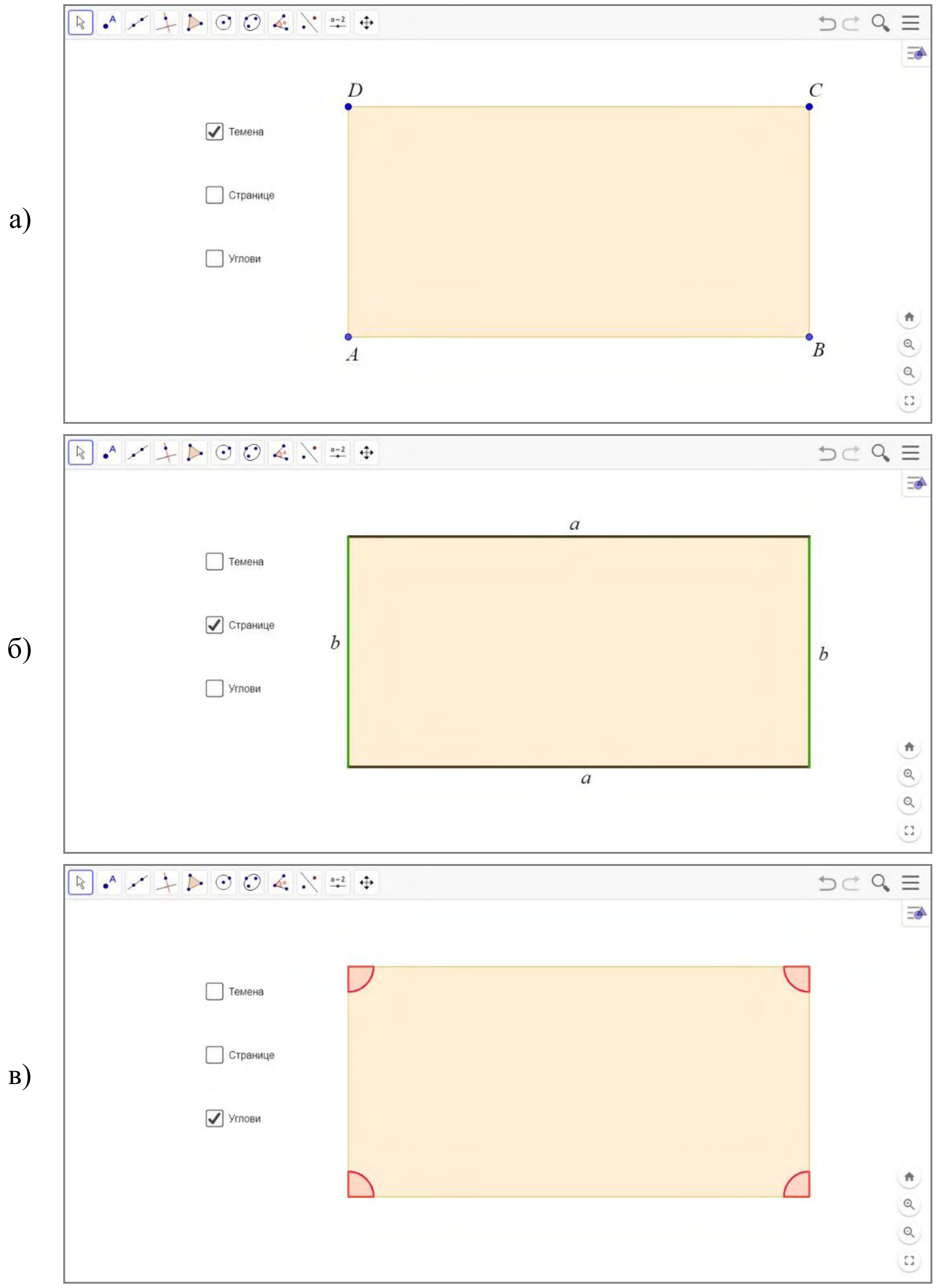
3.4. Модели примене *GeoGebra* пакета у увођењу појма геометријске фигуре и мерења површине фигуре

Појам *многоугла* (*четвороугла*) може се формирати код ученика ослањајући се на претходно усвојен појам затворене изломљене линије и дела равни који ова линија ограничава. Алатом Mnogougao у радном окружењу софтвера *GeoGebra* могу се одредити тачке које представљају темена многоугла након чега софтвер сам генерише жељени многоугао (Слика 51). Захваљујући динамичном приказу и интерактивности објеката које обезбеђује софтвер, ученици могу на очигледан начин пратити трансформацију облика креираног многоугла до које долази променом положаја било којег темена.



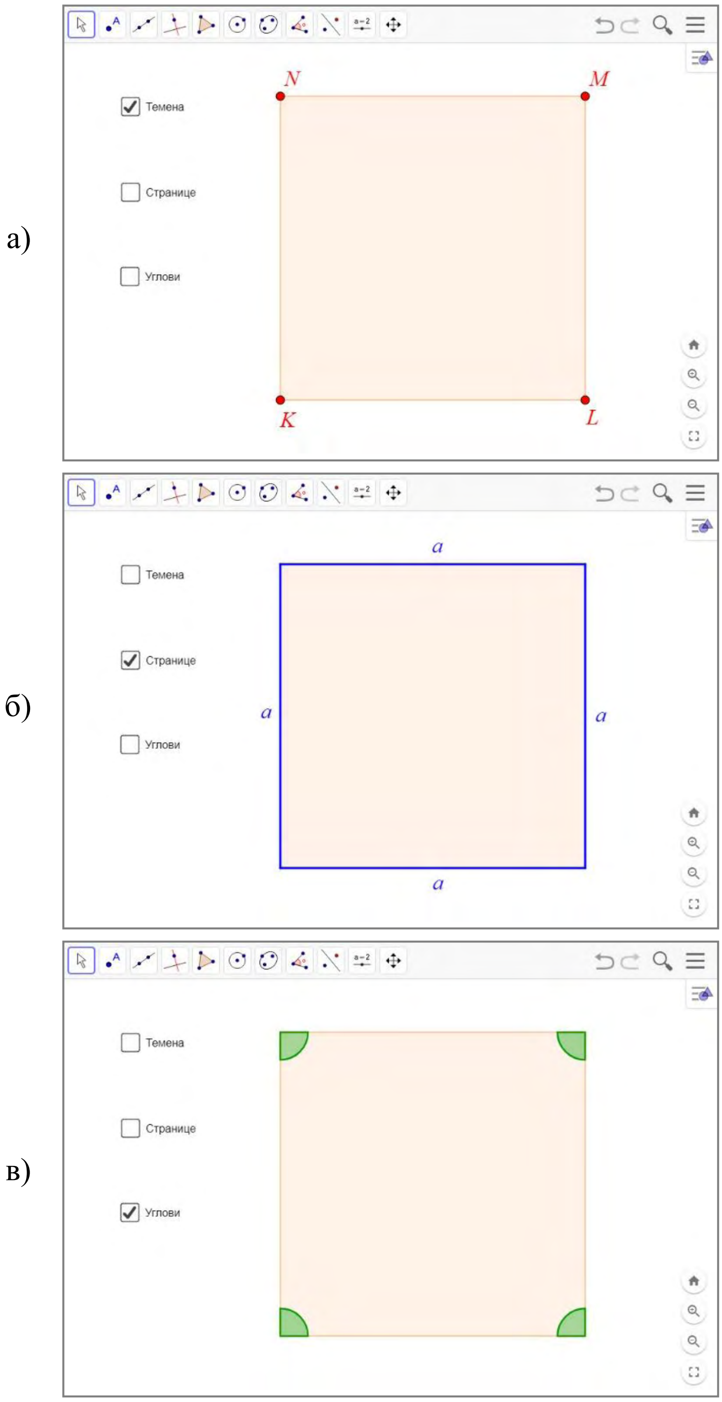
Слика 51. *Приказ многоугла у пакету GeoGebra*

За увођење појма *правоугаоника* може послужити алат Kruti mnogougao. Модел правоугаоника креиран уз помоћ овог алата задржава облик без обзира на изометријске трансформације на њему примењене (Слика 52). Додатно, могу се посебно истаћи темена, странице и углови, могу се приказати у различитој боји, док се у сваком тренутку неки од елемената може сакрити како би ученици пажњу усмерили на посматрање жељених елемената. На основу приказаног модела могу уочити темена (Слика 52а), странице (Слика 52б) и углове правоугаоника (Слика 52в), као и које су странице суседне, а које наспрамне. Уз помоћ троугаоног лењира могу одредити да ли су углови правоугаоника прави, а на основу мерења закључити да су наспрамне странице правоугаоника једнаких дужина. У циљу провере једнакости дужина наспрамних страница могуће је употребити и алат Rastojanje који аутоматски одређује дужину дужи која представља страницу правоугаоника.



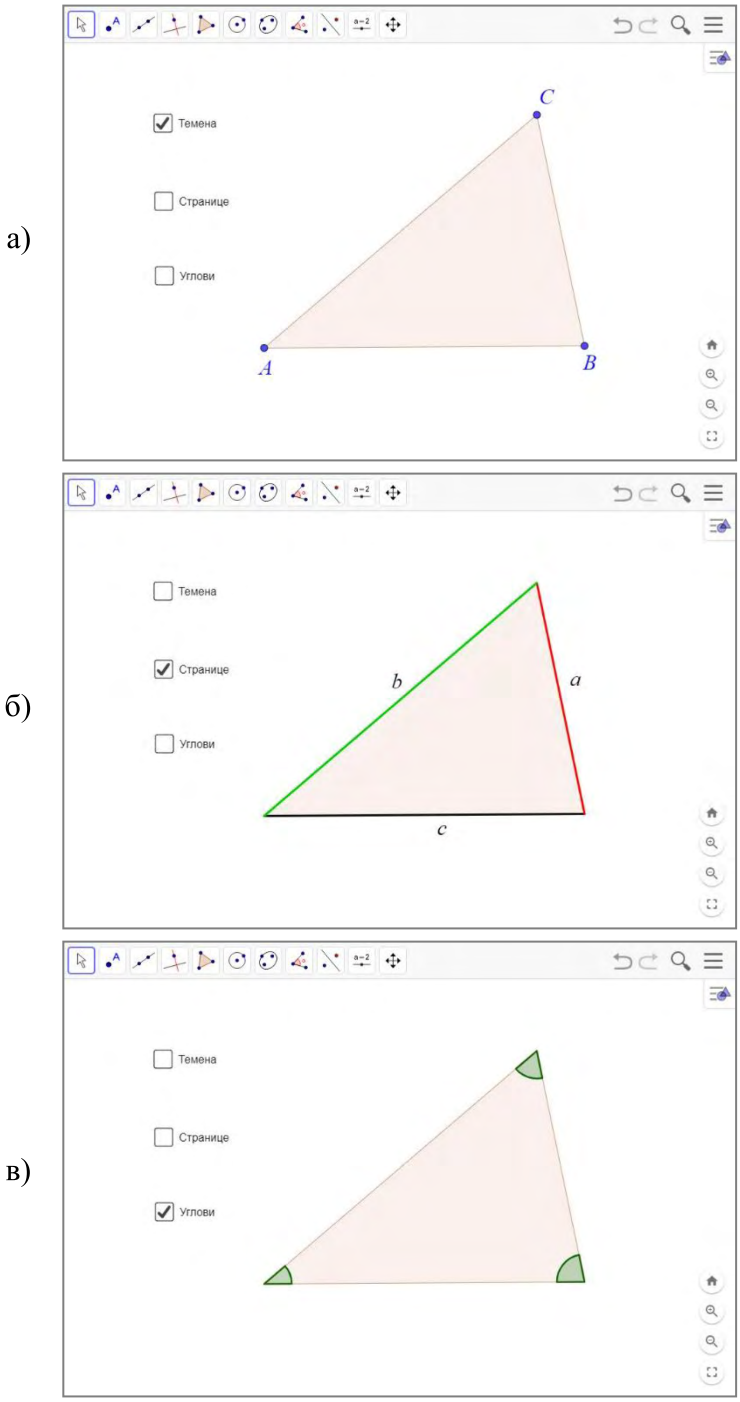
Слика 52. *Приказ правоугаоника у пакету GeoGebra*

Појам *квадрата* може се увести по истим принципима као и појам правоугаоника. За увођење овог појма може послужити алат Pravilan mnogougao. Визуелизацијом појма квадрата уз помоћ софтвера *GeoGebra* ученици могу посматрати како се променом положаја тачака које представљају темена квадрата мења величина површи, али задржава облик квадрата (Слика 53). Ученици имају прилику да уоче темена (Слика 53а), странице (Слика 53б) и углове квадрата (Слика 53в) који захваљујући могућностима софтвера могу бити додатно истакнути. Мерењем ученици могу утврдити да квадрат поседује све особине правоугаоника, али и једну додатну, да су све четири странице једнаке дужине. Како би изградили менталну слику о појму квадрата, пожељно је ученицима приказати квадрат у различитим положајима, што се може постићи превлачењем једног од темена квадрата.



Слика 53. *Приказ квадрата у пакету GeoGebra*

Приступ увођењу појма *троугла* аналоган је формирању правоугаоника и квадрата. Алатом Mnogougao можемо одредити тачке које представљају темена троугла након чега софтвер креира троугао (Слика 54). Додатно, захваљујући могућности употребе поља за потврду можемо независно приказати темена (Слика 54а), странице (Слика 54б) и углове троугла (Слика 54в), како би ученици у датом тренутку пажњу усмерили на посматрање жељених елемената. Мерењем ученици могу утврдити да су странице троугла различитих дужина, што смо истакли и коришћењем различитих боја при њиховом приказу. Имајући у виду да су креирани садржаји интерактивни, ученици могу добити прилику да врше промену положаја темена троугла и прате трансформацију облика његове површи до које долази променом положаја темена.


а)

☑ Темена

☐ Странице

☐ Углови

б)

☐ Темена

☑ Странице

☐ Углови

в)

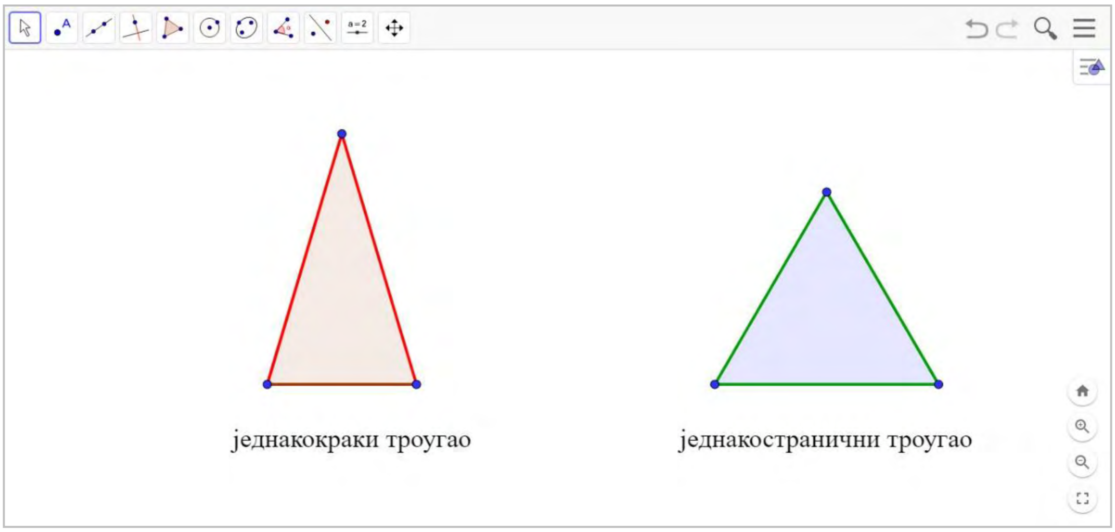
☐ Темена

☐ Странице

☑ Углови

Слика 54. *Приказ троугла у пакету GeoGebra*

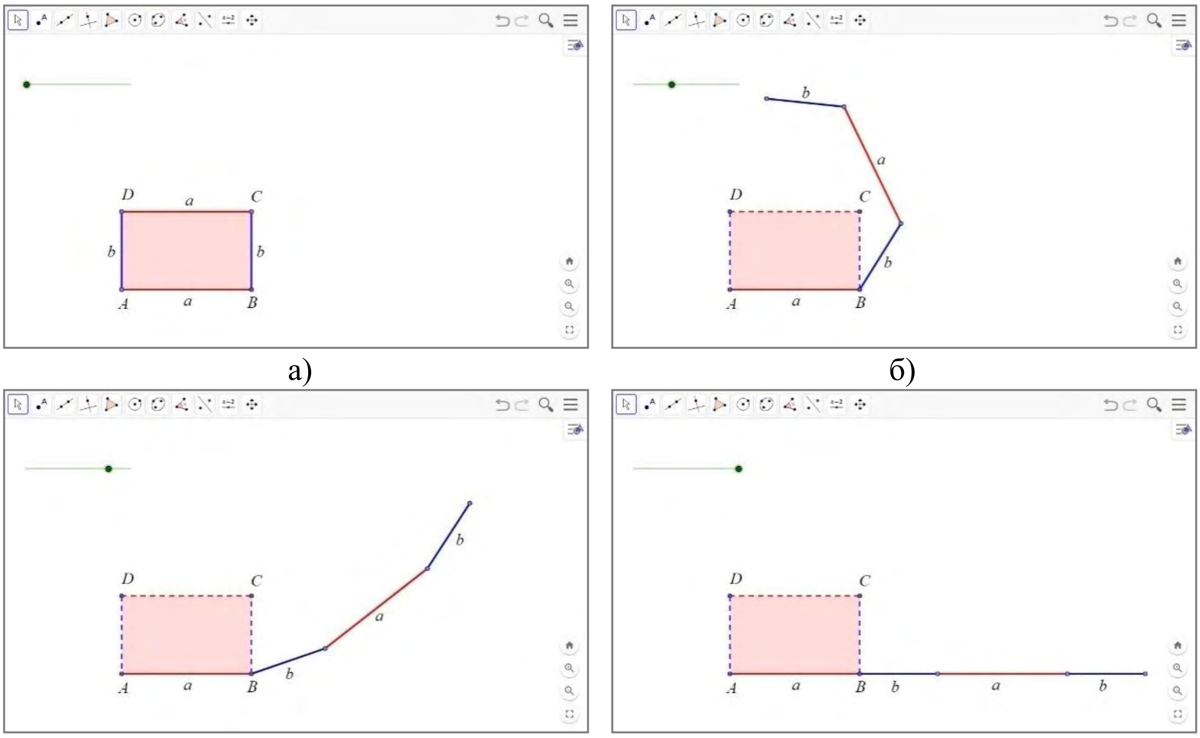
Када ученици уоче заједничка својства можемо истаћи она по којима се троуглови разликују, односно да троугао који има све три странице различите дужине називамо *неједнакостранични*, онај који има две странице једнаке дужине *једнакокраки*, док троугао који има све три странице једнаке дужине називамо *једнакостранични* (Слика 55). У циљу лакше визуелизације, странице троуглова које су једнаких дужина представљене су истом бојом. Ученици су у позицији да могу мењати положај темена датих троуглова, мењати дужине страница, а затим мерењем проверити да ли троуглови задржавају поменута својства.



Слика 55. *Приказ различитих врста троуглова у пакету GeoGebra*

У складу са *Програм наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања* (2018), ученици се већ у другом разреду упознају са појмом обима геометријске фигуре, најпре визуелно а затим и рачунски, без употребе формула за израчунавање обима. Садржаји који се односе на израчунавање обима фигуре надовезују се на израчунавање дужине затворене изломљене линије. Практичним активностима ученици треба да се увере да је дужина новонастале дужи једнака збиру мерних бројева дужине појединачних дужи које чине изломљену линију.

Ученике треба оспособити за израчунавање обима правоугаоника, квадрата и троугла. У том циљу, уз примену софтвера *GeoGebra* могуће је креирати модел уз помоћ којег ученици могу на динамичан начин пратити увођење појма обима (Слика 56). На Слици 56а дат је правоугаоник *ABCD* са страницама *a* и *b*. Уз помоћ алата a=2 Klizač дефинисан је клизач који омогућава да се изломљена линија која ограничава површ правоугаоника трансформише у дуж дужине једнаке обиму посматраног правоугаоника. Померањем дефинисаног клизача ученици могу на динамичан начин пратити трансформацију изломљене линије (Слика 56б и 56в). Када клизач узме највишу вредност, почетна изломљена линија узима облик дужи (Слика 56г). Током трајања процеса трансформације ученици на очигледном примеру закључују да се изломљена линија састоји из дужи једнаких страницама правоугаоника. По завршетку процеса уочавају да се новонастала дуж састоји из четири дужи које одговарају страницама правоугаоника. Захваљујући динамичном приказу постоји могућност поновног извођења исте операције како би ученици једноставније разумели поступак увођења појма обима правоугаоника. Са друге стране, враћањем клизача на почетну вредност може се извести реверзибилна операција, односно од дужи формирати изломљена линија која ограничава површ датог правоугаоника. На тај начин ученици не закључују једнострано, односно у стању су да се мисаоно врате на почетак процеса и целину упореде са њеним деловима. Овај процес је значајан јер омогућава ученицима да, сем овладавања поступком израчунавања обима за дате дужине страница правоугаоника, израчунају и дужину једне странице правоугаоника када је дат његов обим и дужина друге странице.



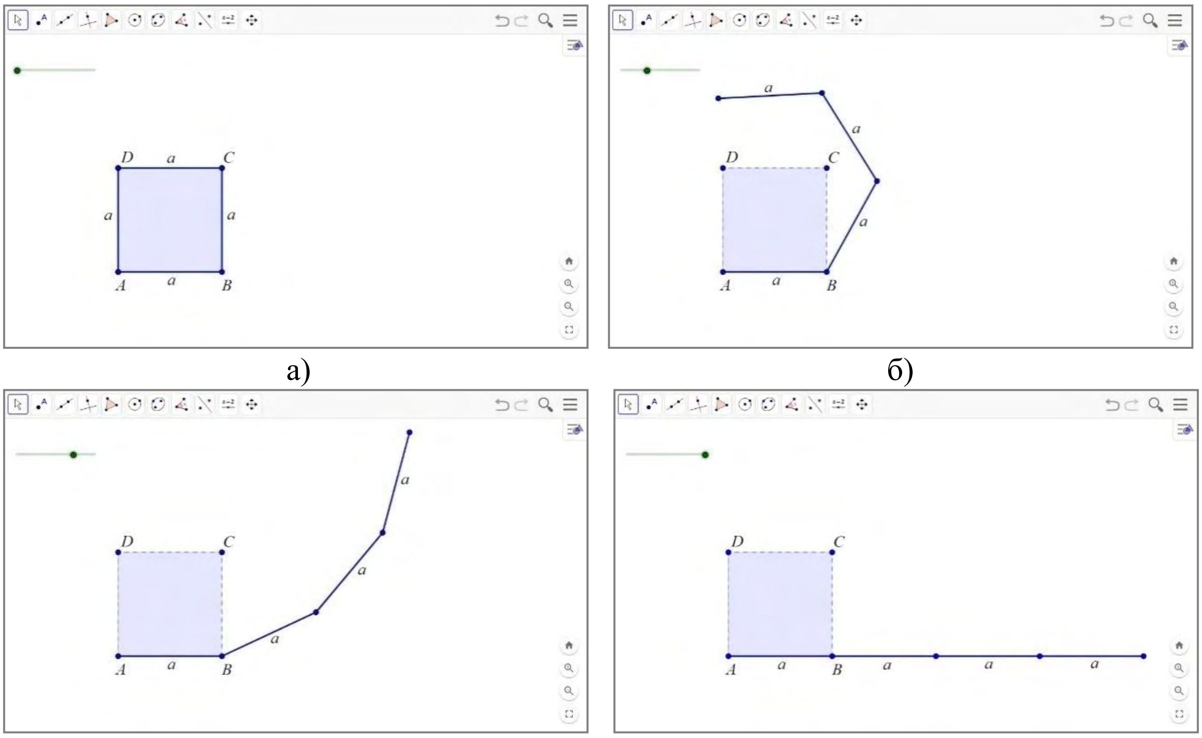
а) б)

в) г)

Слика 56. *Увођење појма обима правоугаоника у пакету GeoGebra*

Овакав поступак увођења појма обима правоугаоника има за циљ да ученици схвате да „израчунавањем обима одређују дужину која је једнака збиру дужина страница правоугаоника” (Шпијуновић, Маричић, 2016: 358). Ученици су у прилици да прате процес, активно учествују у формирању појма обима графичким надовезивањем дужи и тако створе јасну представу о појму, чиме се спречавају проблеми који настају раним формалним увођењем обрасца за израчунавање обима (Миликић, Маричић, Вуловић, 2022; Vighi, Marchini, 2011).

Аналогним поступком уводи се појам обима квадрата. Уз претходно креиран модел у *GeoGebra* софтверу, ученицима је пружена могућност визуелизације поступка формирања појма обима квадрата (Слика 57). Захваљујући клизачу, софтвер пружа прилику ученицима да посматрају трансформацију затворене изломљене линије која ограничава површ квадрата, да на очигледан начин прате поступак настанка одговарајуће дужи надовезивањем дужи које одговарају страницама квадрата. Најпре се мењањем вредности клизача затворена изломљена линија (Слика 57а) трансформише у отворену изломљену линију састављену од четири дужи једнаких страницама квадрата (Слика 57б). Даљим повећањем вредности клизача ученици могу пратити трансформацију изломљене линије која тежи да постане дуж дужине једнаке обиму квадрата (Слика 57в). Након што клизач узме највишу вредност настаје дуж која се састоји из четири дужи подударних страницама квадрата (Слика 57г). Оно што је посебна предност софтвера *GeoGebra* јесте што се употребом клизача у сваком тренутку процес трансформације може зауставити и уколико за тим има потребе вратити у почетни положај. Ученици могу добити прилику да сами мењају вредност клизача и прате како то утиче на промену положаја изломљене линије из чега даље закључују како би требало да гласи образац којим се израчунава обим квадрата.



а) б)

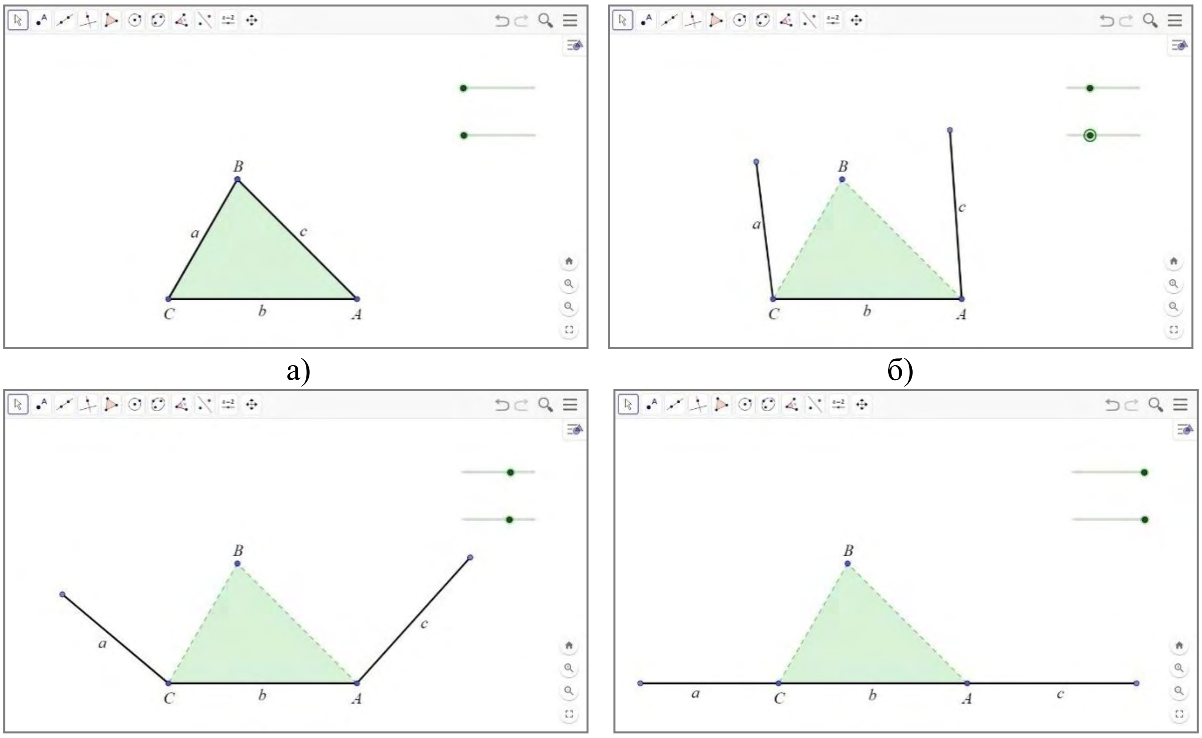
в) г)

Слика 57. *Увођење појма обима квадрата у пакету GeoGebra*

Враћање клизача на почетну вредност доводи до обрнутог процеса у којем од дате дужи настаје изломљена линија која ограничава површ квадрата. Овакав реверзибилни поступак омогућава ученицима да појам обима доведу у везу са дужинама страница квадрата, односно да схвате на који начин могу на основу датог обима израчунати вредност дужине странице квадрата.

Методички поступак увођења појма обима троугла изводи се на сличан начин. Ученици имају прилику да на претходно припремљеном моделу мењањем вредности клизача прате трансформацију изломљене затворене линије која ограничава површ троугла у дуж (Слика 58). Како појам обима уводимо на моделу неједнакостраничног троугла, то су креирана два клизача уз помоћ којих се затворена изломљена линија трансформише у дуж (Слика 58а). Повећањем вредности клизача од затворене изломљене линије најпре се формира отворена линија (Слика 58б) која се даљом променом вредности клизача „приближава" дужи дужине једнаке обиму троугла (Слика 58в). Када оба клизача узму највише вредности добија се дуж која се састоји из три дужи подударне страницама троугла (Слика 58г). Извођењем очигледних демонстрација уз употребу *GeoGebra* софтвера и вршењем практичних мерења, ученици се уверавају да је дужина дужи добијене трансформацијом затворене изломљене линије која ограничава површ фигуре једнака збиру добијеном сабирањем мерних бројева дужина појединачних дужи, односно да дужина новонастале дужи представља обим фигуре.

На основу адекватног графичког приказа ученицима је омогућено да изведу општи закључак да збир мерних бројева дужина страница троугла представља његов обим. Употребом мисаоне операције специјализације ученици долазе до закључка на који начин се израчунавају обими једнакокраког и једнакостраничног троугла.



а) б)

в) г)

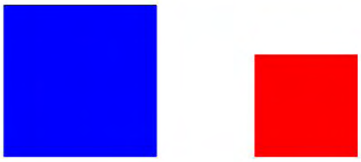
Слика 58. *Увођење појма обима троугла у пакету GeoGebra*

Ученици који нису довољно добро разумели појам обима и нису изградили јасну представу о појму у немогућности су да одреде дужину оних страница фигуре које нису примарно задате (Yeo, 2008). Дакле, основни циљ јесте конструисање знања ученика уместо запамћивања обрасца по коме се израчунава обим фигуре.

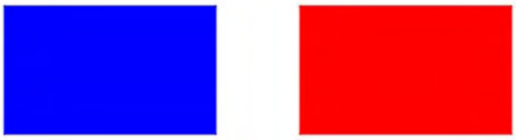
Поред појма обима, и мерење површине представља важну област школске математике којом ученици млађих разреда основне школе треба да овладају. Основ неразумевања појма површине често лежи у почетном искуству ученика које је везано за образац „дужина × ширина = површина” (Martin, Strutchens, 2000; Zacharos, 2006), уместо на активностима бројања мерних јединица којима је површ дате фигуре поплочана (Van de Walle, 1997, видети Kamii, Kysh, 2006). Како би ученици успешно усвојили појам мерења површине и јасно га диференцирали од појма обима, потребно је да овладају одређеним практичним поступцима који се односе на поплочавање површи фигуре без празнина или преклапања мерних јединица (Stephan, Clements, 2003), бројање мерних јединица и разумевање структуре редова и колона (Sarama, Clements, 2009). За развијање способности ученика да поплочају површ без празнина или преклапања мерних јединица и повежу структуру редова и колона са мерењем површине потребно је одређено време (Зељић, Иванчевић, 2019). За то време, применом одговарајућих динамичних модела, ученицима треба на очигледним примерима приказати проблемске ситуације које изискују увођење поступка мерења површине (Пример 1).

Пример 1. *Упореди површи датих фигура и одреди у каквом су односу њихове површине:*

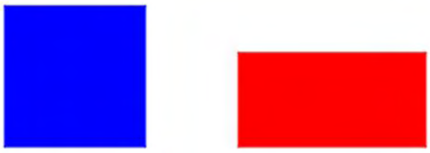
а)



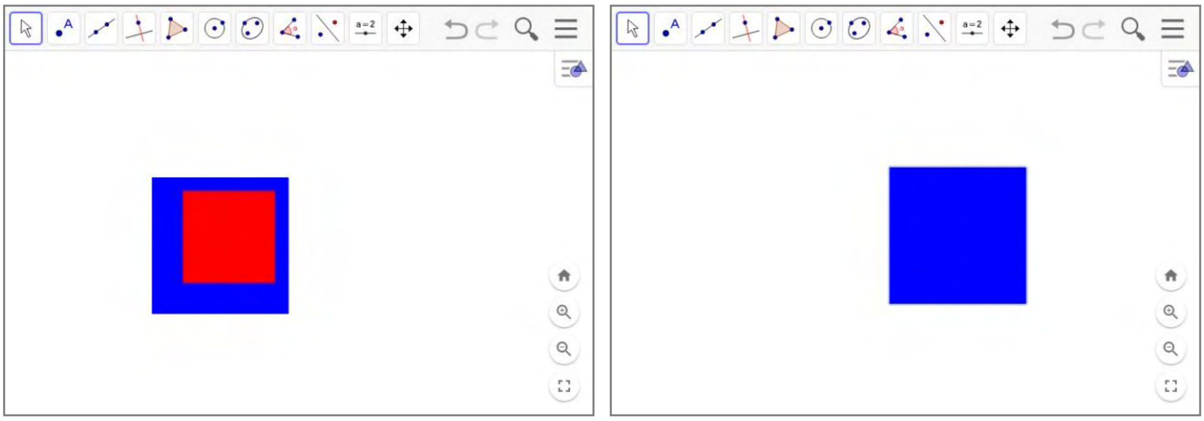
б)



в)

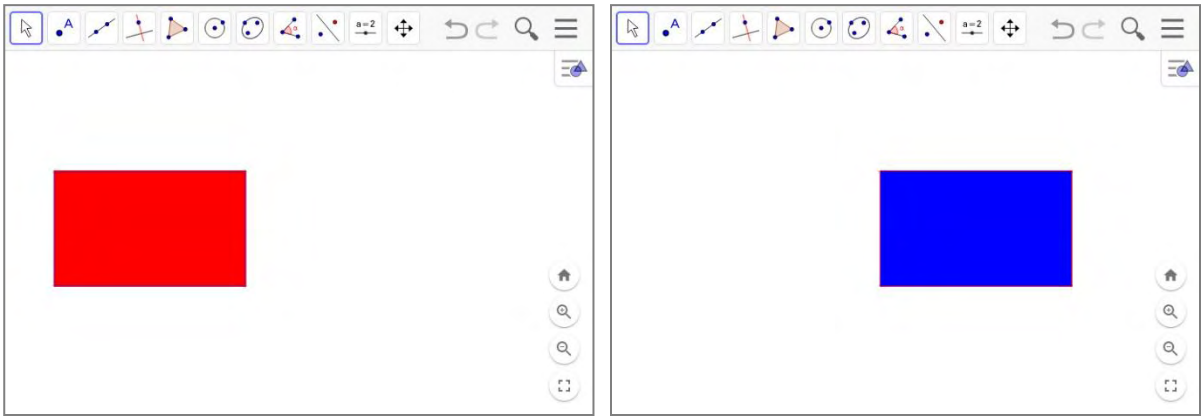


У Примеру 1 под а) ученици могу на основу искуства да закључе да је површ плавог квадрата већа од површи црвеног квадрата. Додатно, захваљујући динамичном окружењу пакета *GeoGebra* учитељ може превлачењем црвеног квадрата преко плавог и обратно да увери ученике да површ плавог квадрата заиста има већу површину од црвеног (Слика 59).



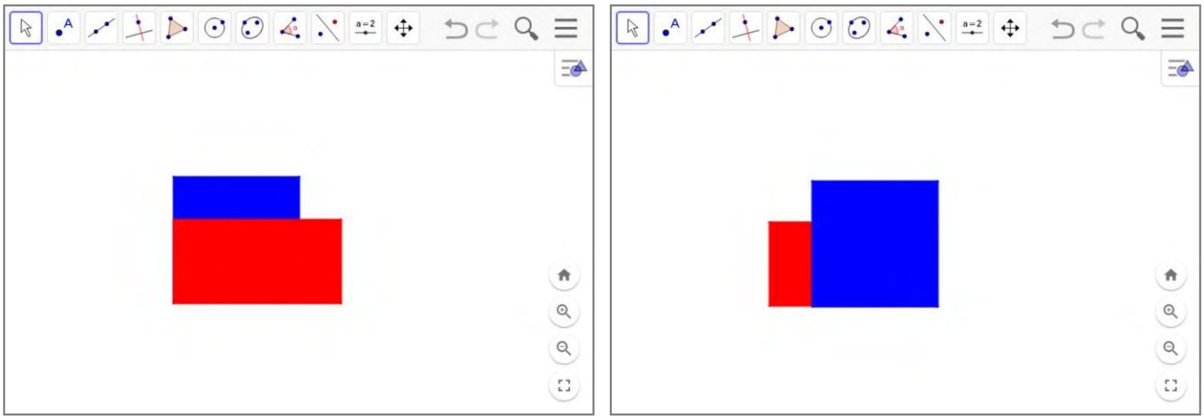
Слика 59. *Упоређивање површина квадрата у пакету GeoGebra*

У Примеру 1 под б) разлике у димензијама датих правоугаоника нису тако очигледне. За утврђивање односа површи датих фигура довољно је црвеним правоугаоником прекрити плави, односно плавим правоугаоником прекрити црвени како би ученици закључили да су површине оба правоугаоника једнаке (Слика 60). У случају статичног приказа у уџбенику ученици нису у прилици да предузимају овакве активности над датим објектима, али динамично окружење софтвера пружа такву могућност.



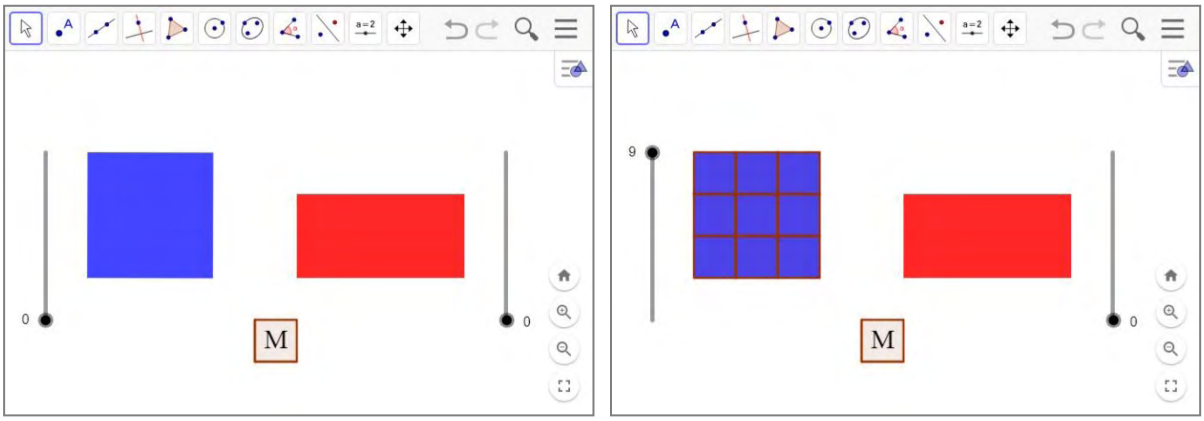
Слика 60. *Упоређивање површина правоугаоника у пакету GeoGebra*

У Примеру 1 под в) није могуће превлачењем површ једне фигуре у потпуности прекрити другом, на основу чега ученици закључују да на тај начин није могуће утврдити у каквом су односу површине датих фигура (Слика 61).

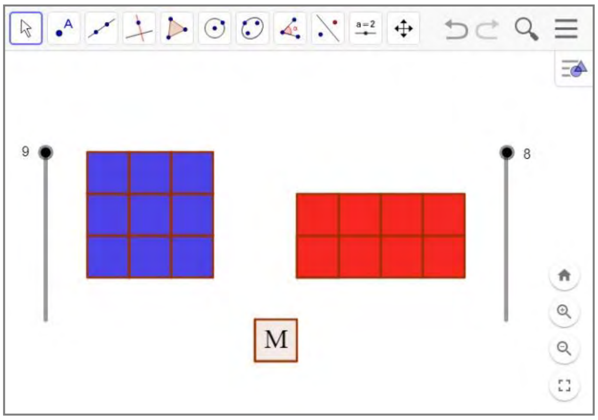


Слика 61. *Упоређивање површина квадрата и правоугаоника у пакету GeoGebra*

Кроз хеуристички разговор ученици се присећају поступка мерења површине геометријских фигура поплочавањем са којим су се сусрели у трећем разреду и како га могу искористити за упоређивање површина датих фигура. Закључују да је потребно одабрати фигуру која ће представљати јединицу мере којом ће поплочати и квадрат и правоугаоник а затим упоредити добијене мерне бројеве њихових површина. У оквиру класично организоване наставе мерење површине изводили би физичким манипулисањем моделом мерне јединице M којом би поплочавали површи фигура. У динамичном окружењу *GeoGebra* софтвера померањем креираних клизача ученици на очигледан начин прате процес поплочавања површи квадрата и правоугаоника датом јединицом мере M (Слика 62). Померањем клизача који се налази лево од квадрата долази до поплочавања квадрата јединицом мере M, при чему је сам клизач подешен тако да пребројава колико је јединица мере потребно како би се прекрила површ квадрата (Слика 62б). Аналогно, померањем клизача који се налази са десне стране правоугаоника врши се поплочавање правоугаоника јединицом мере M (Слика 62в). Као резултат процеса мерења површина квадрата и правоугаоника добијени су мерни бројеви површина, а њиховим поређењем ученици закључују да површ квадрата има већу површину, јер је 9 > 8.



а) б)



в)

Слика 62. *Упоређивање површина квадрата и правоугаоника поплочавањем у пакету GeoGebra*

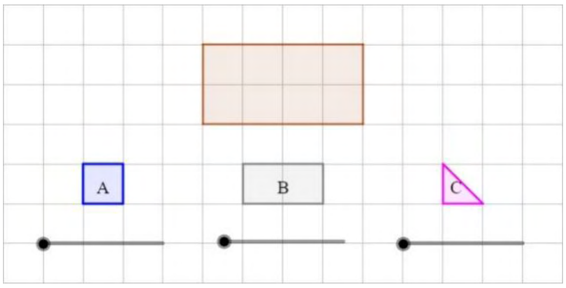
За даље развијање појма мерења површине фигура могу користити примери који указују на потребу за увођењем стандардних јединица мере за површину (Пример 2).

Пример 2. *Колика је површина великог правоугаоника ако је јединица мере:*

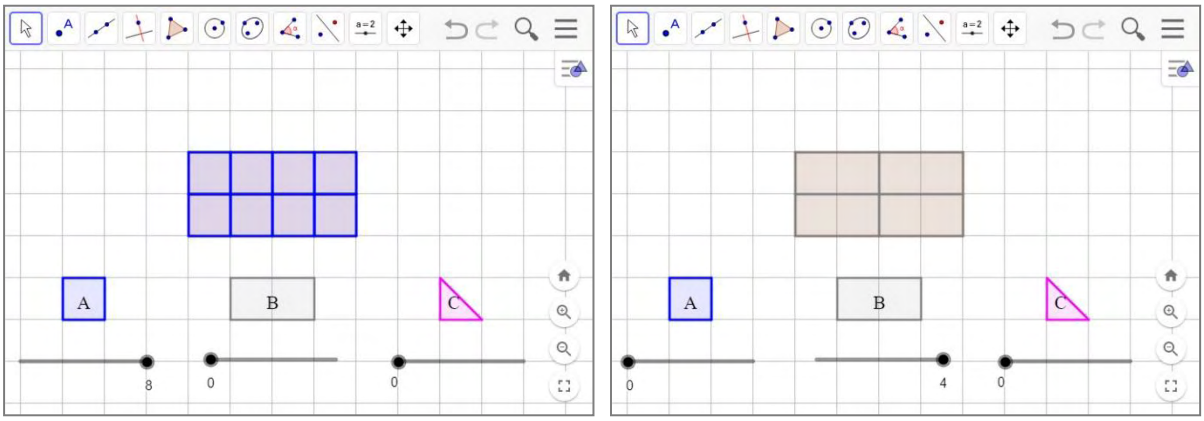
а) квадрат A;

б) правоугаоник B;

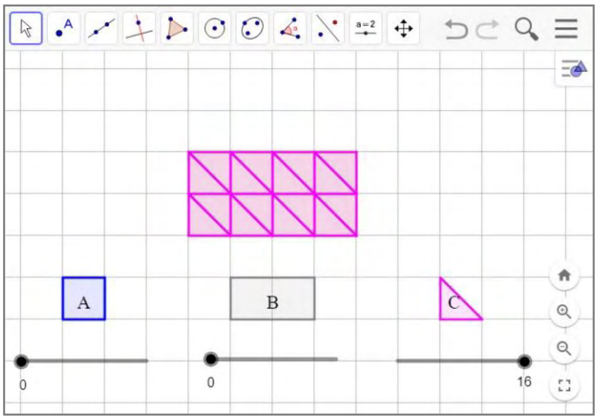
в) троугао C?



Користећи клизаче креиране за сваку од датих фигура *A*, *B* и *C* које представљају јединице мере ученици на очигледан начин могу пратити процес поплочавања површи правоугаоника датим површима (квадратну мрежу која може користити ученицима као помоћ приликом мерења површине могуће је уклонити деактивацијом одговарајуће опције) (Слика 63).



а) б)

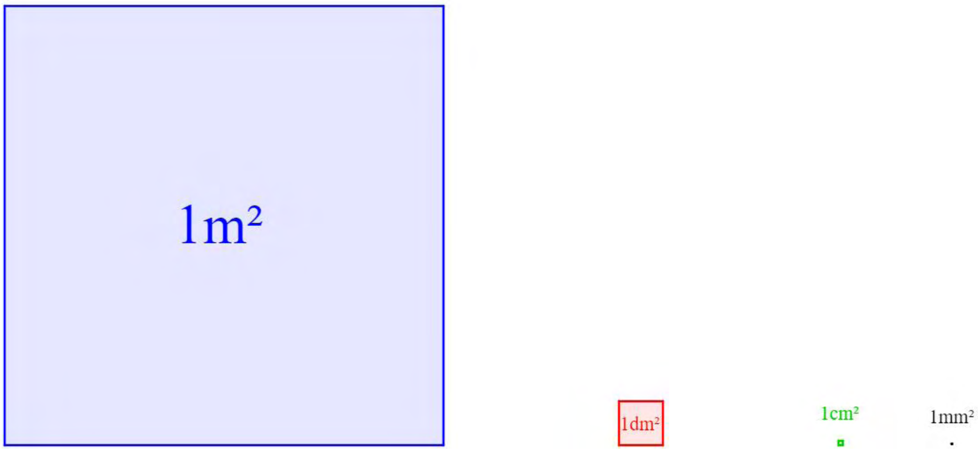


в)

Слика 63. *Мерење површине правоугаоника поплочавањем у пакету GeoGebra*

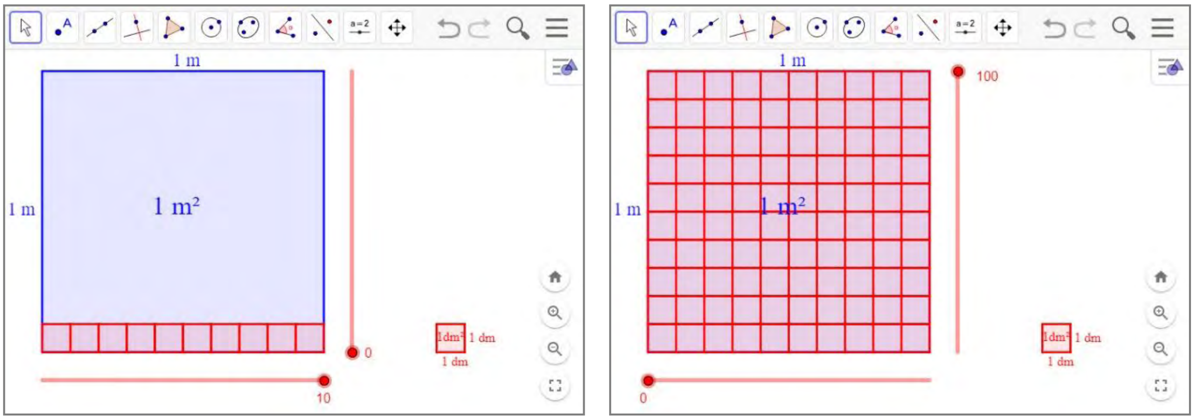
Као резултат поплочавања различитим јединицама мере добијају се различити мерни бројеви. Приликом поплочавања квадратом *A* померањем одговарајућег клизача добијен је мерни број 8 (Слика 63а). Када се поплочавање врши правоугаоником *B* мерни број површине великог правоугаоника износи 4 (Слика 63б). У случају поплочавања површи правоугаоника троуглом *C* мерни број износи 16 (Слика 63в). Све време, ученици су у ситуацији да посматрају графичку репрезентацију проблема и закључују да је иста површ мерена различитим јединицама мере и да су услед тога добијени и различити мерни бројеви.

Решавањем Примера 2 ученици су у прилици да прате како се при мерењу површине већом јединицом мере добија мањи мерни број и обратно, због чега није могуће једнозначно одредити мерни број површине фигуре. По аналогији са решавањем проблема мерења дужине, ученици закључују да је и при мерењу површине потребно увести једну сталну, непромењиву јединицу мере како би се при сваком мерењу површине исте површи добио исти мерни број. С тим у вези, у *GeoGebra* софтверу је могуће приказати моделе квадрата који имају површину од једног квадратног метра, једног квадратног дециметра, једног квадратног центиметра и једног квадратног милиметра као стандардних јединица мере за мерење површине површи.



(линк)

Динамични приказ модела стандардних јединица мере за површину омогућава ученицима да уоче односе који владају међу њима. Захваљујући могућности увеличавања и пројекције садржаја на таблу или зид, ученици могу да стекну представу о томе колику површину представља квадратни метар, квадратни дециметар, квадратни центиметар и квадратни милиметар у реалном окружењу. Такође, употребом клизача на очигледан начин могу пратити процес поплочавања површи квадратног метра моделом квадратног дециметра и закључити колико пута је квадратни метар већи од квадратног дециметра (Слика 64). Померањем хоризонталног клизача ученици уочавају да у једном реду има укупно десет квадратних дециметара (Слика 64а), док померањем вертикалног клизача пребројавањем утврђују да у квадратном метру има десет редова са по десет квадратних дециметара (Слика 64б). Коначно, закључују да се сто квадратних дециметара садржи у једном квадратном метру, односно да је квадратни дециметар мерна јединица за површину сто пута мања од квадратног метра.



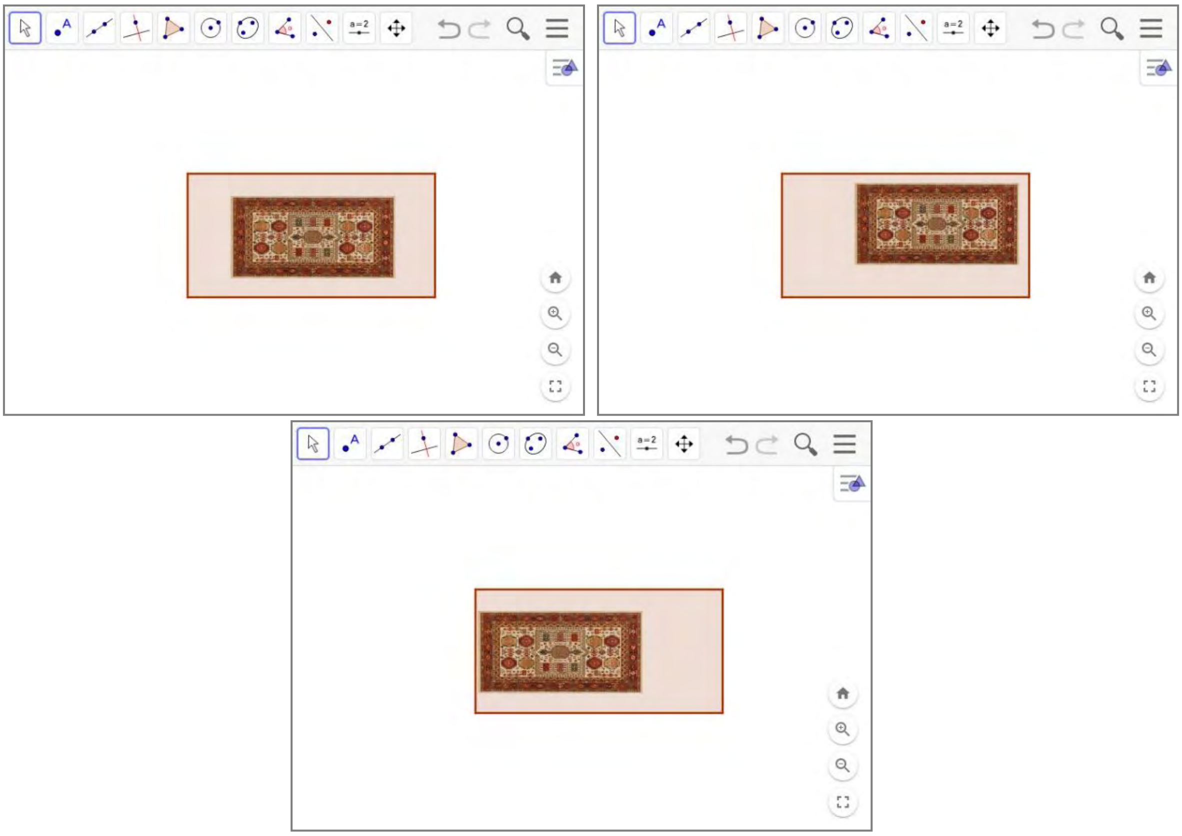
а) б)

Слика 64. *Упоређивање површине од једног квадратног метра и једног квадратног дециметра у пакету GeoGebra*

Аналогним поступком могу закључити о односима осталих јединица мере за површину, да је квадратни дециметар јединица мере сто пута већа од квадратног центиметра, а да је квадратни центиметар сто пута већи од квадратног милиметра. За додатно увежбавање садржаја у вези са јединицама мере за површину и њиховим односом може користити Пример 3.

Пример 3. *Површина пода собе је $18m^2$, а површина тепиха $800dm^2$. Колика површина пода није прекривена тепихом?*

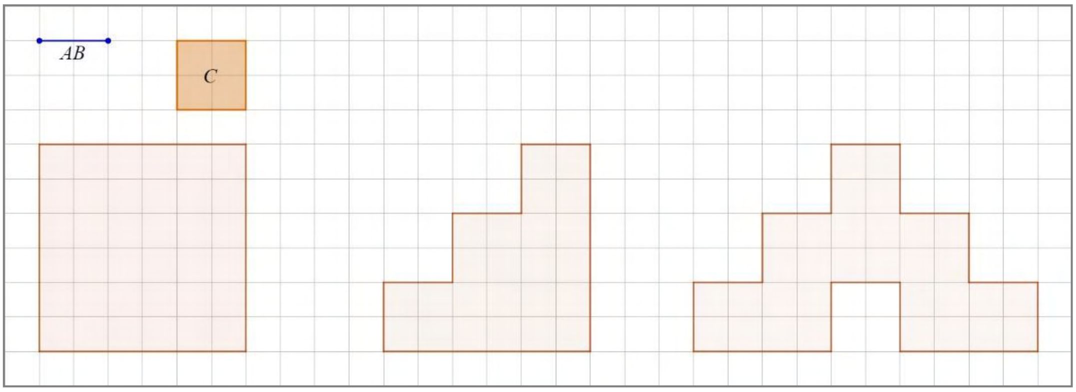
У Примеру 3 од ученика се захтева да одреде који део пода собе није прекривен тепихом дате површине. У оваквој ситуацији визуелни приказ проблема помаже ученицима да лакше разумеју задатак и боље овладају односима међу јединицама мере за површину. Модел креиран у софтверу *GeoGebra* приказује реалан однос димензија пода собе и тепиха, док захваљујући динамичном приказу и могућности померања приказаних објеката ученици закључују да површина непокривеног дела пода не зависи од положаја тепиха (Слика 65). Променом положаја превлачењем тепиха ученици уочавају да је површина непокривеног дела пода инваријантна и да се одређује одузимањем површине тепиха од укупне површине пода. Посматрањем мерних јединица у којима су дате површине пода собе и тепиха, ученици закључују да их најпре треба превести у исте јединице мере, а затим извршити одузимање мерних бројева површине.



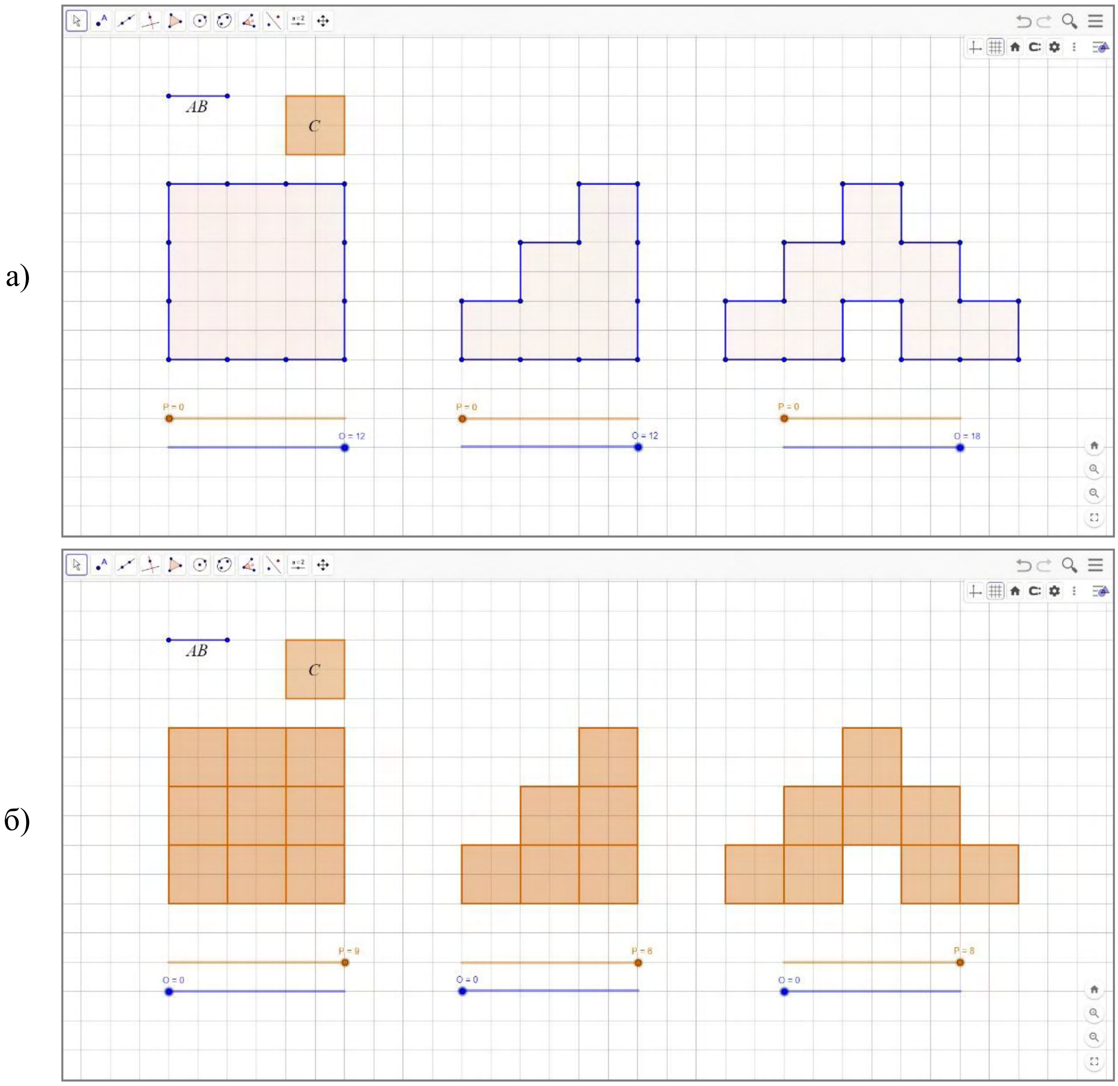
Слика 65. *Визуелни приказ проблема одређивања површине пода у пакету GeoGebra*

Динамични прикази које обезбеђује *GeoGebra* пакет могу ученицима умногоме олакшати усвајање појма мерења површине и помоћи им да га јасно разликују од појма обима фигуре (Пример 4).

Пример 4. *Ако је дужина дужи AB један центиметар, а површина квадрата C један квадратни центиметар, одреди обиме и површине нацртаних фигура.*



Захваљујући динамичном окружењу софтвера *GeoGebra*, решавање проблема овог типа може се поједноставити креирањем одговарајућих модела (Слика 66). За сваку од датих фигура постављена су по два клизача који имају улогу да олакшају ученицима визуелизацију појмова обим и површина. Померањем плавих клизача врши се преношење дужи *AB* на изломљене линије које ограничавају површи датих фигура, чиме ученици могу на очигледан начин пратити мерење обима датих фигура (Слика 66а). Аналогно мерењу обима, померањем наранџастих клизача ученици могу на једноставан начин да прате који број квадрата *C* је потребан да се поплочају површи датих фигура, односно који су мерни бројеви њихових површина (Слика 66б). На тај начин ученици лакше визуелизују појмове обима и површине, увиђају на шта се ови појмови односе и праве јасну дистинкцију између њих.

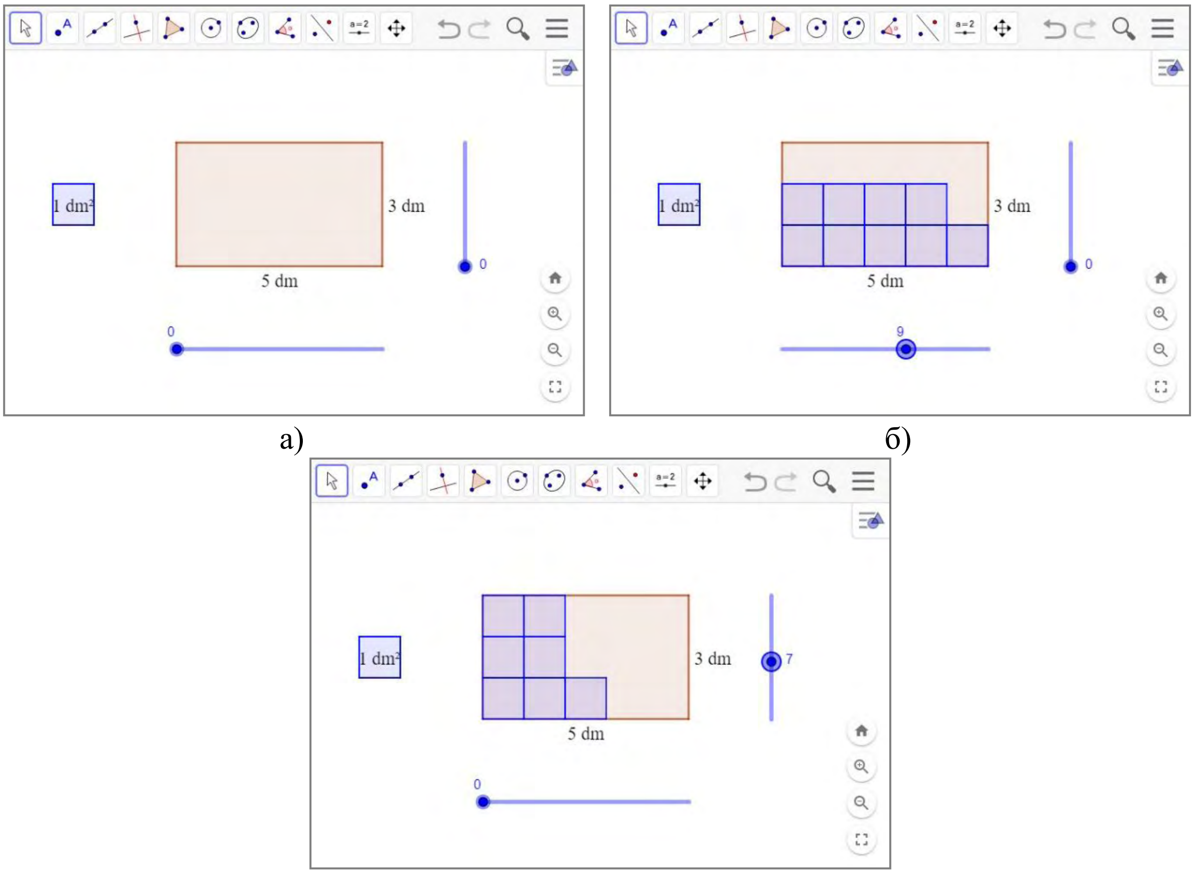


Слика 66. *Приказ проблема одређивања обима и површине у пакету GeoGebra*

На основу коначног броја примера поплочавања површи ученици могу закључити да мерење површине фигура оваквим поступком није најекономичније, јер ређање јединица мере захтева много времена и прецизности. Из тог разлога, знатно практичнији начин за израчунавање површине фигуре јесте преко њених димензија (Пример 5).

Пример 5. *Дужина листа папира облика правоугаоника је 5dm, а ширина 3dm. Израчунај површину листа папира.*

На основу информација датих у задатку лист папира је могуће представити моделом облика правоугаоника страница 5dm и 3dm. Уз помоћ модела направљеног у *GeoGebra* пакету и клизача који омогућавају динамичност, ученици могу да закључе са колико се квадрата површине 1dm^2 може поплочати површ правоугаоника која одговара листу папира датих димензија (Слика 67). Број квадрата потребних за поплочавање површи правоугаоника једнак је мерном броју површине листа папира у Примеру 5.



а) б)

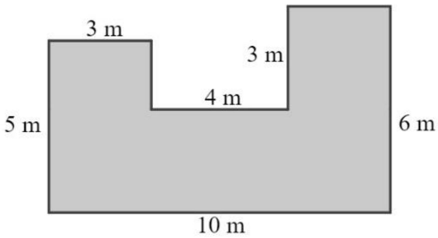
в)

Слика 67. *Приказ проблема одређивања површине правоугаоника у пакету GeoGebra*

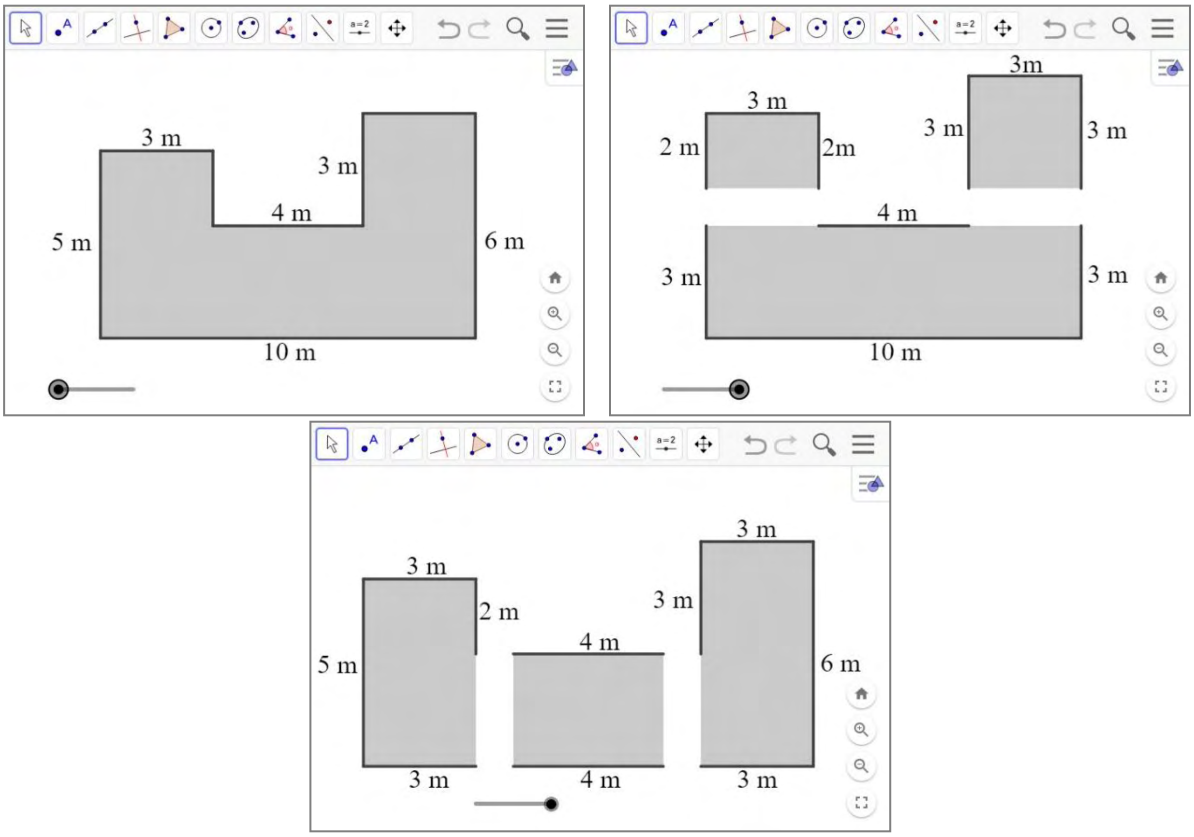
Уз помоћ хоризонталног клизача поплочавање се врши по редовима (Слика 67б), и то три реда са по пет квадрата, док се уз помоћ вертикално постављеног клизача поплочавање изводи по колонама (Слика 67в), и то пет колона са по три квадрата у свакој. Пребројавањем укупног броја квадрата потребних за поплочавање ученици закључују да је у оба случаја добијен исти мерни број површине правоугаоника, односно листа папира. Даље, доводећи у везу добијени мерни број површине правоугаоника са мерним бројевима дужина суседних страница ученици долазе до закључка да је мерни број површине правоугаоника једнак производу мерних бројева дужина његових суседних страница.

Захваљујући могућностима које пружа, *GeoGebra* софтвер може помоћи ученицима да декомпонују проблем, односно да проблем израчунавања површине и обима сложене фигуре преведу на проблем израчунавања површина и обима више правоугаоника (Пример 6).

Пример 6. *Колико квадратних метара паркета и колико метара лајсне за паркет треба набавити за прекривање пода библиотеке датог на слици?*



Уз помоћ модела направљених у пакету *GeoGebra* ученици уочавају на које начине је могуће поделити дату сложену фигуру која одговара површи пода библиотеке (Слика 68). Фигуру је могуће на више начина поделити на три правоугаоника, при чему странице сваког од новонасталих правоугаоника одговарају димензијама дате фигуре.



Слика 68. *Приказ проблема одређивања површине и обима сложене фигуре у пакету GeoGebra*

Покретањем клизача ученици на динамичан начин прате процес трансформације сложене фигуре у три правоугаоника и закључују да је укупна површина фигуре једнака збиру површина сва три правоугаоника. Захваљујући креираним анимацијама ученици уочавају односе међу страницама фигуре и новонасталих правоугаоника и закључују које странице или делови страница правоугаоника улазе у обим сложене фигуре. На тај начин откривају да до обима сложене фигуре могу доћи сабирањем дужина само оних страница или делова страница правоугаоника које формирају изломљену линију која ограничава површ фигуре.

Модели креирани у *GeoGebra* софтверу помажу ученицима и да проблем израчунавања површине квадрата сведу на проблем израчунавања површине правоугаоника једнаких дужина страница. Како квадрат поседује све особине правоугаоника, ученици на конкретним примерима закључују да се на исти начин може израчунати и површина квадрата (Пример 7).

Пример 7. *Израчунај површину правоугаоника страница:*

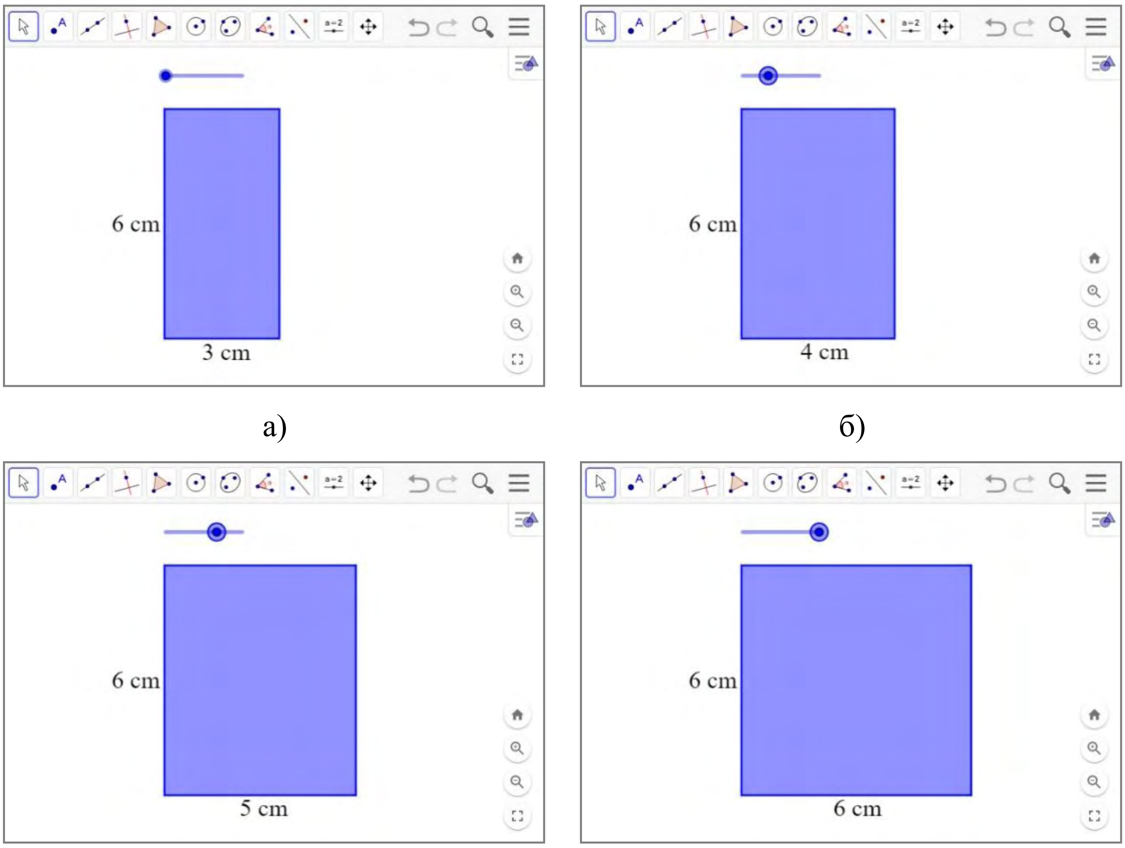
а) a=6 cm, b=3 cm;

б) a=6 cm, b=4 cm;

в) a=6 cm, b=5 cm;

г) a=6 cm, b=6 cm.

Захваљујући моделу правоугаоника креираном у софтверу *GeoGebra* код којег је једна страница сталне дужине 6cm, док је дужину друге странице могуће мењати уз помоћ претходно формираног клизача, ученици на динамичан начин могу пратити трансформацију правоугаоника из примера а) у квадрат у примеру г) (Слика 69).



а) б)

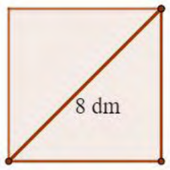
в) г)

Слика 69. *Приказ проблема одређивања површине квадрата у пакету GeoGebra*

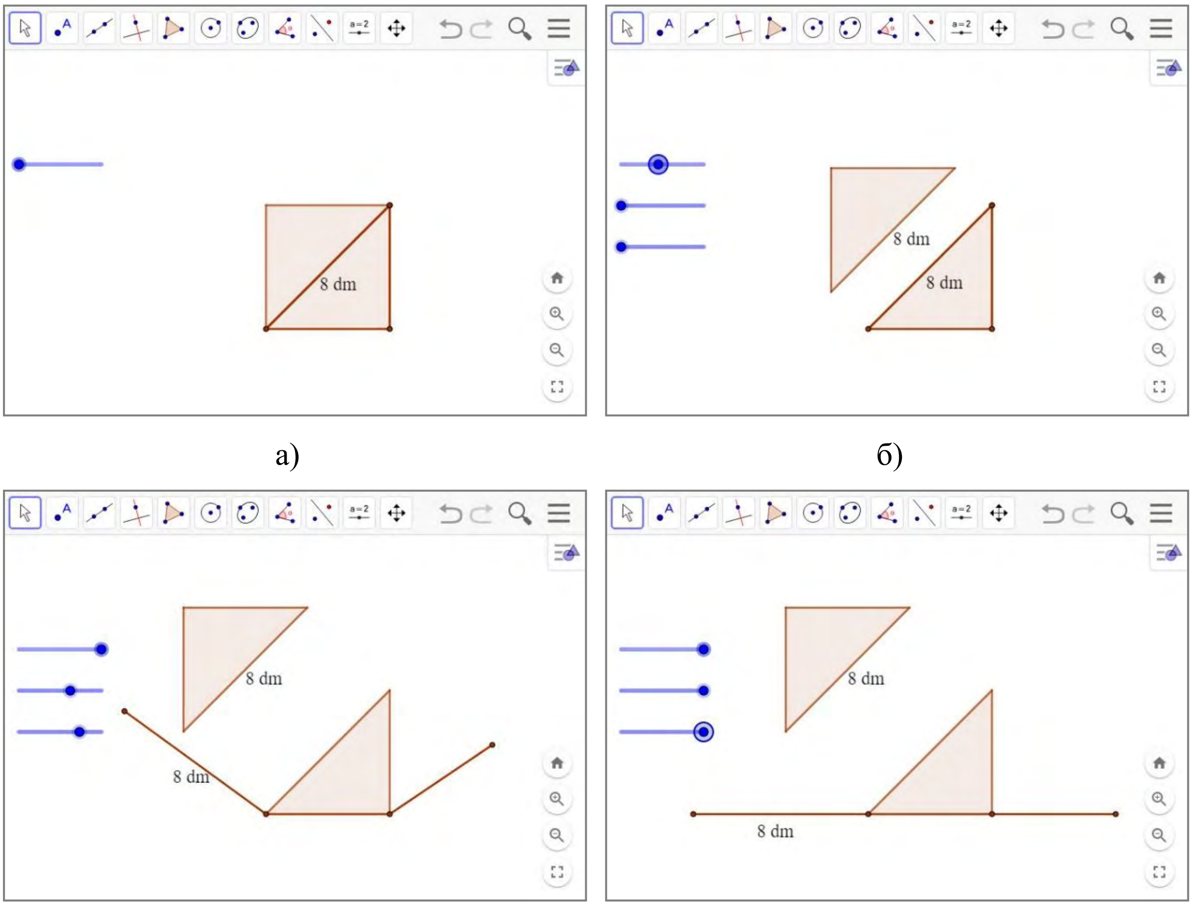
Након израчунавања површине правоугаоника датих димензија у примерима а), б) и в), ученици закључују да је уз помоћ истог обрасца могуће израчунати и површину правоугаоника у примеру г). Визуелизацијом коју обезбеђује модел направљен у *GeoGebra* софтверу уочавају да је у примеру г) у питању правоугаоник страница једнаких дужина, односно квадрат (Слика 69г), и да се његова површина може израчунати као површина правоугаоника једнаких страница.

Уз помоћ динамичних модела направљених у софтверу *GeoGebra* ученици лакше уочавају однос међу датим вредностима у задатку, доводе у везу одговарајуће објекте и са успехом решавају сложене математичке проблеме (Пример 8).

Пример 8. *Израчунај површину квадрата са слике ако је обим једног троугла 18 dm.*



Динамичан приказ модела квадрата направљеног у *GeoGebra* софтверу пружа могућност ученицима да померањем клизача на очигледан начин закључе да се квадрат састоји од два троугла (Слика 70а). Троуглови су подударни јер по две странице квадрата истовремено представљају и странице сваког од троуглова, док је дужина треће странице троуглова позната и износи 8 dm (Слика 70б).



а) б)

в) г)

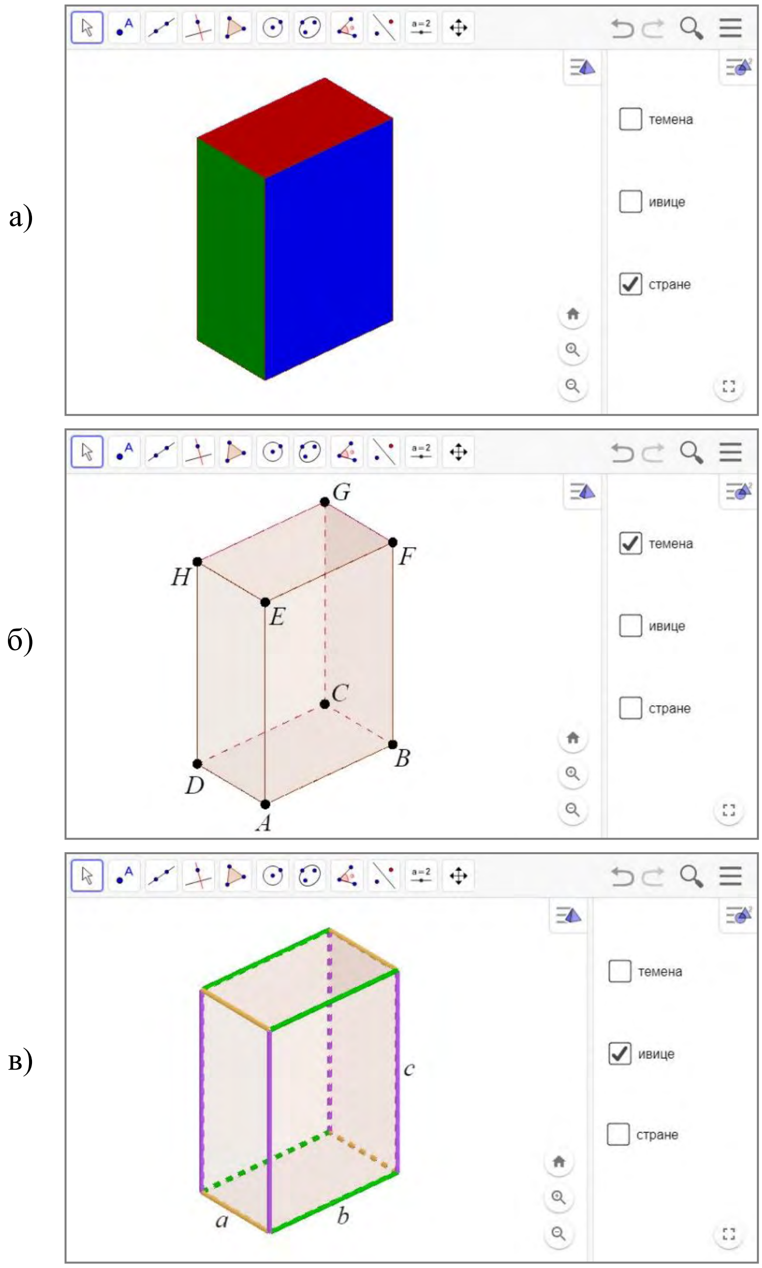
Слика 70. *Приказ проблема одређивања површине квадрата у пакету GeoGebra*

Појављивањем два нова клизача (Слика 70в) могуће је изломљену линију која ограничава површ једног од троуглова трансформисати у дуж укупне дужине једнаке обиму троугла (Слика 70г). Добијена дуж састоји се из надовезане две једнаке странице и једне странице троугла дужине 8 dm. Како је дужина једне странице троугла дата, док су друге две странице троугла једнаке (представљају странице квадрата), то је на основу познатог обима троугла могуће одредити дужину осталих страница.

Враћањем клизача на почетне вредности троуглови поново формирају почетни квадрат (Слика 70а) а ученици уочавају да су добијене странице троуглова истовремено суседне странице квадрата, те применом обрасца за израчунавање површине квадрата израчунавају његову површину.

3.5. Модели примене *GeoGebra* пакета у увођењу појма геометријског тела и мерења површине тела

Програм наставе и учења предвиђа да се појмови геометријских тела *квадра* и *коцке* формирају на исти начин како се формирају и појмови геометријских фигура у равни. У пакету *GeoGebra* уз помоћ алата Prizma може се креирати квадар на којем је могуће посебно истаћи елементе које ученици треба да уоче (Слика 71). Захваљујући могућности ротације квадра и вишеструког приказа, ученици пребројавањем могу утврдити да се површ квадра састоји од шест страна облика правоугаоника (Слика 71а), да квадар има осам темена (Слика 71б) и дванаест ивица (Слика 71в). Ради лакшег формирања представе о појму квадра, да су наспрамне стране квадра подударне, да постоје три групе ивица једнаких дужина, одговарајуће групе елемената представљене су истом бојом.



а)
☐ темена
☐ ивице
☑ стране

б)
☑ темена
☐ ивице
☐ стране

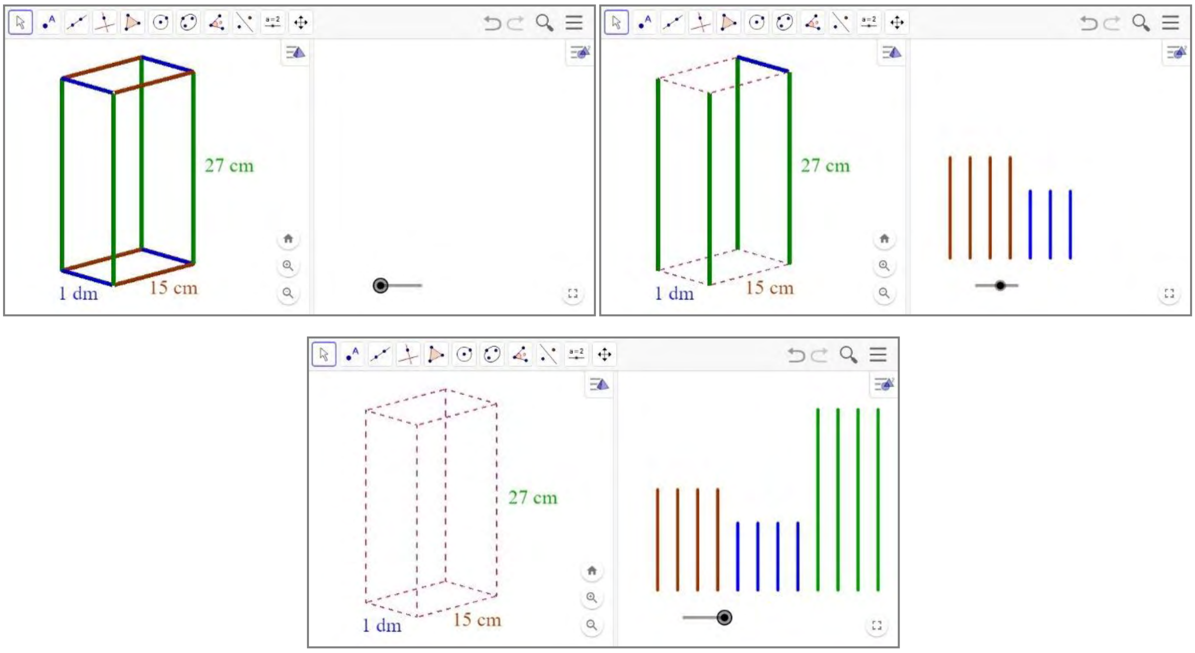
в)
☐ темена
☑ ивице
☐ стране

Слика 71. *Приказ квадра у пакету GeoGebra*

У Примеру 9 наводимо задатак у којем визуелизација којој *GeoGebra* доприноси може помоћи ученицима да разумеју проблемску ситуацију из свакодневног живота а коју је могуће превести на математички проблем одређивања збира дужина свих ивица квадра.

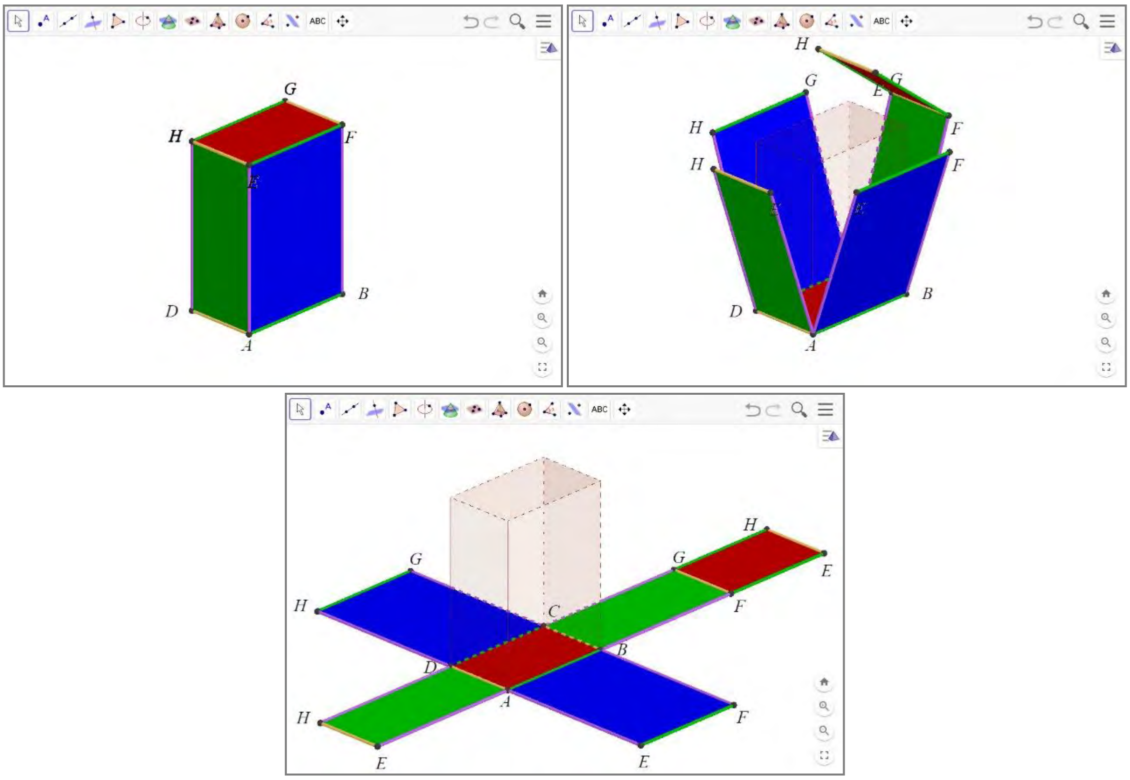
Пример 9. *Колико је потребно жице да би се направио модел квадра чија је дужина 15 cm, ширина 1 dm, а висина 27 cm?*

У задацима оваквог типа адекватна визуелизације представља огромну подршку при решавању проблема. Управо уз помоћ модела направљеног у динамичном окружењу *GeoGebra* пакета ученици могу лако да визуелизују проблем одређивања дужине жице потребне за састављање квадра датих димензија (Слика 72). Ради лакшег уочавања потребних елемената, на приказаном моделу квадра изостављене су стране и темена како би се пажња ученика у потпуности усмерила на ивице. Захваљујући могућности ротације, ученици се могу уверити да су по четири ивице квадра једнаке дужине. Додатно, ивице исте дужине обојене су истом бојом, што им олакшава да закључе да квадар садржи три групе од по четири ивице једнаке дужине. Како софтвер омогућава вишеструки приказ, уз помоћ креираног клизача могуће је додатно издвојити све ивице квадра у дводимензионалном делу пакета, чиме се доприноси лакшој визуелизацији ивица. На основу свега изнетог ученици закључују да се сабирањем дужина свих дванаест ивица квадра добија збир свих ивица квадра, односно у конкретном задатку решење проблема колико је жице потребно за састављање квадра.



Слика 72. *Приказ ивица квадра у пакету GeoGebra*

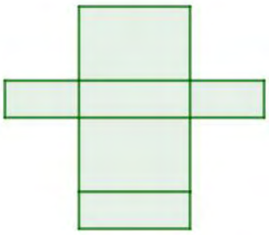
Практичним активностима мерења ученици могу на моделима направљеним у *GeoGebra* пакету утврдити које су стране квадра подударне и наспрамне, док је избором алата Mreža могуће представити мрежу површи квадра у равни (Слика 73). Представљањем мреже квадра у равни ученици лакше уочавају да свако теме квадра истовремено припада трима странама, а свака ивица ограничава две стране квадра.

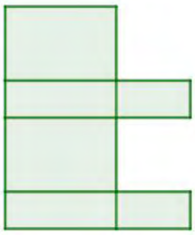


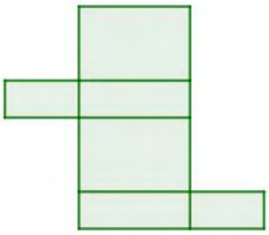
Слика 73. *Приказ мреже квадра у пакету GeoGebra*

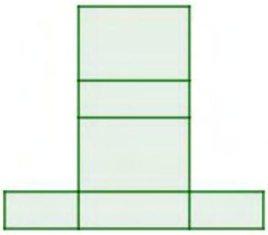
GeoGebra софтвер не само да помаже ученицима код увођења појма квадра, већ им пружа шансу и да разумеју на које се све начине може представити мрежа површи квадра (Пример 10).

Пример 10. *Заокружи фигуре са слике које представљају мрежу квадра*.

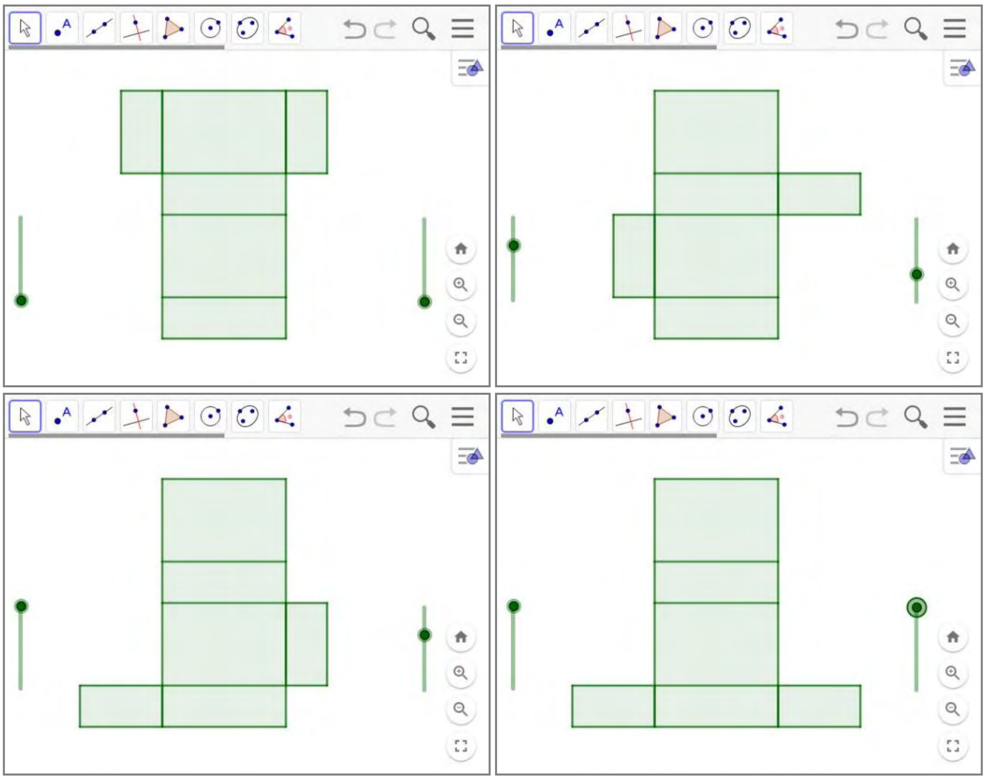








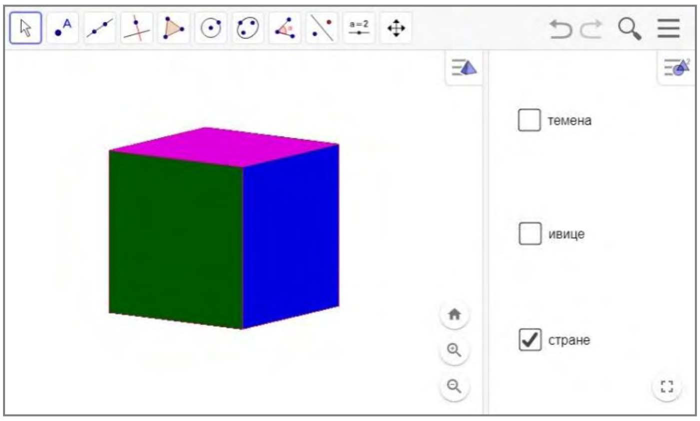
Искуствено, на основу коначног броја примера ученици закључују да се фигура која представља мрежу квадра састоји из шест правоугаоника, при чему су три пара подударних правоугаоника. Међутим, да би нека фигура представљала мрежу површи квадра битан је положај који ти правоугаоници заузимају. Уз помоћ модела мреже квадра креираног у софтверу *GeoGebra* ученици могу на динамичан начин истражити на које начине је могуће представити мрежу квадра у равни (Слика 74). Мењањем вредности два дата клизача може се формирати више различитих приказа мреже квадра и тако помоћи ученицима при усвајању појма мреже квадра.



Слика 74. *Приказ мреже квадра у равни у пакету GeoGebra*

Увођење појма *коцке* уз помоћ модела направљеног у *GeoGebra* софтверу одвија се аналогно са формирањем појма квадра. На Слици 75 приказан је модел коцке генерисан у *GeoGebra* софтверу уз помоћ алата Kocka. Оно што даје предност моделу направљеном у софтверу јесте могућност ротирања, што доприноси бољој очигледности и даје прилику ученицима да уоче елементе који се налазе са задње стране модела, као и односе оних елемената које је при дводимензионалном приказу тешко представити (нормалност ивица). Ученици могу уочити темена, стране и ивице коцке, а ради лакшег уочавања посматраних елемената активирањем поља за потврду у десном делу радног окружења могуће је посебно истаћи посматране елементе. Пребројавањем ученици могу утврдити да се површ коцке састоји од шест страна облика квадрата (Слика 75а), да коцка има осам темена (Слика 75б) и дванаест ивица (Слика 75в).

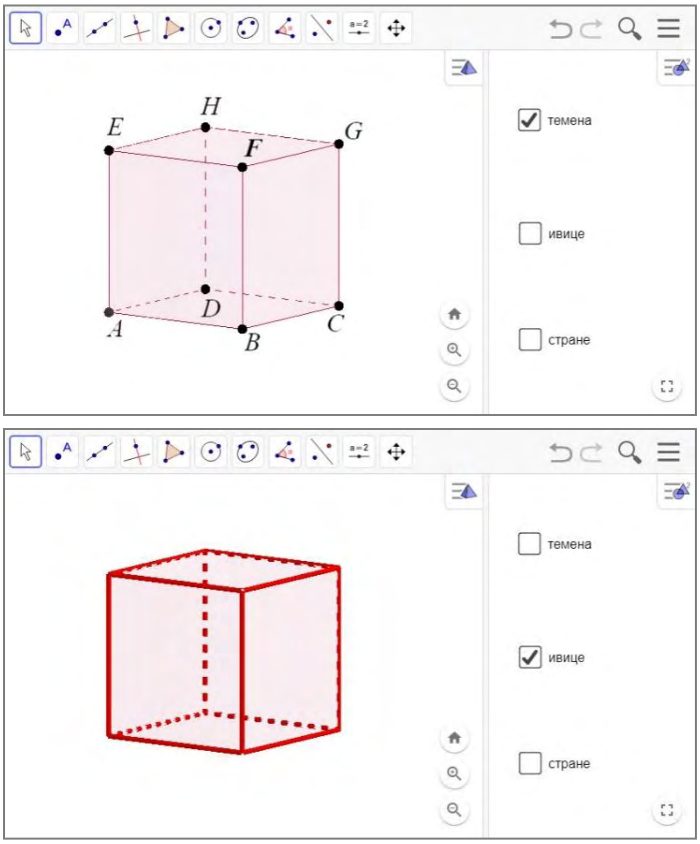
а)



☐ темена

☐ ивице

☑ стране



б)

☑ темена

☐ ивице

☐ стране

в)

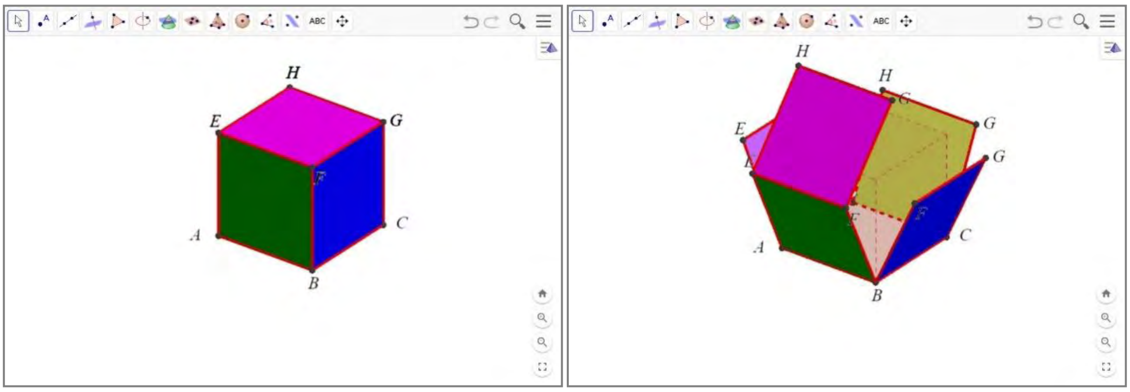
☐ темена

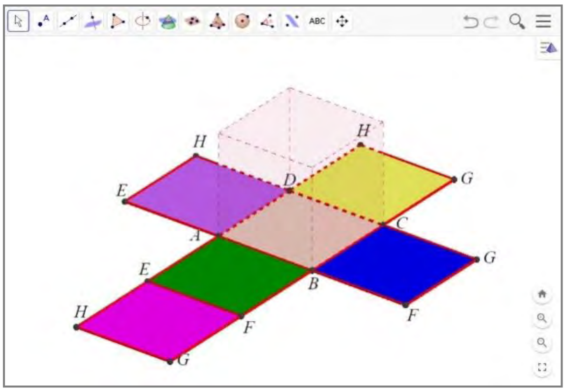
☑ ивице

☐ стране

Слика 75. *Приказ коцке у пакету GeoGebra*

Избором алата Mreža могуће је представити мрежу површи датог тела у равни и дати прилику ученицима да уоче из којих многоуглова се састоји површ коцке, да као и код квадра, свако теме коцке истовремено припада трима странама, а свака ивица коцке ограничава две стране (Слика 76). Даље, захваљујући чињеници да је могуће заротирати модел, учитељ заједно са ученицима закључује да су све стране коцке подударни квадрати.

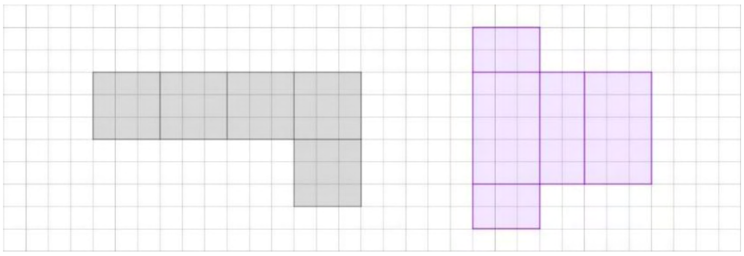




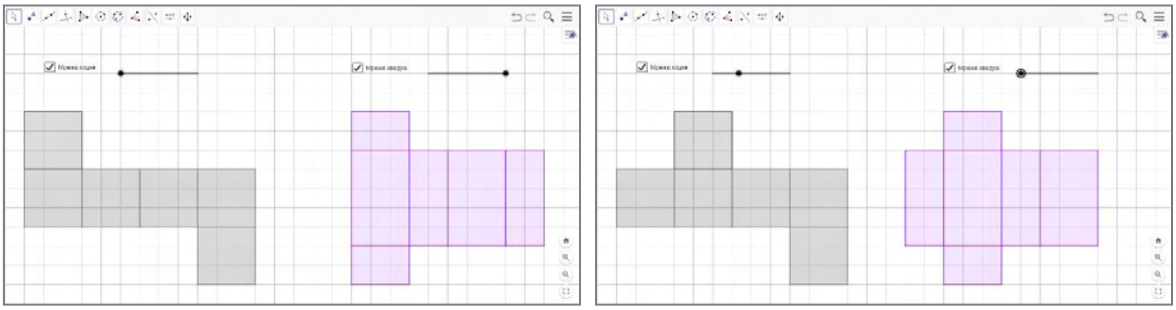
Слика 76. *Приказ мреже коцке у пакету GeoGebra*

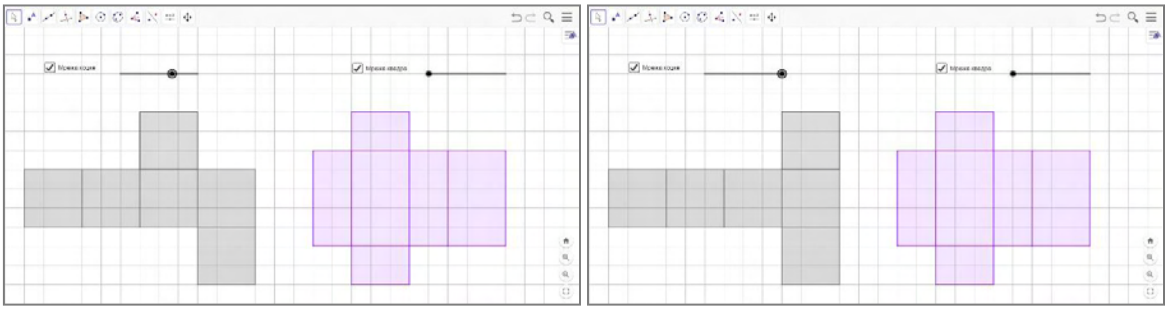
Приликом формирања мреже површи геометријског тела у равни, софтвер *GeoGebra* омогућава враћање мреже површи у првобитан положај и извођење инверзне операције операцији „развијања” мреже. Сам процес извођења инверзне операције подстиче развој реверзибилности мишљења ученика (Егерић, 2009), дајући им прилику да се најпре визуелно а затим и мисаоно врате уназад и целину упореде са деловима. С тим у вези, *GeoGebra* софтвер не само да помаже ученицима у увођењу, већ и у увежбавању садржаја који се односе на геометријска тела коцке и квадра, њихове особине и односе међу њиховим елементима (Пример 11).

Пример 11. *Доцртај делове фигура који недостају тако да добијеш мрежу коцке и мрежу квадра.*



Задатак представљен у Примеру 11 има више тачних решења тако да уз помоћ динамичних модела креираних у пакету *GeoGebra* ученици могу посматрати на које је све начине могуће доцртати делове фигура који недостају тако да се добију мрежа коцке и квадра (Слика 77).

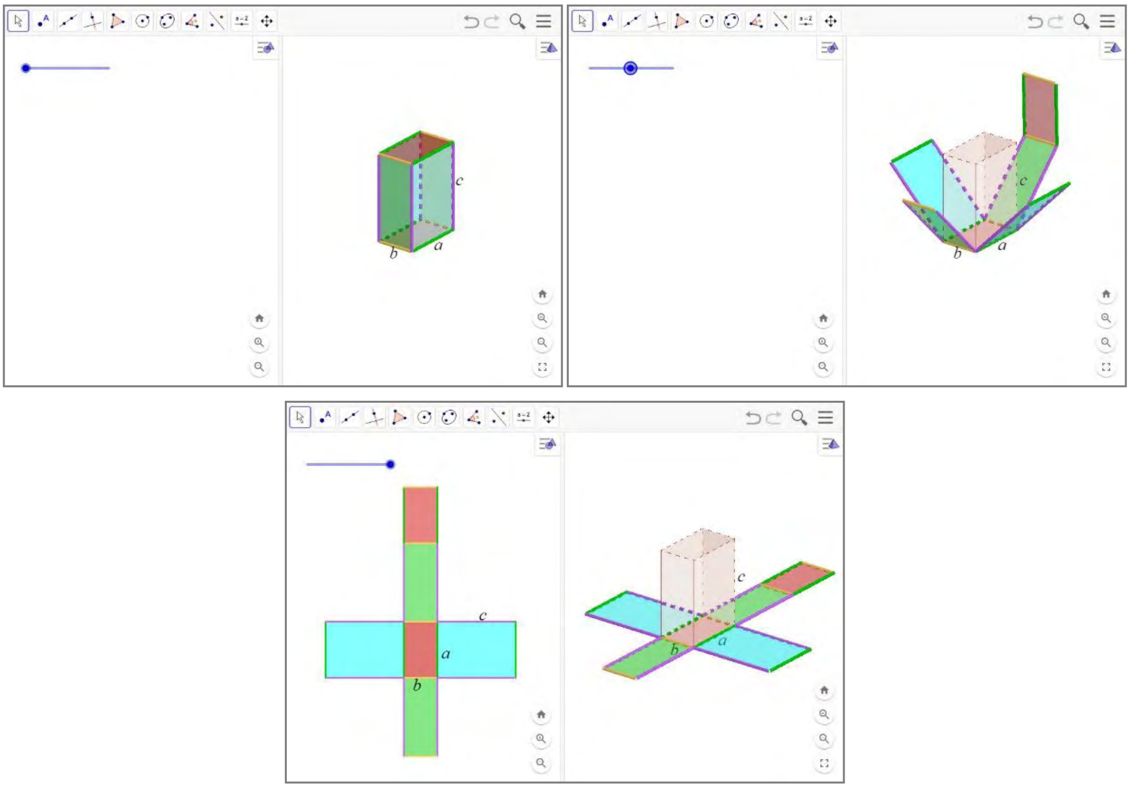




Слика 77. *Приказ мреже коцке и квадра у пакету GeoGebra*

На основу визуелизације дате фигуре на левој страни у Примеру 11 ученици закључују да се ради о мрежи коцке и да је потребно доцртати још један квадрат. Кликом на поље за потврду *Мрежа коцке* појављују се квадрат који недостаје и клизач. Мењањем вредности клизача ученици могу посматрати које све положаје може заузети шести квадрат како би добијена фигура представљала мрежу коцке. Аналогно, ученици уочавају да се фигура са десне стране састоји од пет правоугаоника, од тога два пара подударних правоугаоника. Како се мрежа квадра састоји из шест правоугаоника, ученици закључују да преосталом правоугаонику треба доцртати подударан правоугаоник, а уз помоћ клизача представљени су потенцијални положаји које правоугаоник може заузети како би добијена фигура представљала мрежу квадра.

Динамичан приказ формирања мреже површи у равни доприноси увођењу појма мерења површине геометријских тела. Када на очигледном примеру уоче из колико многоуглова се састоји површ геометријског тела, уз претходно усвојен поступак мерења површине многоугла, ученицима је једноставније да индуктивним путем закључе на који начин се израчунава површина површи која ограничава геометријско тело. Мулиган и сарадници наводе да се за овладавање појмом површине геометријског тела најпре треба фокусирати на препознавање мреже површи конкретног тродимензионалног тела (Mulligan, Prescott, Mitchelmore, Outhred, 2005). Међутим, будући да разумевање тродимензионалних тела путем њихових дводимензионалних приказа може бити изазовно за већину ученика, Вагова истиче да ученици често имају потешкоће приликом уочавања односа који владају међу њиховим елементима (нормалност, паралелност, подударност) (Vágová, 2021). Због свега тога предност *GeoGebra* софтвера је што на једном месту обједињује и тродимензионалну репрезентацију геометријског тела и приказ његове мреже у равни. Могућности које *GeoGebra* софтвер нуди у формирању појма површине квадра огледају се управо у вишеструким репрезентацијама, чињеници да ученици могу на динамичан начин пратити трансформацију површи квадра у тродимензионалном делу пакета и посматрати формирање мреже у дводимензионалном делу (Слика 78). Полазећи од квадра са десне стране, датог у тродимензионалном делу прозора, ученици уз помоћ клизача прате процес трансформације мреже квадра у дводимензионалну фигуру у равни. По завршетку овог процеса у дводимензионалном делу прозора са леве стране могу видети развијену мрежу квадра у равни. Посматрањем мреже квадра на овај начин, ученици су у прилици да лакше визуелизују његове стране, њихов облик и које од страна су међусобно подударне (приказане су истом бојом). Ученици доводе у везу ивице квадра приказане у тродимензионалном делу софтвера са страницама правоугаоника који чине мрежу квадра приказану у дводимензионалном делу и, коначно, закључују да површину фигуре која одговара мрежи квадра могу одредити сабирањем мерних бројева површине шест одговарајућих правоугаоника.

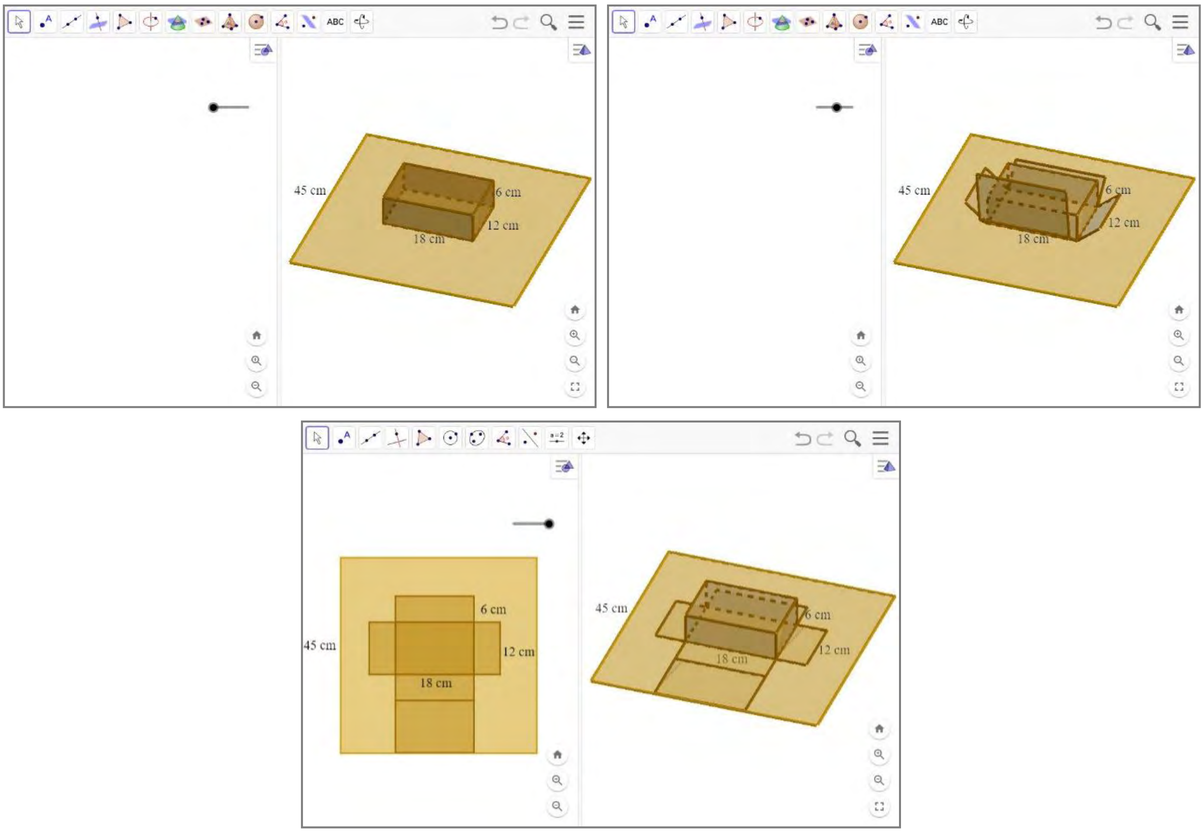


Слика 78. *Увођење појма мерења површине квадра у пакету GeoGebra*

На конкретним примерима проблема смештених у реални контекст могуће је показати у којој мери вишеструке репрезентације *GeoGebra* софтвера помажу ученицима да развију појам мерења површине квадра (Пример 12).

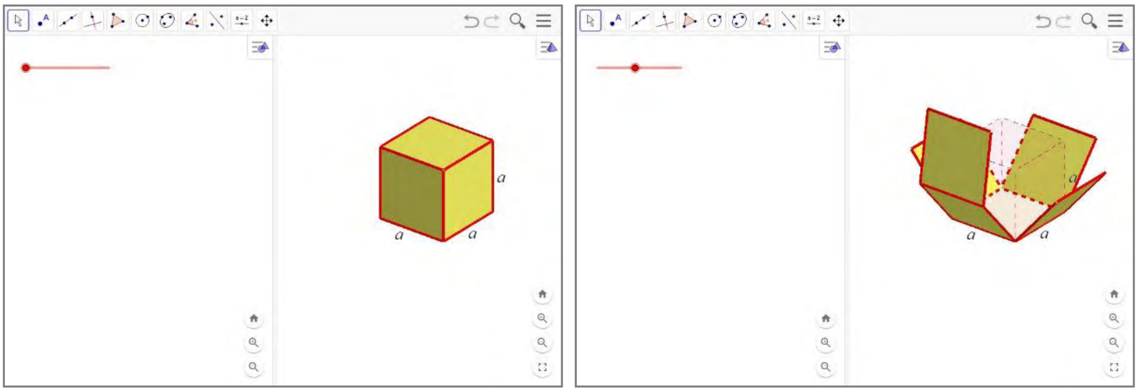
Пример 12. *Колика површина картона преостане када се од картона облика квадрата странице 45 cm направи кутија облика квадра ивица 18 cm, 12 cm и 6 cm?*

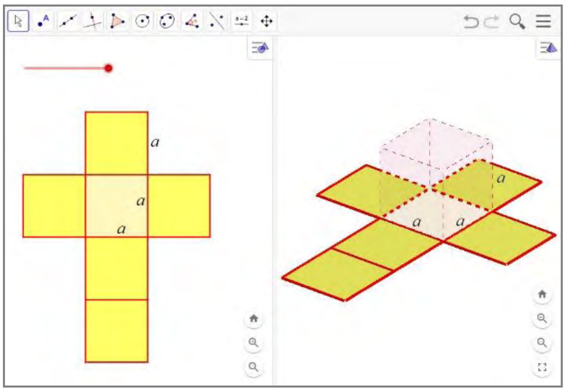
Графичка репрезентација олакшава ученицима разумевање проблема и помаже им да закључе шта је потребно да израчунају у задатку. На динамичном моделу направљеном у *GeoGebra* пакету ученици могу у десном делу прозора да виде квадрат који одговара картону датих димензија и квадар који је потребно изрезати са истакнутим димензијама (Слика 79). Померањем постављеног клизача долази до трансформације квадра и развијања мреже квадра који треба направити. На основу дводимензионалног приказа, ученици закључују да површину преосталог картона могу израчунати одузимањем мерног броја површине квадра од мерног броја површине картона. За израчунавање површине квадра врше сабирање површина шест правоугаоника који формирају мрежу квадра а чије странице одговарају димензијама ивица квадра. Са друге стране, како је картон облика квадрата, за израчунавање његове површине користе образац за површину квадрата који су претходно упознали. Одузимањем добијених мерних бројева одређују површину картона који преостане приликом прављења кутије облика квадра датих димензија.



Слика 79. *Приказ проблема мерења површине квадра у пакету GeoGebra*

С обзиром на то да ученици коцку схватају као квадар ограничен са 6 квадрата, то се и оспособљавање ученика за израчунавање површине коцке заснива на аналогним поступцима којима је уз помоћ *GeoGebra* софтвера формиран појам површине квадра. Трансформацију површи коцке и формирање мреже ученици прате и у тродимензималном и у дводимензионалном приказу (Слика 80). У десном делу прозора, дата је коцка у тродимензионалном приказу, а захваљујући креираном клизачу ученици могу пратити процес трансформације мреже њене површи у фигуру у равни. На крају, у дводимензионалном делу прозора са леве стране могу видети развијену мрежу коцке у равни. Дводимензионални приказ има за циљ да олакша ученицима да уоче да се мрежа коцке састоји из шест подударних квадрата, па закључују да површину коцке могу одредити сабирањем површина шест квадрата који представљају стране коцке. Додатно, вишеструки приказ им помаже при просторној визуелизацији, да изврше „преношење” димензија, односно примете да ивице коцке одговарају страницама квадрата који ограничавају коцку.



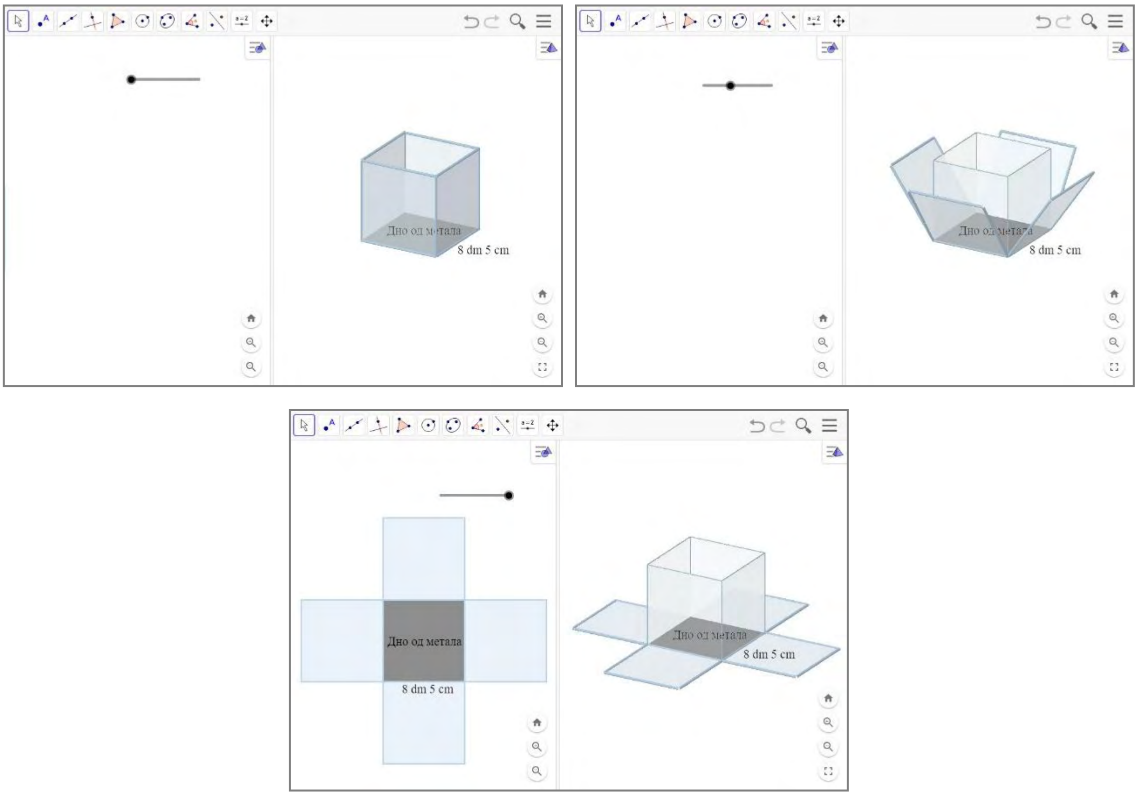


Слика 80. *Увођење појма мерења површине коцке у пакету GeoGebra*

У проблемским ситуацијама које се односе на мерење површине коцке и садрже неке додатне услове које је потребно испунити како би се проблем успешно решио *GeoGebra* помаже ученицима визуелизацијом проблема и тиме умањује могућност прављења грешке (Пример 13).

Пример 13. *Колико је стакла потребно за прављење акваријума облика коцке ивице 8 dm 5 cm ако је дно акваријума метално?*

Бројни услови о којима је потребно да ученици воде рачуна знатно су очигледнији уколико се приликом решавања оваквог задатка примењује графичка репрезентација проблема (Слика 81).



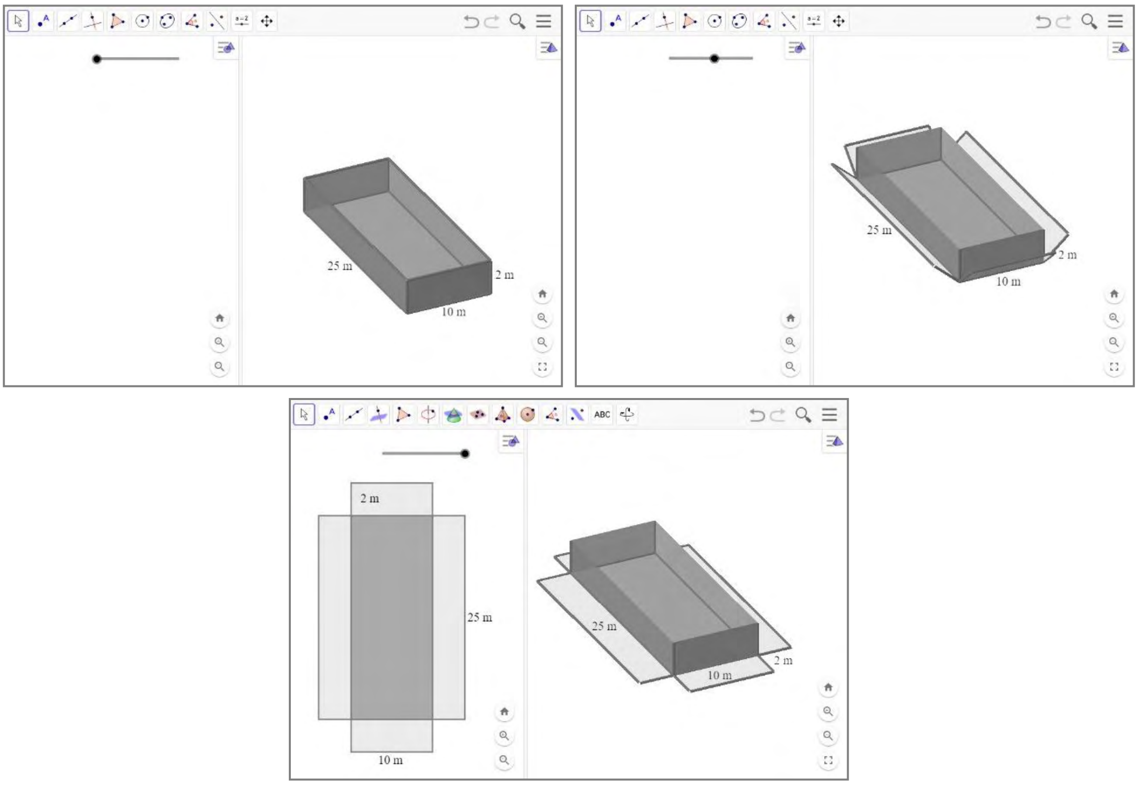
Слика 81. *Приказ проблема мерења површине коцке у пакету GeoGebra*

С обзиром на то је у задатку акваријум облика коцке, то је у десном делу прозора приказан тродимензионални модел коцке који одговара акваријуму. Акваријум нема поклопац и на основу услова задатка дно акваријума је направљено од метала, па модел коцке не садржи горњу страну, док је на доњој страни назначено да је дно направљено од метала. Уз помоћ претходно уведеног клизача бочне стране коцке трансформишу се у раван на основу чега ученици закључују да до површине стакла које је потребно за прављење акваријума облика коцке долазе сабирањем мерних бројева површине четири стране коцке.

Како бисмо код ученика додатно развијали појам мерења површине геометријских тела и учинили да га јасно разликују од других математичких појмова, можемо искористити проблеме реалног контекста као у следећем примеру (Пример 14).

> Пример 14. *Базен облика квадра дужине 25 m, ширине 10 m и дубине 2m треба поплочати плочицама облика правоугаоника димензија 5 dm и 2 dm. Колико је потребно плочица да би се поплочао овај базен?*

Као и у претходном задатку, визуелни приказ проблема умногоме олакшава његово решавање. Током хеуристичког разговора ученици уочавају да је потребно поплочати дно и бочне стране базена, па модел квадра који одговара условима задатка не садржи горњу страну (Слика 82).



Слика 82. *Приказ проблема мерења површине квадра у пакету GeoGebra*

Мрежа квадра који одговара базену датих димензија садржи пет правоугаоника и приликом израчунавања површине треба изоставити површину правоугаоника који одговара горњој страни квадра. До броја плочица потребних за поплочавање базена долази се дељењем мерног броја површине базена површином једне плочице па је потребно израчунати и површину једне плочице. Оне су облика правоугаоника, па се површина једне плочице израчунава уз помоћ обрасца за површину правоугаоника. На крају, ученици дељењем површине базена површином једне плочице долазе до одговора на питање колико је плочица потребно да би се поплочао базен.

***

Могућности примене софтверског пакета *GeoGebra* нису ограничене на дате примере. Велика база готових модела из геометрије, али и других области математике доступна је на званичном сајту софтвера. Бројна истраживања показују да употреба софтвера доприноси бољем разумевању појма рационалног броја (Bulut et al., 2016; Lee, Boyadzhiev, 2013; Миликић, Вуловић, Михајловић, 2020; Thambi, Eu, 2013). Динамични модели креирани у *GeoGebra* пакету обезбеђују вишеструке геометријске репрезентације појма разломка на темељу којих ученици могу усвајати основне рачунске операције са разломцима и изводити даље генерализације. Такође, многоструки су примери примене *GeoGebra* пакета у раду и визуелизацији појма функције (Božić, Takači, Stankov, 2019; Mudaly, Fletcher, 2019; Mushipe, Ogbonnaya, 2019; Nzaramyimana et al., 2021; Olsson, 2019; Pfeiffer, 2017). За крај напоменимо и да су новије верзије пакета обогаћене алатима намењеним статистичкој обради података чиме је ученицима пружена прилика да лакше визуелизују апстрактне појмове и усредсреде се на концептуално разумевање и анализу података.

3.6. Потенцијална ограничења примене *GeoGebra* софтвера у учењу геометрије на млађем школском узрасту

Рачунарско окружење изузетно је подстицајно (Vágová, Kmetová, 2019), али треба имати на уму и да свако окружење и свака репрезентација имају и позитиван и негативан утицај на развој просторних способности ученика. С обзиром на то да приликом учења геометрије уз примену *GeoGebra* софтвера ученици закључују на основу приказа геометријских објеката на екрану рачунара, потребно је да ученици овладају правилним тумачењем дводимензионалних приказа геометријских тела, да науче да користе предности које образовни софтвер нуди, али и да критички промишљају. На пример, ученици могу погрешно тумачити дводимензионални приказ геометријског тела и за прав угао помислити да је оштар, или да су две ивице геометријског тела нормалне само зато што тако делује на екрану рачунара. Из тог разлога од изузетне је важности да ученици док раде са дводимензионалним приказима тродимензионалних облика користе различите вештине. Питалис и Кристоу идентификовали су две врсте вештина потребних у том раду – вештине кодирања и декодирања. Под вештинама кодирања информација подразумевају „конструисање мреже површи геометријских тела, конструисање дводимензионалног приказа геометријског тела и превођење из једног начина репрезентације у други, док вештине декодирања истовремено обухватају интерпретацију структурних елемената тродимензионалног објекта (темена, ивица и страна) и његових геометријских својстава" (Pittalis, Christou, 2013: 677).

Поредећи пакет *GeoGebra* са другим *DGS* софтверима, Макрел наводи низ проблема који се јављају, а тичу се репрезентације објеката (Mackrell, 2011). Аутор указује на недоследно представљање еуклидске равни до којег долази услед промене односа координатних оса. Том приликом дешава се промена изгледа објекта у графичком делу прозора, што може бити збуњујуће за ученике. Такође, активиран алгебарски део прозора у којем се налази алгебарска репрезентација креираних објеката (независних, зависних, помоћних) са непотребним и ометајућим информацијама може одвући пажњу ученика са онога што је важно. Резултати истраживања указују да коришћењем *GeoGebra*-е у учењу геометрије долази до пораста постигнућа, али ученици су става и да учење у оваквом окружењу није адекватно за сваког ученика (Chuaetal., 2017). Као један од разлога ученици истичу да није сасвим једноставно за кратко време се прилагодити концепту наставе који садржи примену *GeoGebra* окружења јер се тако мења начин рада који су усвојили и на који су навикли.

У једном од својих радова, Литл (Little, 2009) анализира баријере имплементацији динамичке геометрије у настави. Сматра да је првенствено потребно уверити учитеље да би уз коришћење оваквих пакета могли ефикасније поучавати ученике садржајима геометрије. Као још један од проблема јавља се доступност рачунара и интернета, како учитељима тако и ученицима (Bhagat, Chang, 2015; Budinski, 2013; Dimitrijević, Popović, Stanić, 2012; Миликић, Вуловић, Михајловић, 2020; Radovanović, Karić, 2011). Такође, учитељи често као један од разлога некоришћења *GeoGebra*-е у настави истичу недостатак одговарајућих обука (Belgheis, Kamalludeen, 2018) и готових аплета (Žilinskienė, Demirbilek, 2015). До сличног закључка дошли су Миликић, Вуловић и Михајловић (Миликић, Вуловић, Михајловић, 2020), наводећи то као последицу недовољне обавештености учитеља о великој бази креираних модела којима се може приступити на званичном сајту софтвера. Овакви и слични налази указују на потребу за већом информисаношћу учитеља о бенефитима које пружа примена софтвера и његовим могућностима.

Преинер (Preiner, 2008) у својој докторској дисертацији идентификује читав низ вештина које би учитељи требало да поседују како би са успехом креирали наставне материјале и изводили наставу користећи *GeoGebra* софтвер:

- основне вештине у вези са руковањем и организацијом датотека (да креирају и именују датотеку, сачувају датотеку у различитим програмима, препознају екстензију .*ggb*);
- основне вештине у вези са употребом слика које могу користити при креирању материјала (да разликују сликовне датотеке у зависности од екстензије, да промене димензије слике уз помоћ одговарајућег софтвера, да преузму слике са интернета, да буду упознати о потребној резолуцији за штампање или презентовање материјала);
- вештине везане за коришћење софтвера намењеног раду са текстом (како да направе табелу и форматирају текст, користе *equation editor*, како да уметну слику у текст документ, да одштампају текст документ);
- вештине неопходне за дељење креираних материјала (да дистрибуирају материјале коришћењем *CD*-ова или *USB* уређаја, копирају датотеке из меморије у рачунар, да поставе датотеке на интернет мрежу и учине их доступним ученицима) (Preiner, 2008: 42–43).

Поред одређених ограничења, велики број аутора сагласан је да укључивање *GeoGebra* софтвера у наставу неизоставно доводи до побољшања у постигнутим резултатима (Martín-Caraballo, Tenorio-Villalón, 2015; Moyer-Packenham, Ulmer, Anderson, 2012). Мартин-Карабаљо и Тенорио-Виљалон додају да је његова употреба знатно важнија за ученике са ниским постигнућима у настави геометрије јер учење уз помоћ *GeoGebra* софтвера даје боље ефекте у поређењу са наставом организованом на класичан начин (Martín-Caraballo, Tenorio-Villalón, 2015). Булут и сарадници (Bulut et al., 2016) сматрају да ученици са ниским постигнућима обично имају мање развијену способност визуелизације и зато је визуелно репрезентовање математичких појмова од пресудног значаја за ову групу ученика. Додатно, иста група аутора предност софтвера *GeoGebra* види у томе што учитељима пружа могућност да смање разлике у постигнућима међу ученицима.

Треба имати на уму и да је при избору активности и софтвера којим се врши визуелна репрезентација пожељно узети у обзир претпоставке које ће осигурати формирање адекватне менталне слике појма код ученика. Гутиерез разматра следеће параметре: врсту приказа геометријског тела, начин на који софтвер омогућава трансформацију приказа (односно, колико је софтвер једноставан за коришћење) и обим способности које захтевају софтвер и активност (Gutierrez, 1996: 12). Избор софтвера зависи и од техничких услова, обучености учитеља за рад са софтвером и времена које је неопходно за упознавање ученика са радом у динамичком окружењу. Поједини софтвери имају ограничену способност манипулације објектима, неки пак немају могућност репрезентације тродимензионалних објеката, док је код неких ограничена интерактивност у реалном времену.

Поред објективних тешкоћа са којима се и учитељи и ученици могу сусрести приликом коришћења софтверског пакета *GeoGebra* у учењу геометрије, треба имати на уму допринос који овај софтвер може да пружи формирању геометријских појмова и решавању проблема из геометрије. Почев од визуелизације, преко конструкције до резоновања, *GeoGebra* олакшава сваки од поменутих процеса и чини да резултати буду ефикаснији.

4. Преглед досадашњих истраживања

Досадашња истраживања указују да баријере на које ученици наилазе приликом савладавања математичких садржаја често леже у недовољно добром разумевању садржаја геометрије и неразвијеном геометријском резоновању, тј. отежаном трансферу знања из геометрије у друге области математике. Како смо више пута навели, геометрија је област математике у којој је визуелизација један од кључних аспеката. С тим у вези, истраживачи показују велико интересовање за визуелизацију математичких идеја и истичу да визуелни приказ садржаја пружа велику помоћ у процесу апстраховања математичких појмова (Bishop 1989, према Миловановић, 2014). Истражујући ефекте употребе *GeoGebra* софтвера у побољшању квалитета знања, повећању нивоа постигнућа и трајности знања ученика, велики број истраживача (Arbain, Shukor, 2015; Bulut et al., 2016; Diković, 2009; Mihajlov Carević, Denić, 2017; Thambi, Eu, 2013; Tuan Anh, 2015) истиче чињеницу да могућност примене софтверског пакета *GeoGebra* није ограничена на један одређени ниво математичког образовања, и не исцрпљује се само у домену визуелизације геометријских садржаја, већ и других апстрактних математичких појмова.

Навешћемо резултате неких истраживања која могу послужити целовитијем сагледавању примене софтверског пакета *GeoGebra* у настави математике и ефеката те примене на садржаје геометије, као и ограничења која из те примене произлазе.

У многим истраживањима страни и домаћи аутори бавили су се ефектима примене пакета *GeoGebra* у настави математике на средњошколском и универзитетском нивоу (Agyei, Benning, 2015; Akanmu, 2016; Baltaci, Yildiz, 2015; Diković, 2009; Ljajko, Pavličić, Radulović, 2010; Љајко, 2014; Horzum, Ünlü, 2017; Zulnaidi, Zakaria, 2012). На основу анализе резултата видљиво је да се као последица примене пакета *GeoGebra* знатно побољшавају постигнућа и мотивација испитаника за бављење математиком. Истовремено, уочен је мали број емпиријских истраживања која су се бавила ефектима употребе *GeoGebra* софтвера у почетној настави математике на нашим просторима, иако овај дидактичко-методички проблем завређује значајно место у педагошкој литератури.

Гокче и Гунер истраживали су фреквенцију научних радова објављених на *WoS* (*Web of Science*) сервису у периоду између 2009. и 2021. године који су као предмет свог истраживања имали неки аспект примене *GeoGebra* софтвера у настави (Gökçe, Güner, 2022). Том приликом открили су да се међу радовима објављеним на енглеском језику њих укупно 286 односи на поменути софтвер или неку његову карактеристику (динамичност, визуелизацију, интерактивност, итд.). Уочили су тренд раста заинтересованости истраживача широм света за овај софтвер, на шта указује број радова којих је из године у годину све више. Неки од закључака истраживања јесу да су студије већином посвећене испитивању особености употребе софтвера у процесу наставе и учење, док је са друге стране недовољан број студија које за предмет истраживања имају могућности превлачења и ротације које *GeoGebra* такође пружа.

Аканму (Akanmu, 2016) је 2015. године спровео експериментално истраживање у којем је узорак чинило 105 ученика средњих школа у Нигерији, подељених у експерименталну и контролну групу. Сврха истраживања огледала се у испитивању учинка софтвера *GeoGebra* на исходе учења ученика, док као специфичне циљеве истраживања аутор наводи следеће: испитати утицај *GeoGebra*-е на постигнућа ученика из математике; проценити утицај пола на резултате ученика који су у учењу користили *GeoGebra*-у; испитати ефекат *GeoGebra*-е на ставове ученика према математици.

Налазима истраживања утврђено је да, иако на иницијалном тестирању није уочена статистички значајна разлика у постигнућима ученика обе групе, након спроведеног експерименталног програма и поновљеног тестирања ученици експерименталне групе постигли су више резултате. У складу са другим постављеним задатком, испитиване су и разлике у постигнућима ученика који су у раду користили *GeoGebra* у односу на пол и том приликом је закључено да не постоји статистички значајна разлика у постигнућима између испитаника женског и мушког пола. Аутор се позива и на налазе студије коју се спровео Идову, а у којој су дошли до истог закључка (Idowu, 2012). Одбацивањем хипотезе да „став ученика према математици не зависи од њиховог знања о *GeoGebra*-и", утврђено је да рад уз помоћ поменутог софтвера позитивно утиче на ставове ученика према математици.

Љајко (Љајко, 2014) је у оквиру докторске дисертације обавио истраживање у току шест школских година (од 2008/09. до 2013/14) са ученицима трећег разреда гимназије у Лепосавићу. Укупни узорак чинило је 125 ученика експерименталне групе и 91 ученик у контролној групи. Проблем истраживања био је сагледати могући утицај рачунарски потпомогнуте наставе на процес учења аналитичке геометрије у равни, док је циљ био „утврдити прихваћеност излагања материје уз помоћ рачунара и *GeoGebra*-е и заинтересованост ученика за аналитичку геометрију у равни" (Љајко, 2014: 80). Као закључке истраживања аутор истиче да софтвер не треба посматрати само и искључиво као помоћно средство, већ као потенцијални извор информација и идеја. Наглашава да од софтвера не треба очекивати крајње решење проблема, већ помоћ у извршавању одређених делова задатка, проверавању хипотеза и стварању нових идеја за решавање задатог проблема. Истовремено упозорава и да не треба изоставити симболички приступ математици и пропустити формализовање идеја о изучаваним појмовима у рачунарском окружењу.

Слично истраживање, у оквиру своје докторске дисертације, спровео је Прентовић (Прентовић, 2014). Школске 2012/13. године на узорку од укупно 94 ученика трећег разреда гимназије обавио је експерименталну проверу и анализу утицаја примене рачунара и *GeoGebra*-е на образовни учинак у настави аналитичке геометрије. У складу са циљем, постављена су три истраживачка задатка: утврдити разлике у квалитету и количини знања ученика; утврдити разлике у оспособљености за решавање проблемских задатака и утврдити разлике у трајности знања. Примењени статистички тестови показали су постојање статистички значајне разлике међу ученицима експерименталне и контролне групе и тиме потврдили постављене хипотезе да настава уз помоћ софтвера доводи до повећања образовног учинка у односу на класичан начин извођења наставе. Аутор наводи да настава уз помоћ софтвера представља посебан наставни систем којим се ученици оспособљавају за самостално учење и примену стечених знања, док истовремено умногоме доприноси и трајности знања.

Љајко, Павличић и Радуловић (Ljajko, Pavličić, Radulović, 2010) у свом истраживању примене пакета *GeoGebra* испитивали су могућности које овај пакет пружа у осавремењавању наставе аналитичке геометрије у средњошколској математици и тешкоће са којима се ученици могу сусрести у раду са њим. Спроведено истраживање је показало да *GeoGebra* може бити изузетно корисна ако се примењује на одговарајући начин. Оно што се појавило као потешкоћа током самог истраживања је неприпремљеност наставника за коришћење овог пакета. Наставници не поседују компетенције потребне за овакав начин рада и неопходно је боље их обучити за овакав процес, како би се избегле ситуације да ученици боље рукују софтвером од наставника. У дискусији резултата аутори истичу могућу појаву техноцентризма током оваквог рада, ситуације у којој ученици разумевање појма повезују са употребом софтвера. Због тога, као најједноставнији начин да се избегне овакав став ученика сугеришу комбиновање рада са софтвером и рада на табли и папиру.

Мукири (Mukiri, 2016) је у оквиру израде докторске дисертације спровела слично експериментално истраживање. На узорку који је обухватао 270 ученика из шест средњих школа у Кенији испитивала је употребу пакета *GeoGebra* и начине на које се може иновирати настава геометрије. Ауторка је поредила ефекте учења обухваћених геометријских садржаја уз употребу поменутог пакета и учење истих садржаја класичним моделом наставе, при чему је поређење добијених резултата вршила и у односу на пол. Након спроведене обуке за примену *GeoGebra* -е у настави, на узорку од 33 наставника средње школе извршила је испитивање њихових ставова о могућностима коришћења пакета за поучавање садржаја геометрије. Резултати до којих је дошла имплицирају да је, уз добру обученост наставника, настава организована уз примену пакета *GeoGebra* ефикасна у повећању постигнућа ученика. Уочено је да до повећања постигнућа у области геометрије долази код ученика оба пола, чиме се превазилазе разлике у односу на пол. Између осталог, ауторка предлаже да би се будућим истраживањима могли испитати ефекти употребе софтвера *GeoGebra* на другим математичким садржајима, односно утврдити може ли неки други образовни софтвер учинити да ефекти учења истих садржаја геометрије буду већи.

На узорку од 124 ученика средњошколског узраста Зулнаиди и Закариа (Zulnaidi, Zakaria, 2012) спровели су квазиекспериментално испитивање знања о функцијама. Намера аутора била је да испитају нивое декларативног и процедуралног знања ученика који користе *GeoGebra*-у у учењу функција, као и њихове ставове о употреби *GeoGebra* софтвера. Статистички значајне разлике добијене применом независног *t*-теста указују да постоји неуједначеност када су у питању нивои декларативног и процедуралног знања ученика експерименталне и контролне групе. Наиме, ученици експерименталне групе показали су више нивое и декларативног и процедуралног знања о функцијама. На темељима резултата студије, препорука аутора јесте да треба подстицати употребу *GeoGebra* пакета у настави математике јер помаже у разумевању везе између декларативног и процедуралног знања.

Са циљем испитивања нивоа разумевања појма круга Шадан и Еу (Shadaan, Eu, 2013) спровели су истраживање које је обухватало 53 деветогодишња ученика. Као полазну тачку наводе став да иако учитељи преносе ученицима знања потребна за разумевање појма круга, чини се да ученици ипак имају препреку да научено примене у задацима. Резултати истраживања требало је да дају одговор на питање како различите интеракције са технологијом, вршњацима и учитељима утичу на процес учења, односно, да пруже информацију на који начин ученици различитих способности комуницирају са циљем извршења заједничког задатка. Ослањајући се на социјалну интеракцију у процесу учења Лава Виготског, аутори су сматрали да би успешнији ученици информацијама и објашњењима поступака могли да помогну својим мање успешним вршњацима да достигну зону наредног развоја. Ради испитивања може ли *GeoGebra* софтвер да побољша резултате, аутори су реализовали експеримент у којем је једна група ученика користила софтвер приликом учења, док је друга група испитаника учила на класичан начин. Добијени резултати указују да постоје статистички значајне разлике у обе групе, при чему су знатно виша постигнућа оне групе ученика која је приликом учења користила софтвер *GeoGebra*. Анализом ставова ученика аутори су утврдили да ученици исказују позитивне ставове према примени образовног софтвера. Велики део ученика је закључила да су уз употребу софтвера доста научили, да су захваљујући њему могли да визуелизују појам круг и одговоре на захтеве који су стављени пред њих током процеса учења.

Тривахунинтас и сарадници (Triwahyuningtyas, Rahayu, Agustin, 2019) бавили су се истраживањем у којој мери коришћење *GeoGebra* софтвера утиче на исходе учења геометрије у петом разреду основне школе. У истраживању је учествовало 50 ученика једне основне школе у Индонезији који су били подељени у контролну и експерименталну групу. У експерименталној групи ученика настава је реализована уз употребу *GeoGebra* софтвера, док је у раду са ученицима контролне групе коришћен *Microsoft Power Point*. Након иницијалног и финалног тестирања ученика и статистичке обраде добијених података истраживачи су анализирали какав утицај има *GeoGebra* на исходе учења геометрије. Ученици нису учили како да нацртају коцку и тространу призму у пакету *GeoGebra*, већ да на основу приказане анимације склапања мреже површи препознају из којих делова се састоји геометријско тело (темена, ивице, дијагонале). На основу примењених статистичких тестова на резултатима добијеним истраживањем утврђено је да примена *GeoGebra* софтвера остварује позитиван ефекат на савладавање садржаја геометрије у петом разреду. Закључак је да коришћење софтвера ученицима олакшава разумевање настанка физичког простора и низа процеса који за резултат имају формирање геометријског простора.

На темељима претходне студије, спроведене са ученицима од 15. до 19. године, Будински је са сарадницима (Budinski, Lavicza, Fenyvesi, Milinkovic, 2020) испитивала могућности употребе оригами технике и *GeoGebra*-е у поучавању ученика петог разреда основне школе формалним геометријским дефиницијама. Циљ студије која је обухватала узорак од 35 ученика петог разреда био је да се уоче проблеми организације часа уз имплементацију оригами технике и технологије ради поучавања формалним геометријским дефиницијама, као и прикупљање доказа који сведоче о утицају поменутог приступа на процес конструисања геометријског знања. Сам садржај учења обухватао је препознавање геометријских објеката, правилно именовање, дефинисање формалним математичким језиком, препознавање математичких својстава објекта и вршење израчунавања уз помоћ тих својстава, док је употреба *GeoGebra* требало да подстакне ученике да истражују и математички размишљају. Добијени резултати студије показали су да оригами техника и *GeoGebra* могу бити од помоћи ученицима да стекну формално математичко знање и побољшају своје моторичке и дигиталне компетенције.

Бу и Еу (Boo, Eu, 2016) испитивали су како се *GeoGebra* може користити за поучавање и учење појма угла у шестом разреду основне школе. У петом разреду основне школе у Малезији ученици уче да разликују многоуглове и друге геометријске фигуре, да разликују прав, туп, опружени угао, и конструишу прав угао. У шестом разреду усвајају поступке мерења и конструисања углова од 180° помоћу угломера и увежбавају разликовање врста углова. Истовремено са овладавањем садржајима, програм школске математике подстиче ученике да користе софтвере попут *Geometer's Sketchpad* и *GeoGebra* како би боље разумели и друге математичке појмове. Имајући то на уму, аутори су за 50 ученика осмислили двонедељни програм којим су обухватили шест различитих активности везаних за углове уз употребу *GeoGebra* софтвера. Након реализованог програма, ставови ученика прикупљени су упитником који је садржао 8 ајтема. Анализом одговора ученика закључено је да чак 90% ученика сматра да је боље разумело појам угла захваљујући примени *GeoGebra*-е, а чак 95% испитаника одговорило је да је двонедељни рад допринео бољем схватању важности интеграције образовних софтвера у настави. Велики број ученика изразио је став да програм није био довољно дуг и сматра да је неопходно обезбедити више простора у настави математике за примену *GeoGebra* пакета.

Мартиновски и Мартиновски (Martinovski, Martinovski, 2013) такође су се бавили анализом примењивости и прихватања *GeoGebra*-е у основној школи у Републици Северној Македонији. На узорку од 124 ученика седмог разреда основне школе подељених у две групе (експерименталну и контролну) испитивали су да ли *GeoGebra* утиче на повећање способности ученика да разумеју садржаје геометрије и алгебре. Конкретно, ученици из експерименталне групе учили су Питагорину теорему и квадрат бинома користећи се *GeoGebra* пакетом, док су ученици контролне групе савладавали исте садржаје користећи уџбеник. Аутори наводе да су током трајања експерименталног програма истовремено били приказани и графички и алгебарски приказ *GeoGebra-е* и тако, за разлику од класичног начина извођења наставе, допринели бољој визуелизацији математичких појмова. Бољем разумевању појма Питагорине теореме и квадрата бинома сведоче резултати финалног тестирања који указују на знатно боље резултате ученика експерименталне групе. Иако су обе групе ученика решавале исте проблеме који су се односили на поменуте садржаје, ученици који су учествовали у експерименталном програму били су знатно успешнији. Закључак аутора јесте да *GeoGebra* побољшава начин размишљања ученика током решавања проблема и савладавања садржаја геомерије и алгебре.

Багат и Чанг (Bhagat, Chang, 2015) испитивали су утицај коришћења образовног софтвера *GeoGebra* на постигнућа ученика деветог разреда у учењу геометрије. Са тим циљем креирали су истраживање квазиекспериментаног дизајна у којем је учествовало укупно 50 ученика деветог разреда средње школе у Индији. Истраживање је спроведено у три фазе. У првој су ученици експерименталне групе били обучени за коришћење *GeoGebra* софтвера, у другој фази ученици експерименталне групе су савладавали садржај уз помоћ софтвера а ученици контролне класичним приступом. У трећој фази тестирана су постигнућа испитаника из обе групе (експерименталне и контролне) претходно припремљеним инструментом. За испитивање статистичке значајности разлика аутори су користили ANCOVA и добијена сигнификантност указује да постоји статистички значајна разлика у постигнућима обе групе ученика, у корист групе која је користила *GeoGebra* софтвер. Ови налази у складу су са претходним истраживањима која су показала позитиван ефекат примене *GeoGebra*-е на мотивацију ученика за учење геометријских садржаја (Doğan, Içel, 2011; Shadaan, Eu, 2013; Zengin, Furkan, Kutluca, 2012).

Сврха истраживања које су спровели Каја, Акчакин и Булут (Kaya, Akçakin, Bulut, 2013) јесте да се утврде ефекти употребе интерактивних табли и *DGS* софтвера (*GeoGebra*-е) у поучавању и учењу геометријских трансформација. Узорак студије квазиекспериментаног дизајна спроведене школске 2011/12. године чинио је 31 ученик десетог разреда једне средње школе у Анкари. Тестом развијеним за потребе истраживања процењивана су постигнућа ученика у геометријским трансформацијама (транслацији, ротацији и симетрији). Статистички тестови примењени на добијеним резултатима иницијалног и финалног тестирања показали су да разлике у постигнућима у корист ученика експерименталне групе имају карактер статистичке значајности, док су резултати финалног теста ученика експерименталне групе знатно већи од ученика контролне групе. Желећи да утврде да ли избор одговарајућег софтвера или периферног уређаја (интерактивне табле, пројектора) доприноси постизању бољих резултата, аутори предлажу да се будућа студија спроведе са две паралелне групе, од којих би једна користила пројектор, док би друга радила уз коришћење интерактивне табле.

Са циљем испитивања нивоа геометријског резоновања ученика током учења раванске и просторне геометрије, Исмаил и Рахман (Ismail, Rahman, 2017) су на узорку од 30 ученика другог разреда основне школе у Малезији реализовали истраживање.

Ученици су најпре класичним приступом без коришћења технологије учили о дводимензионалним и тродимензионалним фигурама, након чега је реализован тест заснован на прва три нивоа Ван Хилеовог модела развоја геометријског резоновања (визуелизацији, анализи и неформалној дедукцији). Затим су ученици били у прилици да користећи интерактивне материјале преузете са сајта *www.geogebra.org* развијају геометријско резоновање посматрајући промену димензија и положај 2D и 3D објеката. Упоређујући резултате добијене на финалном тестирању са иницијалним тестом уочено је да у домену визуелизације и неформалне дедукције објеката у равни разлика у постигнућима има карактер статистичке значајности, док је у раду са објектима у простору уочено да долази до повећања скорова ученика на свим нивоима геометријског резоновања. Са друге стране, аутори су желели да утврде да ли учење уз употребу *GeoGebra*-е више доприноси развоју геометријског мишљења о дводимензионалном или тродимензионалном простору. Резултати истраживања су показали да су ученици били успешнији у анализи и неформалној дедукцији у односу на визуелизацију, то имплицира да за боље ефекте учења 3D објеката ученицима недостаје више рада у *GeoGebra* окружењу и додатна зрелост у резоновању. Са друге стране, резултати указују и да су негативни ставови учитеља о ефектима које примена *GeoGebra* пакета има на постизање добрих резултата ученика приликом решавања тестова на папиру неосновани.

Сличну студију, на узорку од 52 ученика осмог разреда основне школе, спровели су Туткун и Озтурк (Tutkun, Ozturk, 2013). Основу за истраживање аутори проналазе у интернационалним пројектима евалуације знања (TIMSS, PISA) у којима су турски ученици учествовали, а у којима су се на основу постигнутих резултата нашли испод OECD просека. Реформом наставног програма математике за основне и средње школе спроведеном 2005. године наставни програм престаје да буде усредсређен на учитеље и наставнике и ученици почињу да заузимају централно место у настави. С обзиром на то да већину садржаја новог програма чине апстрактни појмови који захтевају когнитивне активности и више нивое геометријског мишљења ученика, аутори су одлучили да испитају ефекте примене пакета *GeoGebra* на академски успех ученика и нивое геометријског мишљења у области тригонометрије и угла. У том контексту, формулисали су проблем истраживања „постоји ли статистички значајна разлика између академског успеха и Ван Хилеових нивоа геометријског мишљења између групе ученика који користе *GeoGebra* софтвер и оних који примењују класичан начин рада у настави тригонометрије и угла" (Tutkun, Ozturk, 2013: 23). Експериментално истраживање спроведено је школске 2011/12. године, а експериментална и контролна група ученика формиране су на основу резултата ученика постигнутих на тесту постигнућа и тесту геометријског мишљења. Иако су резултати добијени прелиминарним тестирањем указали да не постоји статистички значајна разлика у постигнућима обе групе ученика, постоји статистички значајна разлика у постигнућима на финалном тесту у корист ученика из експерименталне групе. Вредности χ^2 теста показале су да не постоји статистички значајна разлика у нивоима геометријског мишљења између ученика који су користили динамички софтвер и оних који су примењивали класични приступ. Такође, аутори су испитивали да ли постоји корелација између академског успеха и нивоа геометријског мишљења ученика обе групе и закључили да постигнућа нису у вези са нивоом геометријског мишљења на којем се ученици налазе. На основу резултата обављеног истраживања које је обухватало експериментални програм у трајању од четири седмице, аутори су дали препоруку да треба обавити дугорочна истраживања којим би се испитало да ли образовање ученика утиче на промену нивоа геометријског мишљења.

И Аделабу, Макгато и Рамалигела (Adelabu, Makgato, Ramaligela, 2019) спровели су на узорку од 87 ученика деветог разреда истраживање са циљем да утврде ниво геометријског мишљења ученика према Ван Хилеовом моделу и како *DGS* софтвер унапређује геометријско мишљење ученика. Међу многобројним софтверима, на основу могућности које пружа, аутори су одлучили да испитају примену *GeoGebra* пакета и у складу са тим дефинисали одговарајуће истраживачке задатке. Пре почетка осмонедељног експерименталног програма спроведено је иницијално тестирање ученика у којем је утврђен ниво геометријског мишљења ученика експерименталне и контролне групе инструментом који се састојао од 15 ајтема преузетих из Ван Хилеовог теста геометријског мишљења. Резултати анализе варијансе показали су да се ниво геометријског мишљења ученика експерименталне групе на финалном тесту статистички значајно разликује од ученика контролне групе у корист експерименталне групе, а то даље имплицира да *GeoGebra* има утицај на повећање Ван Хилеових нивоа геометријског мишљења. Аутори објашњавају да су овакви резултати очекивани имајући у виду да су током активности ученици у прилици да виде објекте у динамичном окружењу *GeoGebra* софтвера, за разлику од њиховог статичног приказа у уџбеницима.

На примерима израде математичких паноа из области линеарне функције, квадратне функције, експоненцијалне, логаритамске функције, потрошачког кредита и калкулације, Толић, Јукић и Јосиповић (Tolić, Jukić, Josipović, 2015) испитивали су на који начин дугорочна употреба образовног софтвера може утицати на процес учења. У истраживању је, у току школске 2012/13. и 2013/14. године, учествовало 420 ученика почетних разреда средње струковне школе у Хрватској. Током две године трајања студије ученици су користећи *GeoGebra* пакет активно учествовали у решавању математичких задатака и креирању математичких паноа, при чему су на крају сваке школске године попуњавали упитник ставова о оваквом начину учења математике. Прикупљени одговори указали су да су испитаници женског пола били више мотивисани и показали веће задовољство у раду са *GeoGebra*-ом. Приликом рада на креирању математичких паноа помоћу *GeoGebra*-е и решавања математичких задатака, међу ученицима је владало задовољство, побољшале су се социјалне интеракције и комуникација и усвојиле одређене компетенције за рад са образовним софтвером. Израчунате корелације имплицирале су постојање повезаности између нивоа дигиталних компетенција и мотивације за учење уз помоћ *GeoGebra*-е, док су код испитаника женског пола приликом учења са *GeoGebra*-ом корелирали задовољство и мотивација. На темељу резултата истраживања, закључак аутора јесте да конструктивистичка парадигма образовања може да заживи у пракси уколико су, поред ученика, и наставници оспособљени и мотивисани за рад са технологијом.

Булут је са својим сарадницима (Bulut et al., 2016) испитивао ефекте употребе софтвера *GeoGebra* у формирању појма разломка у трећем разреду основне школе. Емпиријско истраживање спроведено је школске 2013/2014. године као квазиексперимент са паралелним групама, а узорак је чинило 40 ученика из два одељења основне школе у Анкари. На основу актуелног курикулума аутори су уз коришћење динамичних модела осмислили неколико активности које су се разликовале од садржаја датих у стандардним уџбеничким комплетима. Податке су прикупили инструментом који се састојао из 48 ајтема, подељених на три категорије (лака питања, тешка питања и питања која захтевају виши ниво резоновања). Статистички тестови које су применили на добијеним резултатима показали су да постоји значајна разлика у нивоу постигнућа групе у којој је реализован експериментални програм у односу на групу у којој је настава извођена класично. Првенствено вишеструка репрезентација разломака „area model, set model and number line model" (Bulut et al., 2016: 353) употребом *GeoGebra* пакета допринела је да ученици боље разумеју појам разломка (Thambi, Eu, 2013).

И Тхамби и Еу (Thambi, Eu, 2013) истраживали су на којем нивоу ученици четвртог разреда у Малезији разумеју појам разломка, односно рачунске операције над њима. По завршетку квазиекспериментлног истраживања тестирали су обе групе ученика, при чему су средње вредности постигнућа ученика експерименталне групе била виша од ученика из контролне групе. Аутори су такође истакли да *GeoGebra* позитивно утиче на разумевање појма разломка, како код ученика тако и код учитеља.

Истражујући употребу *GeoGebra* пакета за поучавање математике на високошколском нивоу, Диковић (Diković, 2009) је представила предности и недостатке примене овог образовног софтвера. Предности које истиче огледају се у окружењу једноставном за рад, вишејезичности пакета, могућности вишеструких приказа и могућности учења путем открића. Студенти могу манипулисати варијаблама повлачењем независних објеката по подлози, или коришћењем клизача. Мењањем вредности независних варијабли могу уочити однос независних и зависних објеката, док алгебарски део пакета омогућава да креирају нове објекте или модификују већ постојеће. Ауторка истиче да *GeoGebra* софтвер подстиче наставнике како би користили ИКТ са циљем истраживања у математици, за визуелизацију математичких појмова, примену математике у реалним ситуацијама или за извођење интерактивних часова. Са друге стране, у недостатке убраја неопходно искуство у раду са софтвером, како би студенти били у стању да креирају нове објекте коришћењем алгебарског дела пакета. Диковић наводи и да је динамичност која се своди на коришћење клизача једно од ограничења које би у будућности требало превазићи.

Агиј и Бенинг (Agyei, Benning, 2015) су на узорку од 85 студената четврте године основних академских студија Универзитета у Гани испитивали на који начин перципирају употребу *GeoGebra*-е у настави математике. Циљ истраживања био је да се идентификује у којој мери *GeoGebra* може помоћи будућим наставницима у средњој школи да развију знања из области математичких садржаја, педагогије и технологије, и у складу са постављеним циљем формулисана су три истраживачка задатка:

1. Како будући наставници перципирају ограничења у коришћењу *GeoGebra*-е у настави математике?
2. Како будући наставници перципирају могућности за коришћење *GeoGebra*-е у настави математике?
3. У којој мери будући наставници развијају своја знања и вештине потребне за извођење наставе математике подржане пакетом *GeoGebra*? (Agyei, Benning, 2015: 17)

Као баријере истакли су недостатак свести о употреби *GeoGebra*-е у настави математике и време потребно за дизајнирање лекција уз употребу *GeoGebra*-е, док су као предност уочили чињеницу да *GeoGebra* пружа могућност будућим наставницима да прошире сопствено разумевање математичких појмова и знање о стратегијама подучавања. Препорука спроведене студије јесте да будући наставници треба да стекну компетенције које се односе на коришћење технологије у настави математике, како би у наставни процес са успехом имплементирали софтвере који подстичу више нивое мишљења ученика.

У оквиру припреме докторске дисертације Божић (Божић, 2019) је током академске 2015/16, 2016/17. и 2017/18. године спровео три експериментална истраживања са укупно 618 студената основних академских студија. Као главни циљ поставио је утврђивање степена утицаја примене динамичког софтвера током колаборативног рада на квалитет знања студената и разумевање наставних садржаја из области функција. Пре почетка првог експерименталног програма, аутор је користећи *GeoGebra* софтвер израдио материјале који су примењени у настави. Резултати финалног тестирања показали су да имплементација динамичког образовног софтвера у оквиру колаборативног рада доприноси бољим постигнућима студената у области функција. Аутор наглашава да је примећено да студенти, чланови експерименталне групе, приликом решавања задатака исправно примењују и алгебарску и графичку репрезентацију функција, док студенти контролне групе највећим делом користе само алгебарску репрезентацију приликом испитивања функција.

Ждрахал, Дофкова и Нокар (Zdráhal, Dofková, Nocar, 2019) су за узорак своје студије такође узели студенте, будуће наставнике математике у вишим разредима основне школе. Њих 90 учествовало је у истраживању спроведеном са циљем да се утврде ефекти употребе *GeoGebra*-е на учење математике, конкретно Платонових тела. Студија је имала квазиекспериментални дизајн са паралелним групама, при чему је једна група студената радила према унапред припремљеном експерименталном програму уз примену софтвера, док је друга група проучавала Платонова тела класичним начином рада. Истраживање је обављено у три фазе. У првој фази извршено је иницијално тестирање студената инструментом који се састојао од неколико питања везаних за правилне полиедре, затим је уследио експериментални програм након којег је извршено финално тестирање испитаника. Примењени статистички тестови показали су да постоји разлика у средњим вредностима резултата испитаника експерименталне и контролне групе, односно да је експериментална група имала бољи учинак од контролне. На основу тога, може се закључити да употреба *GeoGebra* пакета има позитиван утицај на ниво постигнућа студената у раду са Платоновим телима.

Тран је са својим сарадницима (Tran et al., 2014) испитивао ставове ученика и наставника о могућностима имплементације софтвера *GeoGebra* у учење путем открића. Циљ им је био да испитају ставове учесника истраживања о подршци коју *GeoGebra* пружа у поучавању са једне, и учењу са друге стране, затим у којој мери употреба софтвера утиче на сарадњу ученика и наставника и колико буди интересовање наставника да примењују образовни софтвер при поучавању. Узорак истраживања чинило је 282 ученика и 37 наставника, а закључци добијени на основу резултата указују на позитивне ефекте које даје учење путем открића у које је инкорпорирана употреба софтвера *GeoGebra*. Налази истраживања показали су да софтвер води ефикасном учењу геометријских појмова, дефиниција и теорема, буди интересовање ученика за учење математике, док интеракцију ученика и наставника одржава на високом нивоу.

Слично претходној студији, Мурни, Саривасa и Ардана (Murni, Sariyasa, Ardana, 2017) испитивали су у којој мери примена *GeoGebra*-е приликом учења путем открића утиче на способност ученика за решавање проблема и како доприноси ставовима ученика према математици. Будући да потешкоће у учењу геометрије могу изазвати језик геометрије, способност визуелизације и други фактори, аутори су за превазилажење ових препрека у свакој фази учења путем открића користили *GeoGebra*-у (мотивација, постављање проблема, прикупљање података, обрада података, верификација и генерализација). Спровели су истраживање квазиексперименталног дизајна на узорку од 120 ученика осмог разреда који похађају средњу школу у Индонезији. Од укупног броја учесника истраживања, половина ученика (два одељења) чинила је експерименталну групу, док су у друга два одељења били ученици контролне групе. У обе групе налазили су се ученици са ниском, умереном и високом способности за решавање математичких проблема. Инструменти коришћени у истраживању јесу тест и Ликертова скала ставова. На основу добијених резултата и примењене статистике уочено је да су просечне способности решавања математичких проблема и ставови према математици испитаника из експерименталне групе виши од испитаника из контролне групе. MANOVA је показала да су способност за решавање математичких проблема и ставови према математици ученика који су у свом раду користили *GeoGebra* софтвер бољи од ученика који су радили конвенционалном методом. Разлог томе може се наћи у чињеници да примена софтверског пакета у учењу путем открића пружа ученицима прилику да проблеме решавају индивидуално, како би побољшали сопствене вештине и когнитивне способности.

Томић (Tomić, 2013) је истраживала корисност и могуће проблеме са којима се наставници сусрећу примењујући математички софтвер у учионици. Након анализе различитих типова математичких софтвера аутор се, ослањајући се на резултате хрватских и страних истраживача, концентрише на софтверски пакет *GeoGebra* истичући његове предности и ограничења. Позивајући се на Шуљића (Šuljić, 2005), као предности *GeoGebra*-е истиче да је то професионално направљен пакет, добро примењив у основној и средњој школи, добро повезује алгебру и геометрију, једноставан је за употребу, поседује графику високог квалитета погодну за пројекцију у учионици, цртеже који су погодни за пренос у друге програме. Даље, аутор наводи да *GeoGebra* даје могућност премештања објеката, али не свих, што може обесхрабрити ученике да манипулишу фигурама, ограничавајући њихове истраживачке способности. Истичући важност анимације у образовне сврхе Томић, попут Диковић (Diković, 2009), наводи ограничене могућности анимације у пакету *GeoGebra* сведене на употребу клизача.

Ибили (İbili, 2019) је спровео истраживање које је с једне стране имало сврху да истражи доступну литературу о образовним софтверима, њиховим потенцијалима и ограничењима у настави геометрије са педагошког аспекта, док је с друге стране требало испитати ефекте примене истих софтвера када их учитељи користе као наставно средство. Предмет интересовања студије представљали су софтвери *Cabri 2D/3D, GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Google SketchUp* и *Logo,* а узорак истраживања чинила су 183 наставника математике у основним школама. Добијени резултати указују да је, међу испитиваним софтверима, стопа употребе *GeoGebra*-е највиша (70%), док су вредности χ^2 теста показале да не постоји статистички значајна разлика у примени *DGS* софтвера у односу на пол испитаника. Сигнификантност добијена Хи-квадрат тестом показала је да постоји статистички значајна разлика у корист наставника са високим нивоом перцепције употребе технологије када је о *Cabri* софтверу реч, док код осталих није уочена разлика. Такође, појавила се статистички значајна разлика и у односу на године радног искуства наставника у вези са *Cabri* софтвером, у корист наставника који имају мање од десет година искуства. Ибили истиче да, иако се употреба *DGS* софтвера у настави геометрије промовише у оквиру актуелног курикулума, у великом броју студија закључак је да наставници често имају потешкоће у операционализацији софтвера у школским условима. Узрок томе лежи у недостатку искуства наставника у комбинацији употребе технологија и педагогије.

Попут Ибилија, Будински (Budinski, 2013) је међу наставницима математике са територије Србије спровела истраживање о томе у којој мери користе рачунаре у настави. Испитивала је колико често наставници користе рачунар приликом припреме и реализације наставе математике. Резултати до којих је дошла говоре у прилог томе да и поред обезбеђивања потребних материјалних услова у школама, наставници не примењују у довољној мери образовни софтвер приликом извођења наставе. Поред чињенице да исказују позитивне ставове према *GeoGebra* софтверу, више од половине наставника математике изјавило је да га не примењује током извођења часова. Ауторка закључује да, иако постоје технички услови у учионицама и софтвер је лако доступан на интернету, испитивани наставници сматрају да нису довољно оспособљени за његову примену и да је то разлог због којег га не користе на часовима математике.

Закарија и Ли (Zakaria, Lee, 2012) су на узорку од 30 наставника средње школе у Малезији, који су присуствовали радионицама на којима су упознати са радом у *GeoGebra* пакету, испитивали њихову перцепцију о карактеристикама и доступним алатима у поменутом софтверу. Радионице су обухватале извођење основних геометријских конструкција, трансформација, цртање углова, уметање слика у *GeoGebra*-у, коришћење алгебарског прозора, унос координата, рад са функцијама и експортовање слика. Након радионица, одговори учесника прикупљени су упитником преузетим од Преинера (Preiner, 2008) и модификованим за потребе истраживања. Резултати су показали да већина наставника сматра алате и карактеристике *GeoGebra*-е једноставним за употребу. Слично са налазима Преинера, значајан број испитаника испољио је позитиван став према софтверу, због чега је реално очекивати да буде од помоћи при модификовању наставне праксе наставника како би олакшали ученицима разумевање математичких појмова. Аутори такође очекују од *GeoGebra*-е да подстакне наставнике да користе технологију приликом извођења наставе зарад искоришћавања потенцијала ученика.

Слично претходној студији, Белгејс и Камалуден (Belgheis, Kamalludeen, 2018) спровели су истраживање како би утврдили начине на које наставници у Малезији перципирају коришћење *GeoGebra*-е у настави математике. Ослањајући се на резултате које малезијски ученици постижу на интернационалним пројектима евалуације знања (TIMSS, PISA), интенција аутора била је да испитају намере наставника да имплементирају *GeoGebra* пакет у наставу математике на основу њихових тренутних компетенција. Компетенције су испитиване на узорку од 132 наставника математике који су у неком тренутку током своје каријере присуствовали некој од *GeoGebra* радионица. Међу испитаницима, 62,9% наставника изјаснило се да је користило или користи *GeoGebra*-у, док је њих 37,1% изјавило да је не користи у раду. Статистички значајна разлика сугерисала је да употреба *GeoGebra*-е има позитиван утицај на наставнике да га користе у настави математике. Такође, резултати независног *t*-теста открили су да разлика у полу нема утицај на перцепцију наставника на тренутне компетенције и намеру да *GeoGebra*-у користе у настави. На основу одговора испитаника, аутори су уочили да као чест разлог који их спречава да искористе потенцијал који софтвер нуди наставници наводе недостатак одговарајућих тренинга који би их обучили основама рада у пакету.

Миликић, Вуловић и Михајловић (Миликић, Вуловић, Михајловић, 2020) испитивали су заступљеност образовних софтвера у почетној настави математике у Републици Србији и ставове учитеља према њима. Узорак истраживања чинило је 108 учитеља који су попуњавали упитник доступан у електронском облику. У складу са предметом и циљем формулисано је пет истраживачких задатака како би се утврдили: степен примене образовних софтвера у почетној настави математике; ставови учитеља о употреби образовних софтвера; потешкоће које се јављају при обради садржаја у вези са разломцима; ставови учитеља о доприносу образовних софтвера превазилажењу уочених критичних тачака; степен примене *GeoGebra* софтвера у почетној настави математике. Након прикупљања и анализе података, аутори су закључили да су испитаници првенствено имали проблем са терминолошким одређењем појма „образовни софтвер”. Међу испитаницима који су одговорили да их у наставном раду користе, употреба образовних софтвера је најмање заступљена код оних који имају мање од 10 или 30 и више година радног искуства. Као главне разлоге некоришћења навели су недостатак времена, недовољну информисаност о софтверима за одређене области школске математике и друго. Када је о *GeoGebra* софтверу реч, јако мали проценат, свега 17,59% учитеља, одговорило је да су барем једном у свом раду користили овај софтвер, и то првенствено за садржаје геометрије везане за обраду појма обима и површине фигура. Учитељи који су га користили сматрају да доприноси разумевању садржаја, визуелизацији и испитивању особина геометријских фигура, док је велики број испитаника става да једну од препрека интензивнијем коришћењу *GeoGebra*-е у почетној настави математике представља недостатак готових модела, што су налази и неких претходних студија (Žilinskienė, Demirbilek, 2015).

Прегледом доступне стране и домаће литературе уочили смо евидентан допринос софтверског пакета *GeoGebra* постизању бољих исхода учења, виших нивоа геометријског резоновања, већег самопоуздања ученика, изградње позитивних ставова како ученика тако и наставника према примени овог пакета у настави математике. Такође, запажена је недовољна заступљеност примене *GeoGebra* софтвера у настави математике, а нарочито у почетној настави математике и геометрије. Мало емпиријских истраживања о овој теми на нашим просторима и у оквиру првог циклуса обавезног образовања учинили су проблем примене софтверског пакета *GeoGebra* у учењу геометрије у млађим разредима основне школе актуелним. Поменути разлози формирали су полазну тачку у покушају да дамо одговор на питање да ли се применом софтверског пакета *GeoGebra* може поспешити учење у почетној настави математике.

II МЕТОДОЛОШКЕ ОСНОВЕ ИСТРАЖИВАЊА

1. Проблем и предмет истраживања

Садржаји геометрије су неизоставни део почетне наставе математике и зато програми наставе и учења у прва четири разреда основне школе предвиђају знатан број часова за њихову обраду. Због нивоа когнитивног развоја на којем се ученици ове старосне доби налазе и ограничења која из тог разлога произлазе, ученици нису у стању да разумеју аксиоматски систем геометрије, већ се са геометријским појмовима најпре упознају пропедевтички. Управо зато, неопходно је створити услове у којима ученици знање стичу на бази изразите очигледности, да могу да визуелизују појам како би најпре створили представу а затим и формирали јасну менталну слику појма. Процес формирања менталне слике почиње посматрањем конкретних предмета, које постепено замењују модели геометријских објеката. Статични прикази таквих објеката могу умањити потребну очигледност и онемогућити ученике да применом индуктивног облика закључивања на бази уочених односа међу објектима изводе одговарајуће закључке.

Узимајући у обзир ниво геометријског мишљења ученика млађих разреда основне школе, нужно је да настава геометрије почива на очигледности, али не очигледност ради очигледности, већ са циљем формирања одговарајућег појма. Фишбајн наводи да се, због немогућности да им се приступи директно, геометријски појмови представљају цртежима, односно материјализованим приказима (Fischbein, 1993). Такви графички прикази могу помоћи ученицима да боље разумеју природу геометријских објеката, њихов двојни карактер, и да коначно лакше пређу на виши ниво геометријског мишљења.

Боље разумевање геометрије свакако се пресликава и на постизање бољих резултата ученика. Зато, имајући у виду да постигнућа ученика у области геометрије најчешће прате постигнућа из осталих области математике и све специфичности које је карактеришу, намеће се питање који методички приступ применити у учењу ових садржаја.

Сведоци смо све веће заступљености ИКТ у образовању и да образовни софтвери представљају окосницу савремене наставе на свим нивоима образовања, те стога испитивање ефеката њихове примене представља актуелан проблем педагошке теорије и праксе. Додатно, посматрано из угла методике почетне наставе математике, испитивање ефеката примене образовних софтвера у почетној настави математике чини проблем нашег истраживања значајнијим, те поседује изражен научни, педагошки и друштвени значај.

Проблем истраживања јесте примена софтверског пакета *GeoGebra* на садржајима геометрије у почетној настави математике. У оквиру овако дефинисаног проблема истраживања намера нам је била да креирамо посебне динамичне моделе коришћењем софтверског пакета *GeoGebra* и испитамо ефекте утицаја њихове примене на постигнућа ученика, мотивацију и однос према математици.

Иницијално, разлоге за овако дефинисан проблем истраживања идентификовали смо у званичним документима Републике Србије који се односе на образовање. У њима је експлицитно наглашена потреба за трансформацијом учења и поучавања у правцу развоја образовања усклађеног са достигнућима науке, технике и технологије (*Стратегија развоја образовања и васпитања у Републици Србији до 2030. године*). Развијање дигиталног образовања, које подразумева да учитељи буду дигитално оспособљени да примењују иновативне педагошке приступе којима интегришу ИКТ у образовни процес један је од приоритета савремене наставе. Како би ученици у првом циклусу обавезног образовања успешно формирали математичке појмове, осим иновација у области наставних система, метода и облика, неопходно је у наставни процес имплементирати и образовне софтвере.

Додатно, оно што проблем истраживања чини значајним јесте мали број истраживања која се са аспекта примене образовних софтвера баве сагледавањем почетне наставе математике у нашем образовном систему и уопште. Образложење одабира проблема лежи у чињеници да добра овладаност садржајима геометрије и развијеност геометријског мишљења на одговарајућем нивоу чине једноставнијим превазилажење баријера на које ученици наилазе приликом савладавања садржаја математике који нису геометријски. Стога, суштинско повезивање математичких садржаја (геометрије, аритметике, алгебре) допринело би повећању постигнућа ученика, обезбедило трајност знања и увећало њихову математичку писменост (Павловић Бабић, Бауцал, 2009).

Зато смо, у светлу претходно изнетих разлога, у истраживању посебну пажњу посветили теоријским основама на којима почива пакет *GeoGebra,* анализи настанка и развоја, одређивању суштинских обележја и структуралних елемената софтвера *GeoGebra*, као и емпиријској провери успешности његове практичне примене на садржајима геометрије у почетној настави математике.

Предмет истраживања усмерен је првенствено на испитивање ефеката примене софтверског пакета *GeoGebra* у учењу садржаја геометрије у четвртом разреду основне школе, на побољшање образовних постигнућа ученика, трајност знања, мотивацију ученика за учење, а затим и испитивање ставова ученика и учитеља о пакету *GeoGebra*. Овако формулисан, предмет истраживања детерминисан је савременим схватањима о могућностима организације и реализације наставе геометрије у млађим разредима основне школе са акцентом на визуелизацији процеса учења/поучавања и учење путем открића. Јавља се потреба за наставом која је очигледна, која обухвата представе маште и сећања, и која подразумева извођење дедуктивних закључака на основу претходних искустава и стечених знања. Будући да су на овом узрасту искуства ученика о математичким појмовима углавном визуелног карактера, то је још већи акценат стављен на очигледну наставу.

Поред наставе блиске когнитивном нивоу на којем се налазе ученици у првом циклусу обавезног образовања, утицај на избор подручја и предмета истраживања има и убрзани развој информационо-комуникационих технологија. Измењене друштвене околности изазване различитим појавама указују на многоструке могућности примене и допринос образовних софтвера настави. Ситуације које захтевају организацију и реализацију бесконтактне наставе (пример пандемије вируса SARS-CoV-2) чине неопходним развој софтверских пакета намењених визуелизацији образовних садржаја. Овакве глобалне појаве пред образовни систем постављају нове препреке и захтеве, а то изискује упознавање ученика са новим технологијама и оспособљавање за њихово коришћење (Mihajlov Carević, Petrović, Denić, 2020).

Научни и педагошки значај истраживања примене софтверског пакета *GeoGebra* у учењу садржаја геометрије огледа се у чињеници да на територији Републике Србије до сада није реализовано слично истраживање на узрасту ученика млађих разреда основне школе. До сада је пакет *GeoGebra* коришћен у вишим разредима основне школе, па је ово први пут да је експериментално испитан утицај софтвера у учењу геометрије у четвртом разреду основне школе. За потребе истраживања креиран је програм учења садржаја геометрије који у потпуности прати програм наставе и учења у четвртом разреду основне школе који је доступан за даља коришћења. Велики број динамичних модела направљених у *GeoGebra* пакету може послужити учитељима у извођењу наставе и у том смислу спроведено истраживање доприноси унапређивању наставе математике у основној школи. За разлику од осталих садржаја почетне наставе математике, садржаји геометрије због своје сложености и потребе да се апстрактни геометријски појмови учине очигледним представљају проблем ученицима за сагледавање и усвајање. Коришћење интерактивних динамичних модела креираних у пакету *GeoGebra* омогућава визуелни приказ апстрактних геометријских појмова и помаже ученицима да самостално, снагом сопствене мисли дођу до закључака. Коришћење софтвера током реализације наставе повећава мотивацију ученика за математику као предмет, и геометрију као њен саставни део.

Садржаји креирани применом софтверског пакета *GeoGebra* омогућавају ученицима активно учествовање у наставном процесу и самостално конструисање својих знања и умења. Док се класични модел наставе заснива првенствено на рецептивној настави у којој ученици информације добијају у финалном облику, у откривајућој настави ученик заузима централно место као активан учесник наставног процеса. Садржаји креирани уз употребу *GeoGebra* пакета нису саставни део уџбеничких комплета за математику у првом циклусу обавезног образовања, чиме се ставља акценат на израду посебних активности за учитеље и динамичних модела апстрактних геометријских појмова. Такве активности креиране за потребе експерименталног дела истраживања имају посебан допринос у повећању ефикасности наставе геометрије. У оквиру дисертације дати су садржаји које учитељи практичари могу применити у наставној пракси. Кроз специфичне активности својим ученицима могу олакшати и учинити интересантнијим усвајање садржаја из области геометрије са циљем побољшања постигнућа ученика, обезбеђивања трајности знања и повећања математичке писмености.

Сматрамо да истраживање које смо обавили и закључци до којих смо дошли пружају научној и стручној јавности бољи увид у могућности, ефекте и добробити примене пакета *GeoGebra* у настави геометрије у млађим разредима основне школе. Премда истраживања страних аутора показују да употреба *GeoGebra* пакета подстицајно утиче на учење путем открића, чиме даје учитељу/наставнику прилику да спозна когнитивне способности својих ученика, намера нашег истраживања није да укажемо на потребу за заменом очигледних наставних средстава образовним софтверима, већ њихова међусобна коегзистенција. У том смислу, дисертација представља основ будућим истраживачима да истраже и прикажу ефекате примене софтверског пакета *GeoGebra* из других углова и аспеката, у другим областима почетне наставе математике или пак да испитају могућности примене другог софтвера на идентичном садржају и резултате упореде са нашим.

Друштвени значај истраживања произлази из чињенице да XXI век представља век дигитализације. Национални савет наставника математике сматра да је ИКТ пресудан за учење и поучавање математике (NCTM, 2000), а појава динамичког софтвера *GeoGebra* само потврђује ову чињеницу. У ери дигиталних технологија ученици одрастају у ИКТ окружењу, те би требало радити на развијању компетенција учитеља како би били у стању да прате развој технологија и користе их у образовне сврхе. Анализом каталога програма сталног стручног усавршавања наставника, васпитача и стручних сарадника Завода за унапређивање образовања и васпитања Републике Србије у протеклих неколико година уочили смо тренд опадања броја програма који се односе на повећање компетенција учитеља и наставника за извођење наставе математике уз коришћење софтвера *GeoGebra*. То је у контрадикцији са препорукама *Стратегије* *развоја образовања у Републици Србији до 2030. године* које као фундаменталну потребу наводи неопходност прилагођавања наставника новим тенденцијама у образовању и усавршавање у складу са новинама које ће бити неопходне у будућности. Оспособљавањем за реализацију такве наставе, прожете употребом образовних софтвера, обезбедили бисмо да ученици не усвајају неупотребљива знања и проблеме решавају према шаблону, већ да израстају у личности које критички промишљају и стално трагају за новим сазнањима.

2. Циљ и задаци истраживања

Основни циљ истраживања јесте да се експериментално утврде ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на побољшање постигнућа у учењу садржаја геометрије у четвртом разреду основне школе, као и трајности знања ученика у односу на реализацију истих садржаја класичним моделом извођења наставе. Поред примарног, истраживање има за циљ и утврђивање ефеката примене *GeoGebra*-е на мишљење и ставове ученика и учитеља о успешности примене *GeoGebra*-е у другим областима математике.

На основу постављеног предмета и формулисаних циљева истраживања, изведени су следећи оперативни задаци истраживања:

1) Испитати утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на постигнућа ученика у учењу геометрије;
2) Утврдити утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност усвојених садржаја геометрије у почетној настави математике;
3) Испитати утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на ставове и мишљења ученика о математици;
4) Испитати ставове ученика о учењу геометрије применом софтверског пакета *GeoGebra*;
5) Утврдити мишљења учитеља о примени софтверског пакета *GeoGebra* у почетној настави математике.

3. Хипотезе истраживања

На основу постављеног циља истраживања формулисали смо следећу полазну хипотезу: *Применом софтверског пакета GeoGebra могуће је побољшати ниво постигнућа ученика у области геометрије у односу на класични модел извођења наставе математике у четвртом разреду основне школе.*

Посебне хипотезе истраживања су следеће:

1) Примена софтверског пакета *GeoGebra* у учењу садржаја геометрије доприноси повећању постигнућа ученика у почетној настави математике;
2) Примена софтверског пакета *GeoGebra* у учењу садржаја геометрије доприноси повећању трајности знања ученика у почетној настави математике;
3) Примена софтверског пакета *GeoGebra* доприноси формирању позитивних ставова и мишљења ученика према математици;
4) Примена софтверског пакета *GeoGebra* доприноси формирању позитивних ставова ученика о учењу геометрије применом софтвера;
5) Учитељи су мишљења да примена софтверског пакета *GeoGebra* доприноси повећању образовних постигнућа ученика и позитивно утиче на трајност усвојених садржаја у почетној настави математике.

4. Варијабле истраживања

На основу анализе свих аспеката дефинисаног проблема и предмета истраживања утврдили смо више варијабли које, према функцији која им је додељена у истраживању, имају статус независних и зависних варијабли.

Независну варијаблу представља експериментални програм (примена софтверског пакета *GeoGebra* на садржаје геометрије у настави математике у четвртом разреду основне школе), док зависну варијаблу чине постигнућа ученика (успех на тесту знања), односно знања стечена применом софтверског пакета *GeoGebra* која се мере тестовима посебно конструисаним у ту сврху.

Поред поменутих, издвојили смо и варијабле које се односе на карактеристике ученика. Статус независних имају следеће варијабле које се односе на ученика:

- Пол ученика;
- Оцена из математике коју су постигли на крају трећег разреда основне школе (недовољан (1), довољан (2), добар (3), врлодобар (4), одличан (5));
- Општи успех на крају трећег разреда основне школе (недовољан, довољан, добар, врлодобар, одличан).

Статус зависних имају варијабле:

- Ставови ученика према примени софтверског пакета *GeoGebra*;
- Ставови и мишљења ученика према математици који се мере пре и после деловања експерименталног програма скалом ставова Ликертовог типа.

5. Узорак истраживања

За потребе истраживања формирали смо два узорка на којима је вршено испитивање: узорак ученика и узорак учитеља. Из популације ученика основне школе одабрали смо узорак ученика који су током школске 2018/2019. године похађали четврти разред основне школе. Случајним избором у истраживању су учествовали ученици основних школа „Бошко Ђуричић” и „Рада Миљковић” из Јагодине. Пошто је истраживање засновано на експерименту са паралелним групама, ученици ОШ „Бошко Ђуричић” представљали су експерименталну групу, док су ученици ОШ „Рада Миљковић” чинили контролну групу. Ученици су били распоређени у укупно девет одељења, и то четири одељења ОШ „Бошко Ђуричић” (N = 106), три одељења ученика који похађају наставу у матичном објекту ОШ „Рада Миљковић” (N = 59) и два одељења ученика који наставу похађају у истуреном одељењу на Стрелишту (N = 54). Због немогућности обезбеђивања еквивалентног броја ученика за контролну групу, били смо принуђени да ученике бирамо из две школе. За одређени број ученика изостали су резултати са иницијалног, финалног или поновљеног теста, односно након изузимања ученика који су радили према индивидуалном оперативном плану, разматрали смо резултате укупно 207 ученика (103 ученика експерименталне и 104 ученика контролне групе).

Имајући у виду варијабле које смо разматрали у нашем истраживању (пол ученика, оцена из математике, општи успех) узорак је стратификован. За узорак истраживања кажемо да је групни с обзиром на то да нисмо вршили формирање група, већ смо одабрали унапред формиране групе ученика у одељењима. Што се узраста ученика тиче, изабрали смо ученике четвртог разреда јер *Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања* (2019) предвиђа садржаје геометрије којима смо се у истраживању бавили. Такође, претпостављамо да су код ученика четвртог разреда конкретне логичке операције стабилизоване и да су више оспособљени у изношењу својих ставова.

Сви ученици, учесници истраживања, долазе из градске средине, припадају средњем социјалном сталежу, те стога можемо рећи да су уједначени. Уједначавање ученика експерименталне и контролне групе извели смо према оцени из математике и општем успеху, док смо разлике које постоје између група контролисали статистичким поступком анализе коваријансе.

Увидом у педагошку евиденцију школа у којима је истраживање извршено установљена је полна структура ученика, дата у Табели 5.

Табела 5. *Структура узорка ученика у односу на пол*

	Експериментална група		Контролна група		Укупно	
Пол	N	%	N	%	N	%
Мушки	50	48,5	43	41,3	93	44,9
Женски	53	51,5	61	58,7	114	55,1
Укупно	103	100	104	100	207	100

Од укупно 207 ученика обухваћених истраживањем, у експерименталној групи налазило се 50 дечака (48,5%) и 53 девојчице (51,5%). У контролној групи учествовала су 43 дечака (41,3%) и 61 девојчица (58,7%).

Структура ученика, учесника истраживања, у односу на општи успех постигнут на крају трећег разреда основне школе дата је у Табели 6. На основу представљених података може се уочити да је у обе групе (експерименталној и контролној) највећи број ученика са одличним успехом. У експерименталној групи 86 ученика постиго је одличан успех на крају трећег разреда (83,5%), док је у контролној групи 81 ученик постигао одличан успех (77,9%). Врлодобар општи успех на крају трећег разреда постигло је 14 ученика (13,6%) експерименталне и 21 ученик (20,2%) контролне групе. Број ученика обе групе који су постигли добар или довољан општи успех на крају трећег разреда основне школе прилично је уједначен. Два ученика (1,9%) експерименталне и један ученик (1,0%) контролне групе постигли су добар општи успех, док је са довољним општим успехом претходни разред завршио по један ученик у обе групе испитаника.

Табела 6. *Структура узорка ученика у односу на општи успех*

	Експериментална група		Контролна група		Укупно	
Општи успех	N	%	N	%	N	%
Одличан	86	83,5	81	77,9	167	80,7
Врлодобар	14	13,6	21	20,2	35	16,9
Добар	2	1,9	1	1,0	3	1,4
Довољан	1	1,0	1	1,0	2	1,0
Укупно	103	100	104	100	207	100

Структура ученика у односу на оцену из математике постигнуту на крају трећег разреда основне школе дата је у Табели 7. Највећи проценат испитаника имао је одличну оцену из математике на крају трећег разреда. Међу ученицима експерименталне групе 67 ученика (65,0%), а у контролној 60 ученика (57,7%) имало је одличну оцену. Затим следе ученици који су имали оцену врлодобар, у експерименталној групи њих 22 (21,4%) а у контролној 27 (26,0%). Прилично је уједначен број ученика обе групе који су из математике имали оцену добар и довољан. Њих девет (8,7%) из експерименталне и десет из контролне групе (9,6%) имало је оцену добар (3). Пет ученика експерименталне групе (4,9%) имало је оцену довољан, док је исту оцену имало седам ученика контролне групе (6,7%).

Табела 7. *Структура узорка ученика у односу на оцену из математике*

Оцена из математике	Експериментална група		Контролна група		Укупно	
	N	%	N	%	N	%
Одличан (5)	67	65,0	60	57,7	127	61,3
Врлодобар (4)	22	21,4	27	26,0	49	23,7
Добар (3)	9	8,7	10	9,6	19	9,2
Довољан (2)	5	4,9	7	6,7	12	5,8
Укупно	103	100	104	100	207	100

Узорак учитеља чиниле су четири учитељице Основне школе „Бошко Ђуричић” у чијим одељењима је спроведен експериментални програм: Зорица Филиповић, Мирјана Милошевић, Биљана Благојевић и Бојана Антонијевић. Учитељице Тања Панов, Данијела Милић, Наташа Милосављевић, Лепосава Младеновић и Анкица Тодоровић изводиле су наставу у одељењима контролне групе Основне школе „Рада Миљковић” и нису учествовале у реализацији интервјуа.

6. Методе, технике и инструменти истраживања

На основу формулисаног циља и постављених задатака истраживања извршили смо одабир одговарајућих метода, техника и инструмената. Од метода применили смо методу теоријске анализе, дескриптивну и експерименталну методу. Истраживање смо започели методом теоријске анализе, коју смо користили у изради теоријског приступа проблему. Истом методом извршили смо анализу различитих схватања примене образовног софтвера, што нам је омогућило да створимо теоријску основу истраживања. Истражили смо научне радове теоријског и емпиријског карактера објављене у часописима, зборницима радова и научним монографијама који су се односили на теорије развоја геометријског мишљења, анализу настанка образовних софтвера, развој и одређивање суштинских обележја и структуралних елемената софтверског пакета *GeoGebra* и његову примену у настави математике. Методу теоријске анализе користили смо и како бисмо конципирали оквире методичке трансформације геометријских садржаја уз примену пакета *GeoGebra* у четвртом разреду основне школе.

Дескриптивну методу применили смо приликом прикупљања података о ученицима (општи успех, оцена из математике, резултати тестова) и учитељима, при обради резултата, њиховој интерпретацији и извођењу закључака.

Експерименталну методу, у модалитету педагошког експеримента са паралелним групама, користили смо у циљу утврђивања постојања узрочно-последичних веза између употребе софтвера *GeoGebra* и повећања постигнућа ученика у раду са садржајима геометрије у четвртом разреду основне школе. Пре почетка експеримента формирали смо две групе испитаника (експерименталну и контролну) и уједначили их према карактеристичним обележјима (полу, општем успеху који су ученици постигли на крају трећег разреда основне школе, оцени из математике коју су ученици постигли на крају трећег разреда). Обављено је иницијално тестирање ученика обе групе са циљем утврђивања иницијалног нивоа знања геометријских садржаја. Након тога у експерименталну групу је уведен експериментални програм, а контролна група је радила на устаљен начин. Рад у експерименталној групи је подразумевао извођење наставе математике путем посебно припремљених модела часова који укључују методичку трансформацију садржаја геометрије уз коришћење софтверског пакета *GeoGebra*. Ученици експерименталне групе су, у обиму од 21 часа, обрађивали садржаје геометрије предвиђене програмом наставе и учења за четврти разред основне школе уз примену софтверског пакета *GeoGebra* на часовима. У контролној групи, у истом том периоду, учитељи су реализовали исте наставне јединице на основу одобреног уџбеника математике за четврти разред основне школе, без коришћења образовног софтвера. План реализације садржаја геометрије, број часова за њихову реализацију, распоред и временска динамика били су исти и у експерименталној и у контролној групи. Након спроведеног експерименталног програма и реализације садржаја у обе групе обухваћене истраживањем обављено је финално тестирање свих испитаника са циљем утврђивања нивоа постигнућа ученика. Поновљено финално тестирање (ретестирање) испитаника обављено је четири месеца након реализације експерименталног програма и финалног тестирања ученика (на почетку следеће школске године). Улога ретестирања била је да утврдимо ниво трајности знања ученика о садржајима геометрије обухваћеним истраживањем.

Током истраживања применили смо следеће научно-истраживачке технике:

1. Тестирање;
2. Анкетирање;
3. Скалирање;
4. Интервјуисање.

Спровели смо тестирање ученика који су учествовали у истраживању како бисмо утврдили утицај експерименталног програма (независна варијабла) на постигнућа ученика. Тестирање је извршено у три наврата. Иницијално је спроведено пред почетак реализације експерименталног програма. Финално тестирање је обављено по завршетку експерименталног фактора. Поновљено тестирање је спроведено четири месеца после извршеног финалног тестирања. Сва три тестирања обухватала су обе групе испитаника (експерименталну и контролну) с циљем утврђивања нивоа постигнућа и трајности знања ученика под утицајем експерименталног програма, односно класичног приступа настави.

Анкетирање смо користили приликом испитивања мишљења ученика експерименталне групе о учењу математике под утицајем примене софтверског пакета. Оно је реализовано у два наврата. Прво, пре почетка деловања експерименталног програма у експерименталној групи, и друго, након деловања експерименталног програма. Анкетирање је обављено са циљем да се утврди да ли и на који начин експериментални програм утиче на промену мишљења ученика према учењу математике.

Техника скалирања користила нам је приликом испитивања ставова ученика према математици као наставном предмету и учењу геометрије уз примену софтверског пакета *GeoGebra*. Ставове ученика испитивали смо коришћењем петостепене скале ставова Ликертовог типа. Скалирање је обављено такође два пута, први пут пре увођења експерименталног програма, док је друго реализовано након завршетка експеримента са паралелним групама.

Како бисмо испитали мишљења учитеља ученика који су чинили експерименталну групу о употреби *GeoGebra* пакета у почетној настави математике реализовали смо квалитативни интервју. Интервјуисање четири учитеља обавили смо индивидуално након реализације експерименталног програма. Дескриптивном анализом добијених одговора утврдили смо мишљења учитеља о предностима, ограничењима и могућностима имплементације поменутог софтвера у наставу математике.

За сваку од наведених техника употребили смо адекватне инструменте:

1) Тестови знања;
2) Анкетни упитник за ученике о учењу математике;
3) Скале ставова за ученике;
4) Квалитативни интервју за учитеље.

За потребе истраживања коришћена су три теста знања. Саставили смо их од претходно формираног сета задатака издвајањем и модификовањем задатака према категоријама и општим стандардима постигнућа ученика уз помоћ учитеља одељења у којима је истраживање обављено и ментора – методичара наставе математике. Тако смо сачинили коначну верзију тестова. Приликом избора задатака, у складу са предметом нашег истраживања, фокусирали смо се на садржаје који према општим стандардима постигнућа припадају области Геометрија. Сваки од тестова (иницијални, финални, ретест) садржао је по осам задатака распоређених у три групе у складу са *Општим стандардима постигнућа – образовним стандардима за крај првог циклуса обавезног образовања – Математика*. Група најлакших задатака захтевала је од ученика знање на основном нивоу образовних постигнућа, задаци који су се налазили на средњем степену сложености подразумевали су примену знања средњег нивоа, а најтежи задаци подразумевали су знања на напредном нивоу. Ради лакше обраде података и упоређивања нивоа постигнућа на тестовима, сваки задатак вреднован је са по десет бодова, односно максималан број бодова који су ученици могли постићи на сваком од тестова био је 80. У сваком од задатака распон бодова био је од 2 до 10 бодова, у зависности који део задатка су ученици тачно урадили.

Креирана су три теста:

1. Иницијални тест знања (Прилог 1);
2. Финални тест знања (Прилог 2);
3. Ретест знања (Прилог 3).

Иницијални тест знања садржао је осам задатака распоређених на три нивоа сложености и обухватао геометријске садржаје са којима су се ученици сусретали у претходним разредима. Применили смо га на иницијалном тестирању, пред почетак експерименталног програма. Њиме су биле обухваћене обе групе ученика у циљу утврђивања иницијалног нивоа знања експерименталне и контролне групе. Према нивоима постигнућа, задаци иницијалног теста распоређени су на следећи начин:

- основни ниво – први и трећи задатак (укупно 20 бодова);
- средњи ниво – други, четврти и пети задатак (укупно 30 бодова);
- напредни ниво – шести, седми и осми задатак (укупно 30 бодова).

Иницијални тест, у домену основног нивоа постигнућа, захтевао је од ученика да: именује геометријске објекте у равни (први задатак) и користи поступак мерења површине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица (трећи задатак). У домену средњег нивоа ученик је требало да: уочава међусобне односе геометријских објеката у простору (други задатак); претвара јединице за мерење дужине (четврти задатак) и препозна образац за израчунавање обима правоугаоника (пети задатак). У домену напредног нивоа знања ученик је требало да: израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника када су подаци дати у истим мерним јединицама (шести задатак); израчуна обим троугла и квадрата (седми задатак); израчуна обим сложене фигуре у равни када су подаци дати у истим мерним јединицама (осми задатак).

Финални тест знања је такође садржао осам задатака у вези са геометријским садржајима обухваћеним експерименталним програмом. Примењен је у финалном тестирању, након реализације експерименталног програма, са циљем утврђивања нивоа знања ученика о обрађеним геометријским садржајима и ефеката примене софтверског пакета *GeoGebra*. Финалним тестирањем обухваћене су обе групе испитаника, а према нивоима постигнућа задаци су били распоређени на следећи начин:

- основни ниво – први и други задатак (укупно 20 бодова);
- средњи ниво – трећи, четврти и пети задатак (укупно 30 бодова);
- напредни ниво – шести, седми и осми задатак (укупно 30 бодова).

У домену основног нивоа постигнућа, финални тест знања је захтевао од ученика да: именују геометријске објекте (први задатак) и користе поступак мерења површине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица (други задатак). У домену средњег нивоа ученици је требало да: знају јединице за мерење површине и њихове односе (трећи задатак); препознају мрежу коцке (четврти задатак) и израчунају површину квадра када су подаци дати у истим мерним јединицама (пети задатак). У домену напредног нивоа знања ученици је требало да: израчунају обим и површину квадрата и правоугаоника (шести задатак) и израчунају површину сложених фигура (седми и осми задатак).

Ретест знања, према форми еквивалентан финалном тесту знања са истим бројем задатака, реализован је четири месеца након завршетка експерименталог програма (на почетку следеће школске године) како би се утврдили ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика експерименталне групе у односу на контролну групу. Ретестом знања обухваћене су обе групе испитаника. Слично финалном тесту, и приликом поновљеног тестирања задаци су били распоређени према нивоима постигнућа, и то на следећи начин:

- основни ниво – први и други задатак (укупно 20 бодова);
- средњи ниво – трећи, четврти и пети задатак (укупно 30 бодова);
- напредни ниво – шести, седми и осми задатак (укупно 30 бодова).

У домену основног нивоа постигнућа, захтевано је да ученик: именује геометријске објекте (први задатак) и користи поступак мерења површине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица (други задатак). У домену средњег нивоа требало је да ученик: зна јединице за мерење површине и њихове односе (трећи задатак); препозна мрежу коцке (четврти задатак) и уме да израчуна површину квадра када су подаци дати у истим мерним јединицама (пети задатак). У домену напредног нивоа ученик је требало да: израчуна обим и површину квадрата и правоугаоника (шести задатак) и израчуна површину сложених фигура (седми и осми задатак).

Тестирање је реализовано током једног школског часа у трајању од 45 минута, у истом дану у свим одељењима из узорка, како би се смањио могући утицај паразитарних фактора, док су добијени резултати изражени у укупном броју бодова постигнутим на тестовима знања.

Анкетни упитник конструисан је за потребе истраживања и садржао је десет тврдњи са понуђеним одговорима којима су ученици изнели мишљења о учењу математике, проблемима са којима се сусрећу приликом учења математике и како се осећају док уче математику (Прилог 6). Истим анкетним упитником обављено је анкетирање ученика експерименталне групе пре и након реализације експерименталног програма са циљем да се испита да ли долази до промене мишљења ученика о учењу математике након примене софтверског пакета *GeoGebra* на садржајима геометрије у четвртом разреду основне школе.

У истраживању су коришћене две скале ставова Ликертовог типа.

1) Скалом ставова ученика према математици као наставном предмету желели смо да испитамо ставове ученика о настави математике пре и након примене експерименталног програма, те су ученици експерименталне групе попуњавали поменуту скалу пре увођења експерименталног програма и по његовом завршетку (Прилог 4). Скала је садржала 8 ајтема, а ученици су имали задатак да заокруживањем једног од понуђених бројева (1 – уопште се не слажем, 2 – углавном се не слажем, 3 – нити се слажем нити се не слажем, 4 – углавном се слажем, 5 – потпуно се слажем) процене у којој мери су сагласни са изреченом тврдњом. У фокусу су се налазиле тврдње које се тичу односа ученика према математици као наставном предмету, садржаја који се у оквиру предмета обрађују и мотивације за решавање проблема из математике.
2) Скалом ставова о примени софтверског пакета *GeoGebra* (Прилог 5) желели смо да испитамо ставове ученика о учењу геометрије применом образовног софтвера. Ученицима експерименталне групе понуђене су тврдње о примени пакета *GeoGebra* на које су одговарали изражавањем сопствених ставова на петостепеној скали. Тврдње су се односиле на допринос софтвера визуелизацији садржаја геометрије, очигледности и у којој мери је динамични приказ помогао ученицима да боље разумеју геометријске појмове. Скала се састојала од 10 ајтема, у оквиру којих су ученици након завршеног експерименталног програма изражавали своје ставове заокруживањем једног од понуђених бројева (1 – уопште се не слажем, 2 – углавном се не слажем, 3 – нити се слажем нити се не слажем, 4 – углавном се слажем, 5 – потпуно се слажем).

Обе скале састојале су се из позитивних и негативних тврдњи, док су негативне тврдње пре употребе статистичких тестова најпре рекодиране. На првој скали ученици су могли постићи од 8 до 40 бодова (вредност 24 представља неутралан став), док су на другој могли постићи од 10 до 50 бодова (неутралан став је изражен вредношћу од 30 бодова).

Квалитативни интервју примењен је приликом индивидуалног разговора са учитељима одељења која чине експерименталну групу испитаника (четири учитеља) (Прилог 7). Током интервјуа учитељима је постављено укупно дванаест питања о томе да ли су упознати са образовним софтверима, примени образовних софтвера у настави математике, њиховим ставовима о предностима и ограничењима таквог начина рада и да ли би његова имплементација допринела повећању нивоа постигнућа ученика, мотивацији, трајности знања и из других области почетне наставе математике.

7. Метријске карактеристике инструмената истраживања

Будући да нисмо користили постојеће тестове којима бисмо мерили нивое постигнућа ученика четвртог разреда о геометријским садржајима обухваћеним истраживањем, самостално смо конструисали адекватне мерне инструменте. Како би њихова употреба била оправдана, најпре смо извршили проверу метријских карактеристика инструмената: објективности, поузданости (релијабилности), осетљивости (дискриминативности) и валидности.

Објективност тестова постигли смо стављањем ученика у приближно исте услове током решавања задатака за теста. Учитељи одељења у којима је обављено истраживање добили су упутства на који начин треба спровести тестирање, истоветно и у одељењима експерименталне и контролне групе. Тестирање је реализовано током једног школског часа, у трајању од 45 минута, у истом дану. Бодовање по истом критеријуму вршила су два независна оцењивача (аутор дисертације и учитељ који је исказао интересовање), а објективност тестова проверили смо утврђивањем степена слагања резултата.

За утврђивање поузданости (релијабилности) тестова користили смо Кронбах алфа коефицијент корелације којим смо мерили унутрашњу сагласност теста, односно степен сродности ставки (задатака) из којих се тест састоји. Вредност Кронбах коефицијента алфа креће се од 0 до 1, а у идеалном случају требало би да буде већи од 0,7 (Максимовић, Османовић, 2020; Taber, 2018). У Табели 8 дате су вредности Кронбах коефицијента алфа за тестове знања које смо конструисали (како је ретест еквивалентан финалном тесту знања са истим бројем задатака и начином бодовања, то његову релијабилност нисмо испитивали).

Табела 8. *Вредности Кронбах коефицијента алфа за тестове знања*

	Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
Иницијални тест	0,703	0,713	8
Финални тест	0,868	0,872	8

На основу табеле уочава се да су Кронбах коефицијенти алфа за иницијални и финални тест знања већи од граничне вредности, што имплицира да су коришћени тестови прихватљиви и поуздани (Pallant, 2011).

Осетљивост (дискриминативност) тестова постиже се када се тестом могу утврдити фине разлике код испитаника у карактеристици која је предмет анализе (у нашем случају проверавали смо да ли је уз помоћ тестова могуће разликовати ученике по знању). Проверу смо извршили испитивањем расподеле учесталости скорова на тестовима знања и да ли и у којој мери расподела одступа од нормалне расподеле. О нормалности расподеле можемо закључити на основу дескриптивних статистичких показатеља асиметрије (skewness) и спљоштености (kurtosis), датих у Табели 9.

Табела 9. *Описни показатељи нормалности расподеле*

Група	Тест	Skewness	Sde	Kurtosis	Sde
Експериментална група	Иницијални	- 0,242	0,238	- 0,742	0,472
	Финални	- 1,069	0,238	0,010	0,472
	Ретест	- 1,144	0,238	1,682	0,472
Контролна група	Иницијални	- 0,303	0,237	- 0,330	0,469
	Финални	- 0,681	0,237	0,267	0,469
	Ретест	0,095	0,237	- 0,467	0,469

Како се вредности асиметрије и спљоштености сва три теста налазе између -2 и +2, то резултати имају нормалну униваријантну расподелу (George, Mallery, 2010, према Ковач, 2020). Вредности асиметрије су готово свуда позитивне, осим на ретесту контролне групе, што указује на то да је већина скорова на тестовима десно од средње вредности, међу већим вредностима. Позитивне вредности спљоштености показују да је расподела шиљатија од нормалне, односно да има више резултата сконцентрисаних око центра расподеле, док негативне вредности говоре да је расподела пљоснатија од нормалне и да има више резултата на крајевима (Pallant, 2011). Табачник и Фидел (Tabachnick, Fidell, 2007, према Pallant, 2011) наводе да код великих узорака (преко 200 испитаника) асиметричност нема знатнијег утицаја на резултате анализе и да су у таквим случајевима критеријуми утврђивања статистичке значајности за два индекса асиметрије и спљоштености превише осетљиви. Из тог разлога, препорука је да се облик расподеле уочи и на хистограму (Прилог 9).

Дискриминативност тестова утврдили смо и тестирањем хипотезе о нормалности расподеле. С обзиром на величину узорка, у ту сврху користили смо Колмогоров–Смирнов тест (Табела 10).

Табела 10. *Испитивање нормалности расподеле резултата тестова*

Група	Тест	Kolmogorov–Smirnov^a		
		Statistic	df	Sig.
Експериментална група	Иницијални	0,070	103	0,200
	Финални	0,173	103	0,000
	Ретест	0,124	103	0,001
Контролна група	Иницијални	0,068	104	0,200
	Финални	0,130	104	0,000
	Ретест	0,060	104	0,200

Расподела на иницијалном тестирању обе групе и ретесту контролне групе јесте нормална ($p>0,05$), док се у свим осталим случајевима дистрибуција статистички значајно разликује од нормалне ($p<0,05$). На основу добијених резултата Колмогоров–Смирнов теста закључујемо да се одбацује хипотеза о нормалности расподеле.

Валидност, као једна од метријских карактеристика тестова, односи се на степен до ког тест мери оно што треба да мери (Knežević Florić, Ninković, 2012; Максимовић, Османовић, 2020). Коришћене тестове (иницијални, финални и ретест) сами смо конструисали у сарадњи са ментором, методичарем наставе математике, и учитељима одељења која су обухваћена истраживањем. Прва верзија иницијалног теста садржала је 15 задатака чији број смо након неколико верзија и пилот-теста редуковали и свели на осам задатака распоређених на три нивоа постигнућа. Слично, инструмент за финални тест од такође осам питања креирали смо након неколико верзија и изведеног пилотирања од првобитног који се састојао од 12 задатака. Том приликом применили смо логичку и садржајну валидацију које су се односиле на утврђивање степена слагања задатака на тесту са садржајима предвиђеним програмом наставе и учења. У том смислу, тест се може сматрати ваљаним уколико мери ниво знања из области на коју се односи, што смо у истраживању постигли уз примену вишеструке валидације.

На основу наведених метријских карактеристика можемо сматрати да су резултати добијени креираним тестовима реалан показатељ ефеката примене софтверског пакета *GeoGebra* на садржајима геометрије у четвртом разреду основне школе.

И поузданост скала ставова ученика утврдили смо Кронбах алфа коефицијентом корелације којим смо мерили унутрашњу сагласност скала. Вредност Кронбах коефицијента алфа скале ставова ученика према математици као наставном предмету износи 0,794, док за скалу ставова ученика о примени софтверског пакета *GeoGebra* има вредност 0,872. Обе вредности указују на одговарајући ниво поузданости конструисаних инструмената.

Поузданост анкетног упитника којим смо испитивали мишљења ученика о математици такође смо утврдили Кронбах алфа коефицијентом корелације, чија вредност 0,712 показује да се мерни инструмент може сматрати поузданим.

8. Организација и реализација истраживања

Емпиријско истраживање спроведено је у току другог полугодишта школске 2018/19. године. Применили смо варијанту експеримента са паралелним групама, којом смо, у контролисаним условима, проверавали на који начин примена софтверског пакета *GeoGebra* у учењу геометријских садржаја утиче на постигнућа ученика из области математике у четвртом разреду основне школе. Истраживањем смо обухватили девет одељења четвртог разреда из две градске школе са територије Јагодине, и то четири одељења у експерименталној и пет у контролној групи.

Пре почетка експеримента, руководство школа, педагошко-психолошке службе обе школе, учитељи одељења у којима ће истраживање бити обављено и родитељи ученика упознати су са циљем и предметом, садржајем и динамиком истраживања. Пре реализације истраживања извршена је методичка трансформација предвиђених геометријских садржаја и креирани динамични модели уз коришћење софтверског пакета *GeoGebra* за извођење часова у експерименталној групи. Такође, извршено је пилот тестирање свих инструмената, а затим на основу обављених корекција и иницијално тестирање знања ученика у свих девет одељења, као и анкетирање и скалирање ставова ученика експерименталне групе (на почетку другог полугодишта). Након тога, ученици експерименталне групе су у оквиру редовне наставе математике одабране геометријске садржаје обрађивали уз примену експерименталног програма, док су одељења контролне групе обрађивала исте садржаје на класичан начин.

Експериментални програм обухватао је све садржаје наставне теме *Геометрија* предвиђене програмом наставе и учења Математике у четвртом разреду основне школе. Предвиђено је било да укупно траје 21 час, након чега је обављено финално тестирање знања ученика. Списак наставних јединица које су обухваћене експерименталним програмом дат је у Табели 11.

Табела 11. *Вежбе у оквиру експерименталног програма*

Редни број часа	Назив наставне јединице	Тип часа
1.	Површина фигуре. Мерење површине	Обрада
2.	Површина фигуре. Мерење површине	Утврђивање
3.	Јединице мере за површину m^2, dm^2, cm^2, mm^2	Обрада
4.	Јединице мере за површину m^2, dm^2, cm^2, mm^2	Утврђивање
5.	Јединице мере за површину веће од m^2	Обрада
6.	Јединице мере за површину веће од m^2	Утврђивање
7.	Израчунавање површине правоугаоника	Обрада
8.	Израчунавање површине правоугаоника	Утврђивање
9.	Израчунавање површине квадрата	Обрада

10.	Израчунавање површине квадрата	Утврђивање
11.	Израчунавање површине правоугаоника и квадрата	Утврђивање
12.	Квадар и коцка. Особине квадра	Обрада
13.	Квадар и коцка. Особине коцке	Обрада
14.	Квадар и коцка. Особине квадра и коцке	Утврђивање
15.	Мрежа квадра и коцке	Обрада
16.	Мрежа квадра и коцке	Утврђивање
17.	Израчунавање површине квадра	Обрада
18.	Израчунавање површине квадра	Утврђивање
19.	Израчунавање површине коцке	Обрада
20.	Израчунавање површине коцке	Утврђивање
21.	Израчунавање површине квадра и коцке	Утврђивање

Током трајања експерименталног програма, часове математике изводио је аутор дисертације са циљем обезбеђивања истих услова за рад у свим одељењима експерименталне групе. Учитељ сваког од одељења експерименталне групе био је присутан на часовима у улози посматрача, како би касније током интервјуа могао да искаже своје ставове и мишљења у вези са применом образовног софтвера *GeoGebra*.

По завршетку експерименталног програма обе групе испитаника решавале су задатке са финалног теста знања са циљем утврђивања ефикасности примене експерименталног програма у односу на класичан модел извођења наставе (крајем априла 2019. године). Такође, извршено је анкетирање и скалирање ученика експерименталне групе како би се утврдио утицај софтверског пакета *GeoGebra* на ставове ученика према настави математике и поменутом софтверу. Из истог разлога, обављено је интервјуисање учитеља одељења у којима је реализован експериментални програм.

У складу са претходно дефинисаном динамиком, четири месеца након реализације финалног тестирања извршено је поновно тестирање знања свих испитаника (ретест) ради утврђивања утицаја имплементације софтверског пакета *GeoGebra* на трајност стечених знања ученика о геометријским садржајима (почетком септембра 2019. године).

Емпиријско истраживање спроведено је према следећим фазама:

1. Прикупљање и проучавање релевантне литературе из области истраживања;
2. Израда експерименталног програма (израда модела часова уз примену софтверског пакета *GeoGebra* у складу са програмима математике за четврти разред, наставним планом и програмом, годишњим планом рада утврђеним од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја и оперативним планом извођења часова математике утврђеним од стране учитеља);

3. Упознавање директора, педагошко-психолошке службе, учитеља и родитеља о садржају и динамици истраживања;
4. Консултације са учитељима, договор у вези са организацијом рада и реализацијом истраживања;
5. Израда прелиминарних инструмената истраживања и спровођење пилот испитивања на пригодном узорку ученика (два одељења) у циљу утврђивања метријских карактеристика конструисаних инструмената;
6. Израда и реализација иницијалних тестова;
7. Израда и реализација анкетних упитника и скала ставова за ученике пре увођења експерименталног програма;
8. Планирање, припремање и обезбеђивање материјално-техничких ресурса;
9. Реализација експерименталног програма. У одељењима експерименталне групе аутор дисертације изводи наставу према утврђеном експерименталном програму, уз примену динамичних модела креираних применом софтверског пакета *GeoGebra*. У одељењима контролне групе учитељи реализују садржаје класичним моделом наставе;
10. Израда финалног теста и реализација тестирања након завршеног експерименталног програма;
11. Израда и реализација упитника и скала ставова ученика о настави математике и примени софтверског пакета *GeoGebra* након реализованог експерименталног програма;
12. Израда питања и реализација квалитативног интервјуа са учитељима одељења која су учествовала у реализацији експерименталног програма;
13. Ретестирање ученика ради утврђивања нивоа трајности знања истеком четири месеца од финалног тестирања. Иницијално, финално тестирање и ретест знања реализовани су током једног школског часа у трајању од 45 минута, у истом дану у свим одељењима, како би се смањио могући утицај паразитарних фактора;
14. Обрада, анализа прикупљених података, дискусија резултата, израда докторске дисертације, извођење закључака са акцентом на смернице за будућа истраживања.

Све активности предвиђене истраживањем успешно су реализоване.

9. Статистичка обрада података

Обраду података добијених применом претходно наведених истраживачких инструмената извршили смо стандардном квантитативном (статистичком) и квалитативном анализом. Статистичку обраду података засновали смо на употреби стандардних статистичких поступака, статистичког описивања и закључивања, и у ту сврху користили смо софтверски пакет за статистичку обраду података IBM SPSS Statistics 23.

Статистички поступци које смо користили у анализи резултата јесу следећи:

- Једнофакторска анализа варијансе (ANOVA) за утврђивање статистичке значајности разлика у постигнућима на тестовима знања између ученика експерименталне и контролне групе и утврђивање статистичке значајности разлика у ставовима ученика;
- Двофакторска анализа варијансе за утврђивање статистичке значајности разлика у постигнућима узмеђу испитаника у односу на независне варијабле (пол, општи успех, оцену из математике);
- Анализа коваријансе (ANCOVA) за утврђивање статистичке значајности разлика у постигнућима између ученика експерименталне и контролне групе, при чему је уклоњена варијанса у зависној промењљивој узрокована коваријатом, чиме је постигнуто статистичко уједначавање група;
- *t*-тест за утврђивање статистичке значајности разлика у ставовима ученика;
- Кронбах алфа коефицијент корелације којим смо утврдили метријске карактеристике конструисаних инструмената;
- Колмогоров–Смирнов тест за утврђивање нормалности расподеле скорова на тестовима знања.
- Пирсонов коефицијент корелације за испитивање корелације између независних варијабли и примене софтверског пакета *GeoGebra*.

Поред наведених статистичких поступака, примењивали смо фреквенцију, аритметичку средину, процентуално, графичко и табеларно приказивање података.

III АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у почетној настави математике

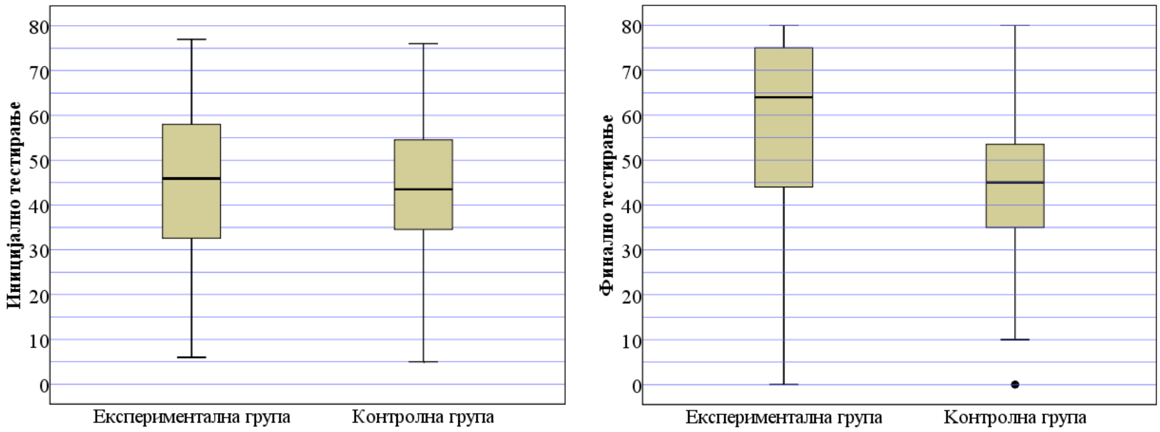
У складу са истраживачким задацима дефинисаним у претходном поглављу најпре смо желели да утврдимо утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у четвртом разреду основне школе. Ефекте примене пакета испитали смо кроз укупно образовно постигнуће које су ученици остварили приликом израде тестова знања, а затим да ли и у којој мери је његова примена ефикасна у зависности од пола ученика, оцене из математике и општег успеха. На основу тако дефинисаног задатка, поставили смо и тестирали истраживачку хипотезу: *Примена софтверског пакета GeoGebra у учењу садржаја геометрије доприноси повећању нивоа постигнућа ученика у почетној настави математике*.

Пре почетка експерименталног програма који је подразумевао примену софтверског пакета *GeoGebra* на садржајима геометрије извршено је иницијално тестирање знања свих ученика. Резултати показују да су постигнућа ученика обе групе у области геометрије била прилично уједначена: ученици експерименталне групе (M = 45,02; SD = 18,32), ученици контролне групе (M = 43,28; SD = 15,54) (Табела 12). Статистичку значајност разлика у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном мерењу тестирали смо анализом варијансе (F(1,205) = 0,541; p = 0,463), и утврдили да разлике нису статистички значајне, док резултати Левеновог теста (p = 0,066) указују да није прекршена претпоставка о хомогености варијансе и добијени резултати су поуздани (Табела 12).

Табела 12. *Дескриптивни показатељи нивоа постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалном тестирању*

						95% Confidence Interval for Mean	
		N	M	SD	SDE	Lower Bound	Upper Bound
Иницијално тестирање	Експериментална група	103	45,02	18,32	1,80	41,44	48,60
	Контролна група	104	43,28	15,54	1,52	40,26	46,30
	Укупно	207	44,14	16,96	1,17	41,82	46,47
Финално тестирање	Експериментална група	103	55,10	25,93	2,55	50,03	60,17
	Контролна група	104	41,84	19,14	1,87	38,12	45,56
	Укупно	207	48,44	23,67	1,64	45,20	51,68

Финално тестирање знања ученика обављено је непосредно након реализације експерименталног програма. Резултати приказани у Табели 12 указују на знатно више просечне резултате ученика експерименталне групе (M = 55,10; SD = 25,93), док су се резултати ученика контролне групе задржали на приближно истом нивоу постигнућа уз благи пад (M = 41,84; SD = 19,14). На Графикону 4 дат је графички приказ постигнућа ученика обе групе на иницијалном и финалном тестирању.



Графикон 4. *Резултати остварени приликом иницијалног и финалног тестирања знања ученика*

Статистичку значајност разлика у постигнућима ученика добијених финалним тестирањем тестирали смо такође анализом варијансе и утврдили да је разлика између експерименталне и контролне групе статистички значајна (F(1,205) = 17,539; p = 0,000). Сигнификантност Левеновог теста у финалном мерењу мања је од 0,05, те смо посматрали резултате Велшовог и Браун–Форсајтовог теста отпорних на кршење претпоставке о хомогености варијансе (Pallant, 2011) и потврдили да је разлика у постигнутим резултатима група на финалном тестирању знања статистички значајна у корист експерименталне групе (Табела 13).

Табела 13. *Анализа варијансе иницијалног и финалног тестирања*

Test of Homogeneity of Variances

	Levene statistic	df1	df2	Sig.
Иницијално тестирање	3,420	1	205	0,066
Финално тестирање	12,059	1	205	0,001

ANOVA

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијално тестирање	Између група	155,882	1	155,882	0,541	0,463
	Унутар групе	59122,346	205	288,402		
	Укупно	59278,229	206			
Финално тестирање	Између група	9099,747	1	9099,747	17,539	0,000
	Унутар групе	106359,364	205	518,826		
	Укупно	115459,111	206			

Robust Tests of Equality of Means

		Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијално тестирање	Welch	0,540	1	199,053	0,463
	Brown–Forsythe	0,540	1	199,053	0,463
Финално тестирање	Welch	17,489	1	187,648	0,000
	Brown–Forsythe	17,489	1	187,648	0,000

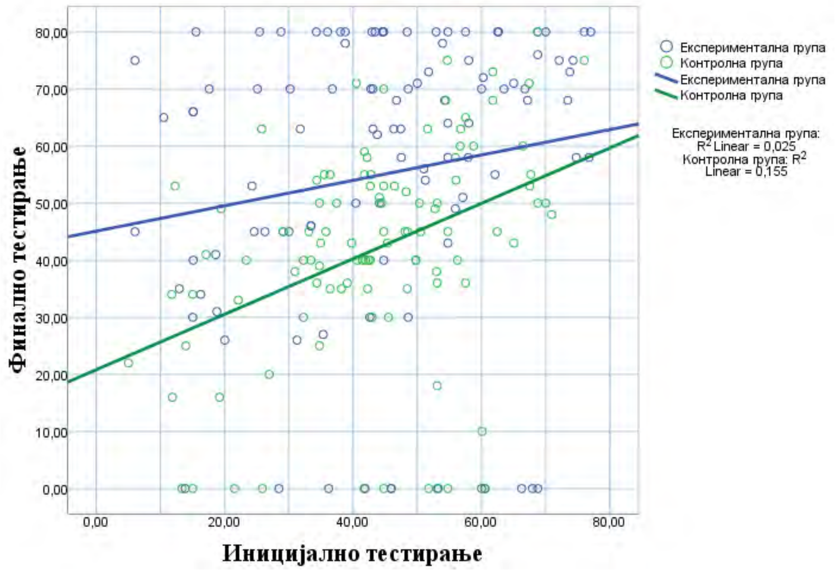
Примењени статистички тестови имплицирају да је експериментална група ученика који су радили уз примену софтверског пакета *GeoGebra* у настави математике остварила статистички значајан напредак у односу на постигнућа ученика контролне групе. Ученици експерименталне групе били су успешнији у решавању математичких проблема обухваћених финалним тестом знања и тако постигли боље резултате у односу на ученике контролне групе који су садржаје геометрије претходно реализовали класичним моделом извођења наставе. Тиме је потврђена полазна претпоставка о доприносу који остварује примена софтвера на повећање нивоа постигнућа ученика у почетној настави геометрије.

У намери да отклонимо сумњу да су резултати статистичких тестова последица неуједначености експерименталне и контролне групе ученика и како бисмо утврдили поузданост добијених резултата, приступили смо примени анализе коваријансе (ANCOVA). Статистички смо отклонили утицај једне додатне (непрекидне) променљиве коју је представљао резултат постигнут на иницијалном тестирању знања ученика. Коваријат (резултат са иницијалног тестирања) измерен је непосредно пре увођења експерименталног фактора и његова поузданост јесте добра, што потврђује Кронбах алфа коефицијент корелације (Табела 14).

Табела 14. *Вредности Кронбах коефицијента алфа*

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
0,703	0,713	8

За проверу линеарности зависне променљиве (резултата финалног тестирања) и коваријата користили смо дијаграм растурања (Графикон 5). На графикону се може уочити да је у свакој од група (експерименталној и контролној) однос између зависне променљиве и коваријата линеаран, односно праволинијски. Тиме је потврђена претпоставка о линеарности зависне променљиве и коваријата.



Графикон 5. *Линеарност зависне променљиве и коваријата*

Вредност хомогености регресионих нагиба између коваријата и зависне променљиве у обе групе утврдили смо статистички. Вредност интеракције коваријата и зависне променљиве представљена у Табели 15 није статистички значајна (F = 2,052;

p = 0,154), указује да хомогеност регресионих нагиба није нарушена и испуњени су услови за примену анализе коваријансе.

Табела 15. *Хомогеност регресионих нагиба*

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	16658,109^a	3	5552,703	11,409	0,000
Intercept	28250,632	1	28250,632	58,045	0,000
Група	3828,926	1	3828,926	7,867	0,006
Иницијално тестирање	7221,240	1	7221,240	14,837	0,000
Група * Иницијално тестирање	998,548	1	998,548	2,052	0,154
Error	98801,002	203	486,704		
Total	601260,000	207			
Corrected Total	115459,111	206			

a. R Squared = 0,144 (Adjusted R Squared = 0,132)

Анализа коваријансе између група дата у Табели 16 јесте статистички значајна (F(1,204) = 16,970; p = 0,000) и указује да су разлике у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе настале под утицајем примене софтверског пакета *GeoGebra* статистички значајне. Добијене вредности анализе коваријансе одбацују сумњу да су разлике у постигнућима ученика настале услед недовољне уједначености експерименталне и контролне групе, већ потврђују да су последица начина рада који је обухватао експериментални програм примењен у одељењима експерименталне групе.

Табела 16. *Анализа коваријансе*

Dependent Variable: Финално тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	15659,561^a	2	7829,780	16,005	0,000	0,136
Intercept	30162,637	1	30162,637	61,655	0,000	0,232
Група	8301,717	1	8301,717	16,970	0,000	0,077
Иницијално тестирање	6559,814	1	6559,814	13,409	0,000	0,062
Error	99799,550	204	489,213			
Total	601260,000	207				
Corrected Total	115459,111	206				

a. R Squared = 0,136 (Adjusted R Squared = 0,127)

Добијени вредност парцијалног ета квадрата (Табела 16) указује на то који је део варијансе у зависној промењљивој (финалном тестирању) објашњен независном промењљивом (група). Према Коену, вредност парцијалног ета квадрата 0,077 имплицира умерени утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* у савладавању садржаја геометрије (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). Тумачењем добијене вредности парцијалног ета квадрата можемо закључити да 7,7% варијансе у финалном тестирању можемо објаснити независном променљивом коју чини експериментални програм. Када се уклони утицај независне променљиве, утицај коваријата (иницијалног тестирања) на резултате постигнуте на финалном тестирању такође је статистички значајан (F(1,204) = 13,409; p = 0,000). Утврђени парцијални ета квадрат (0,062) указује да постоји умерена веза између резултата добијених приликом иницијалног и финалног тестирања, и њим се може објаснити 6,2% варијансе у резултатима финалног тестирања знања ученика.

Анализом добијених резултата можемо закључити да употреба софтвера *GeoGebra* над садржајима геометрије позитивно утиче на повећање нивоа постигнућа ученика. Тиме је потврђена полазна хипотеза да *примена софтверског пакета GeoGebra у учењу садржаја геометрије доприноси повећању нивоа постигнућа ученика у почетној настави математике*.

Резултати до којих смо истраживањем дошли у сагласју су са бројним истраживањима ефеката примене софтвера *GeoGebra* на различитим нивоима образовања (Akanmu, 2016; Bhagat, Chang, 2015; Божић, 2019; Bulut et al., 2016; Bwalya, 2019; Љајко, 2014; Kaya, Akçakin, Bulut, 2013; Martinovski, Martinovski, 2013, Mukiri, 2016; Прентовић, 2014; Shadaan, Eu, 2013; Thambi, Eu, 2013; Triwahyuningtyas, Rahayu, Agustin, 2019; Tutkun, Ozturk, 2013; Zdráhal, Dofková, Nocar, 2019; Zulnaidi, Zakaria, 2012). Заједнички именитељ свих истраживања јесте да поменути софтвер доприноси повећању постигнућа ученика и бољем разумевању математичких садржаја у односу на класичан модел извођења наставе.

Бројни истраживачи као вредност примене *GeoGebra* софтвера истичу очигледност и динамичан приказ, чиме се ученицима олакшава континуирано праћење процеса трансформације, не само и искључиво геометријских, већ и других математичких појмова. Могућност изразите визуелизације даје прилику ученицима да постепено изграђују појмове, у складу са њиховим способностима и нивоом когнитивног развоја. Имајући у виду да се, према Пијажеовој периодизацији когнитивног развоја, деца у првом циклусу обавезног образовања налазе на стадијуму конкретних интелектуалних операција, то све сугерише неопходност употребе једног оваквог софтвера у почетној настави математике. Правилним формирањем појмова на овом узрасту креира се темељ за касније ослобађање од реалних објеката и расуђивање по законима формалне логике. Ученици постепено престају да се ослањају на очигледност, опажања и чула, док манипулишу апстракцијама, појмовима и симболима.

Свеобухватан допринос употребе *GeoGebra* софтвера на садржајима геометрије можемо јасније сагледати уколико анализирамо утицај који *GeoGebra* остварује у раду ученика на различитим нивоима образовних постигнућа, али и у зависности од пола, општег успеха и оцене из математике, чиме ћемо се бавити у даљој анализи резултата истраживања.

1.1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије према нивоима образовних постигнућа

У истраживању смо, поред праћења ефеката примене софтверског пакета *GeoGebra* на постигнућа ученика у геометрији, желели да утврдимо и да ли примена оваквог вида учења садржаја остварује ефекте на сваком од нивоа образовног постигнућа ученика (основном, средњем и напредном). Како су инструменти структурирани тако да садрже захтеве на три нивоа, тако ћемо и приказати анализу постигнутих резултата ученика.

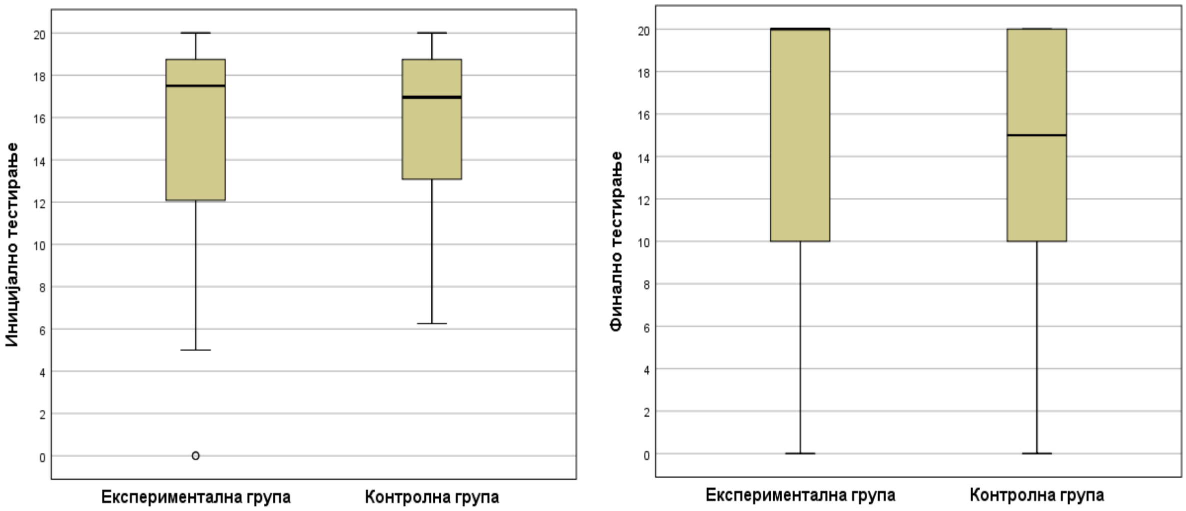
1.1.1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика на основном нивоу

Анализа ефеката примене софтвера на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у четвртом разреду основне школе на основном нивоу постигнућа указује на то да су на иницијалном тестирању знања у области геометрије ученици који су чинили контролну групу постигли мало бољи резултат (M = 15,67; SD = 3,56) у поређењу са ученицима одељења у којима је спроведен експериментални програм (M = 15,05; SD = 4,76) (Табела 17).

Табела 17. *Дескриптивни показатељи нивоа постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на основном нивоу*

						95% Confidence Interval for Mean	
		N	M	SD	SDE	Lower Bound	Upper Bound
Иницијално тестирање	Експериментална група	103	15,05	4,76	0,47	14,12	15,98
	Контролна група	104	15,67	3,56	0,35	14,98	16,36
	Укупно	207	15,36	4,20	0,29	14,79	15,94
Финално тестирање	Експериментална група	103	15,24	7,15	0,70	13,84	16,64
	Контролна група	104	14,13	6,44	0,63	12,88	15,39
	Укупно	207	14,69	6,81	0,47	13,75	15,62

Резултати финалног тестирања знања ученика приказани у Табели 17 указују да су постигнути просечни резултати ученика експерименталне групе бољи (M = 15,24; SD = 7,15), док су ученици контролне групе на финалном тестирању остварили пад у односу на иницијално тестирање (M = 14,13; SD = 6,44) (Табела 17). На Графикону 6 дат је и графички приказ постигнућа ученика обе групе на иницијалном и финалном тестирању знања.



Графикон 6. *Резултати остварени приликом иницијалног и финалног тестирања знања ученика на основном нивоу*

Статистичку значајност разлика у постигнућима ученика на основном нивоу добијених финалним тестирањем тестирали смо двофакторском анализом варијансе. Сигнификантност Левеновог теста у финалном мерењу већа је од 0,05 (F = 0,746; p = 0,803) и потврђује да је претпоставка о једнакости варијансе задовољена (Табела 18).

Табела 18. *Левенов тест једнакости варијанси на основном нивоу постигнућа*

Dependent Variable: Финално тестирање

F	df1	df2	Sig.
0,746	25	164	0,803

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Након уклањања утицаја коваријата (резултат иницијалног тестирања), утврдили смо постојање стистички значајних разлика у постигнућима ученика у експерименталној и контролној групи на основном нивоу (F = 3,058; p = 0,028) (Табела 19). Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,018 – што указује на мали утицај варијансе у резултатима финалног тестирања (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). Тумачењем добијеног парцијалног ета квадрата закључујемо да 1,8% варијансе у финалном тестирању (на основном нивоу постигнућа) можемо објаснити утицајем независне променљиве коју чини експериментални програм.

Посматрањем утицаја коваријата (постигнуће ученика на основном нивоу у оквиру иницијалног тестирања) на постигнућа ученика на истом нивоу финалног тестирања након уклањања утицаја независне променљиве (група), добијене разлике имају карактер статистичке значајности (F = 5,326; p = 0,016) (Табела 19). Вредност парцијалног ета квадрата 0,162 указује на велики утицај варијансе у резултатима финалног тестирања.

Табела 19. *Анализа коваријансе на основном нивоу постигнућа*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Финално тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	1917,532[a]	42	49,165	1,072	0,131	0,201
Intercept	14260,249	1	14260,249	306,228	0,000	0,651
Иницијално тестирање	1475,323	31	44,707	5,326	0,016	0,162
Група	82,389	1	82,389	3,058	0,028	0,018
Error	7137,057	161	46,567			
Total	54200,000	207				
Corrected Total	9554,589	206				

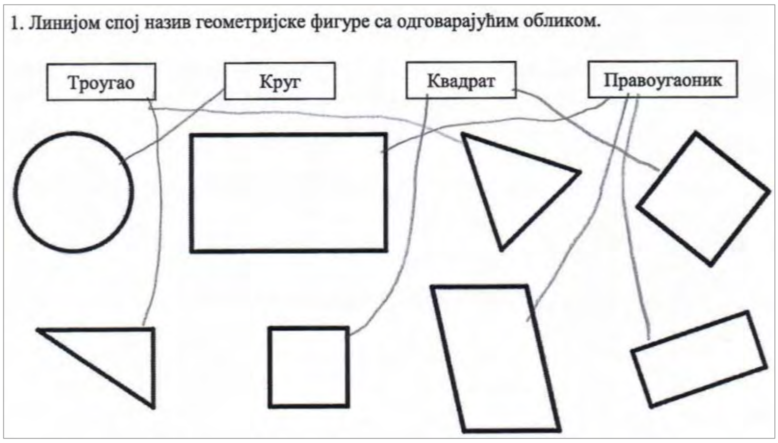
a. R Squared = 0,201 (Adjusted R Squared = 0,004)

Резултати добијени иницијалним и финалним тестирањем имплицирају да је код ученика контролне групе дошло до пада у нивоу постигнућа на основном нивоу на финалном мерењу у односу на иницијално на којем су постигли бољи резултат у поређењу са ученицима експерименталне групе. Из добијених резултата се види да ученици код којих је у настави примењиван софтвер постижу боље резултате у учењу геометрије. Разлике у постигнућима обе групе ученика нису велике, али имају карактер статистичке значајности. Како се на основном нивоу образовних постигнућа налазе ученици који остварују најслабије резултате када је настава математике у питању, овакви резултати охрабрују и показују да дидактичке предности софтвера долазе до изражаја и у раду са ученицима слабијих математичких способности.

Како бисмо потпуније сагледали начин на који ученици размишљају и разумеју геометријске појмове, покушаћемо да се осврнемо на неке од најчешћих грешака које су чинили при решавању задатака на основном нивоу постигнућа.

Првим задатком са овог нивоа тестирали смо у којој мери су ученици овладали појмом геометријских фигура, њиховим карактеристикама, и колико су у стању да од датих фигура препознају оне које испуњавају потребне услове да бисмо их могли именовати троуглом, кругом, квадратом или правоугаоником (Пример 15).

Пример 15. *Решење задатка препознавања облика геометријских фигура у равни – иницијално тестирање*



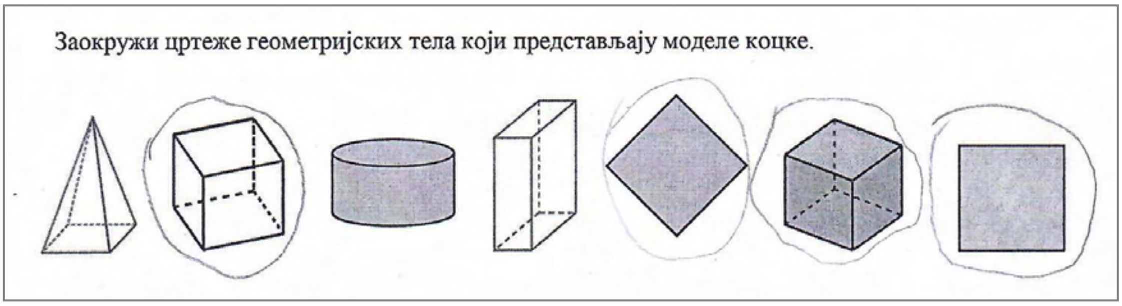
1. Линијом спој назив геометријске фигуре са одговарајућим обликом.

Велики број ученика са успехом је међу датим фигурама препознао троуглове, круг, квадрате, при чему је важно истаћи да су троуглови и један квадрат представљени на начин са којим се ученици не срећу често на часовима математике. Квадрати на које ученици наилазе у уџбеницима или часовима најчешће су представљени тако да су им странице хоризонталне и вертикалне, док најчешћи приказ троуглова јесте са хоризонталним доњим страницама. И поред ове чињенице, ученици су препознали елементе које фигура треба да поседује да би се могла назвати троуглом или квадратом и са успехом их повезали са одговарајућим називима. Са друге стране, при повезивању фигура са називом правоугаоника ученици су имали потешкоћа да одреде који од датих четвороуглова задовољава потребан услов да би имао облик правоугаоника. Очекивано, ученици су са највећим успехом повезали правоугаоник са хоризонталним и вертикалним страницама са називом, док су нешто мање успешни били при препознавању другог правоугаоника који не заузима карактеристичан положај. Велики број тестираних ученика (61,35%) повезао је и приказани паралелограм са називом правоугаоника чиме је показао да недовољно добро разуме које услове фигура треба да испуни како би се назвала правоугаоником. Ученици су пажњу усмерили на испуњеност услова да фигура има четири темена, четири странице, да су странице паралелне, да су наспрамне странице једнаких дужина, а пропустили су да уоче да услов нормалности суседних страница није испуњен. Један од могућих разлога изостављања овог услова могао би бити тај да су се ученици сконцентрисали на уочавање две хоризонталне странице фигуре, а да нису проверили троугаоним лењиром да ли су друге две странице нормалне на њих. Такође, постоји вероватноћа да се ученици у претходном периоду нису сусретали са фигурама оваквог облика и због тога долази до погрешне перцепције да је паралелограм правоугаоник. Још једно објашњење може се пронаћи у навици да моделе фигура цртају без коришћења прибора за геометрију, што може узроковати појаву оваквих грешака.

У истраживању које су обавили, Гокбулут и Сен (Gokbulut, Sen, 2019) су открили да и учитељи често имају проблем да на исправан и потпун начин формулишу дефиницију појма правоугаоника. Испитаници, учесници истраживања, најчешће су се концентрисали на паралелност и подударност наспрамних страница правоугаоника изостављајући услов за постојањем правих углова. Будући да директно учествују у раду са ученицима, учитељи могу на њих пренети овакво непотпуно поимање појма правоугаоника и учинити да ученици имају проблем да препознају која од датих фигура задовољава све услове потребне да би имала облик правоугаоника.

На финалном тестирању знања након реализације експерименталног програма који је између осталог обухватао садржаје о геометријским телима у простору, одређени број ученика, нарочито оних из контролне групе, показао је да још увек недовољно добро прави дистинкцију између квадрата (фигура у равни) и коцке (тело у простору) (Пример 16).

Пример 16. *Решење задатка препознавања коцке међу датим геометријским фигурама – финално тестирање*

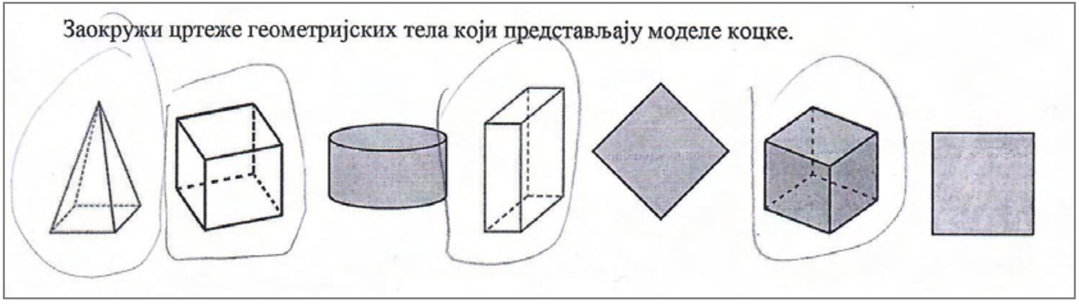


Заокружи цртеже геометријских тела који представљају моделе коцке.

На овом примеру можемо приметити да ученици још увек нису сасвим разумели значење појма квадрата и коцке. Један разлог томе лежи у начину представљања обе фигуре у уџбеницима у две димензије. У прилог неразумевању иде и статичност таквих приказа, јер дводимензионалне репрезентације онемогућавају ученике да упознају све особине коцке. На статичним дводимензионалним приказима ученици не могу практично да провере да ли су ивице коцке међусобно једнаке и на основу тога закључе да су све ивице коцке једнаких дужина. Са друге стране, ученици из експерименталне групе били су у прилици да користе динамичне моделе коцке креиране у софтверу *GeoGebra*. Ови модели давали су ученицима могућност да промене положај коцке, да сагледају стране коцке из различитих углова упознајући њене карактеристике и међусобни однос њених елемената.

Одговори једног дела ученика указују на неоспособљеност да разликују коцку од других рогљастих тела (Пример 17). На основу приказаног одговора може се закључити да је код ученика изграђена свест о геометријским телима у простору, да разликују класу рогљастих од класе облих тела, али не и да међу рогљастим телима издвоје само она облика коцке.

Пример 17. *Решење задатка препознавања коцке међу датим геометријским фигурама – финално тестирање*



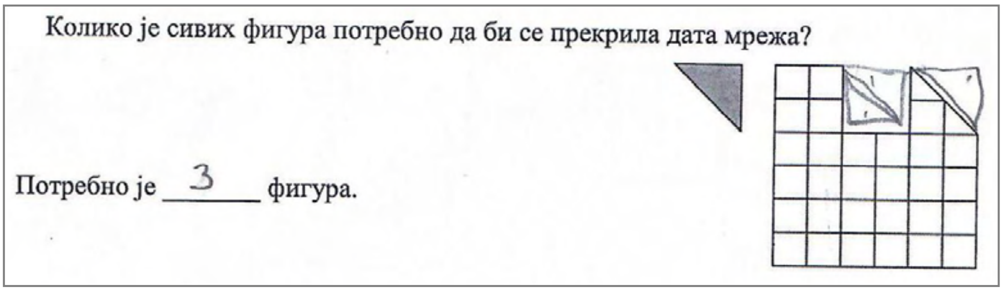
Заокружи цртеже геометријских тела који представљају моделе коцке.

Овакви одговори ученика, међу којима је већина њих из контролне групе, указују да током периода усвајања геометријских садржаја нису имали довољно прилика да манипулишу моделима и тако стекну свест о коцки као геометријском телу у простору. Ученици схватају да је коцка геометријско тело ограничено многоугловима, али не праве разлику да ли је тело ограничено само квадратима, троугловима и квадратима или правоугаоницима. Прихватањем пирамиде као тачног одговора они су такође показали и да нису усвојили колико страна, темена и ивица има коцка.

На основном нивоу постигнућа ученици треба да формирају појам површине фигуре и мерење површине фигуре нестандардним, а затим и стандардним јединицама мере. Међутим, поједина решења другог задатка на основном нивоу постигнућа на иницијалном тесту показују да ученици нису у потпуности усвојили поступак мерења површине објекта поплочавањем (Пример 18).

Пример 18. *Решење задатка мерења површине геометријске фигуре – иницијално тестирање*

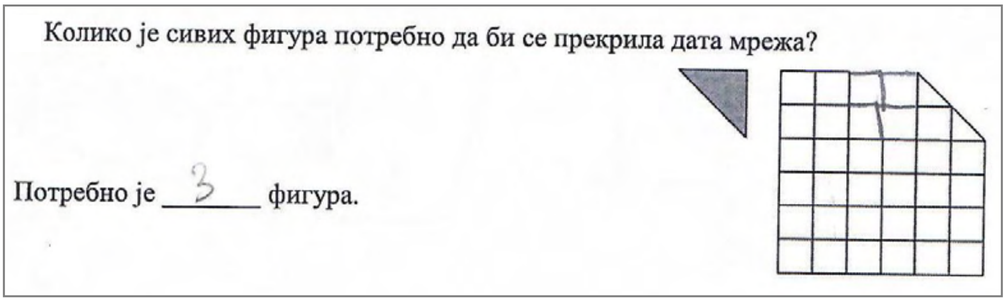
а)



Колико је сивих фигура потребно да би се прекрила дата мрежа?

Потребно је __3__ фигура.

б)



Колико је сивих фигура потребно да би се прекрила дата мрежа?

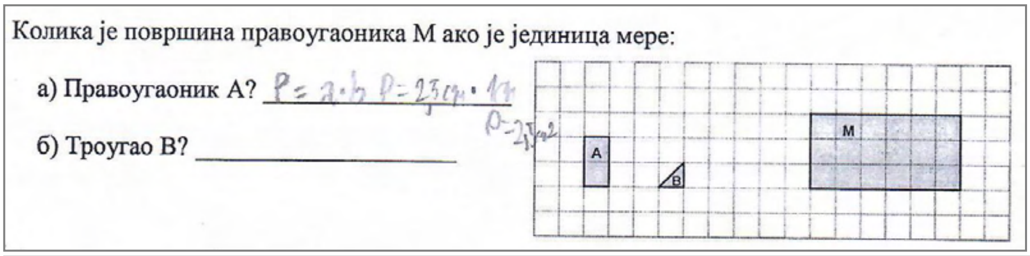
Потребно је 3 фигура.

Поступци којима су ученици погрешно решили задатак указују на начине на које су приступили његовом решавању. У примеру под а) ученици су уместо поплочавања површи приказане фигуре датом јединицом мере разумели да фигуру треба допунити до квадрата. У случају под б) ученици су од дате фигуре формирали конвексни многоугао доцртавањем одређеног броја квадрата и занемарили изглед фигуре која у датом случају представља мерну јединицу. Оба начина водила су добијању погрешног решења, што наводи на закључак да ученици у оквиру трећег разреда нису овладали поступком мерења површине геометријских фигура који се заснива на поплочавању одређене површи различитим задатим геометријским фигурама (правоугаоником, квадратом и троуглом) (*Програм наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања*, 2019).

У Примеру 19 представљени су карактеристични нетачни покушаји решавања задатка са финалног тестирања који је по захтевима одговарао задатку мерења површине геометријске фигуре са иницијалног теста.

Пример 19. *Решење задатка мерења површине правоугаоника – финално тестирање*

а)

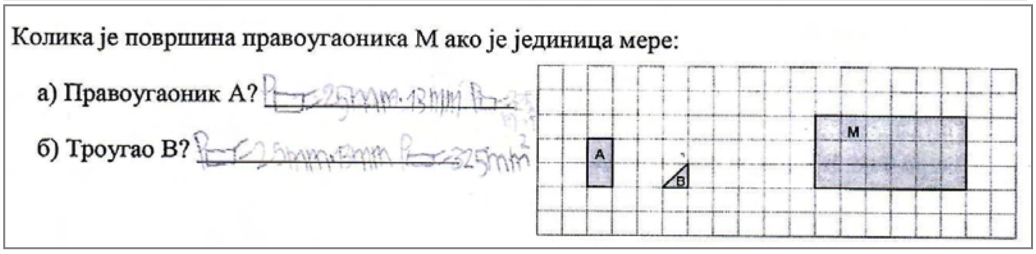


Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А? P = a · b P = 23cm · 17 P = 25cm2

б) Троугао B?

б)



Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

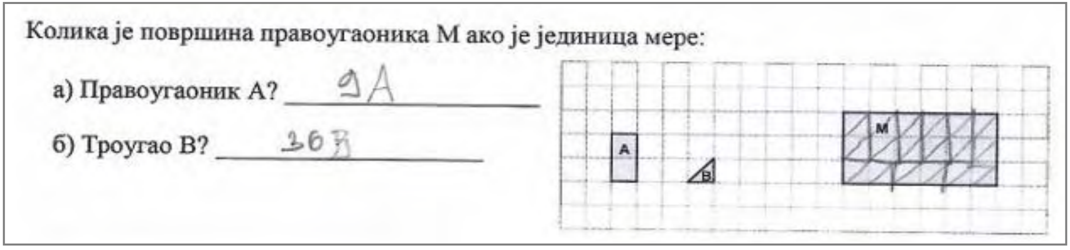
а) Правоугаоник А? P▭ = 25mm · 13mm P▭ = 3

б) Троугао B? P▭ = 25mm · 13mm P▭ = 325mm²

Да би ученици успешно усвојили појам мерења површине потребно је да овладају практичним поступцима поплочавања површи дате фигуре без празнина или преклапања мерних јединица (Stephan, Clements, 2003). Међу ученицима контролне групе њих 51,9% није решило овај задатак на финалном тестирању, при чему су најчешће грешили покушавајући да примене формуле за израчунавање површине (Пример 19 а) и б)). Будући да су у периоду који је претходио финалном тестирању ученици усвојили формуле за израчунавање површине геометријских фигура, евидентна је њихова тежња за употребом формула и када то није потребно. Овакви резултати потврђују да прерана примена формула за израчунавање површине фигура води алгоритмизацији мерења површине без дубљег схватања самог поступка (Зељић, Иванчевић, 2019).

Са друге стране, међу ученицима експерименталне групе није било оних који су задатак покушали да реше употребом формуле за израчунавање површине правоугаоника. У Примеру 20 представљен је поступак којим су ученици најчешће решавали задатак. Из приказаног да се закључити да је употреба *GeoGebra* софтвера током часова помогла ученицима да створе јаснију слику поступка мерења површине поплочавањем. Захваљујући томе, ученици су делили површ фигуре чију је површину требало измерити на фигуре које представљају јединице мере водећи рачуна да не дође до њиховог преклапања.

Пример 20. *Решење задатка мерења површине правоугаоника – финално тестирање*



Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А? 9А

б) Троугао В? 36В

Дати примери решавања задатака на основном нивоу постигнућа указују на чињеницу да су ученици експерименталне групе, код којих су приликом извођења наставе коришћени динамични прикази геометријских фигура, успешнији при решавању задатака овог типа. Овакви закључци у складу су са налазима других аутора. Мартиновски и Мартиновски (Martinovski, Martinovski, 2013) су у својим истраживањима такође потврдили да коришћење софтвера *GeoGebra* помаже ученицима који имају потешкоћа при решавању геометријских проблема у превазилажењу препрека и постизању бољих резултата. И Симболон и Сиахан (Simbolon, Siahaan, 2021) налазе да се математичке способности и број ученика који достижу минимум неопходних знања из области геометрије уз употребу софтверског пакета повећавају те стога препоручују примену софтвера и на другим математичким областима сличних карактеристика.

***

Резултати истраживања показали су да се пажљивим вођењем ученика приликом усвајања садржаја геометрије уз одговарајућу употребу образовног софтвера може позитивно утицати на ученичко разумевање појмова геометријских фигура у равни и простору. Ученици у *GeoGebra* окружењу имају могућност ширег, свеобухватнијег сагледавања геометријских фигура, имају могућност да манипулишу објектима у динамичком окружењу и тако сагледају облик фигура и односе међу страницама у различитим положајима. Ово посебно долази до изражаја када су у питању геометријска тела. Чињеница је да ученици могу да сагледају сва њихова својства на очигледним моделима, али када решавају задатке нису у прилици да их виде онако како их виде када их држе у руци. Овде управо долази до изражаја примена *GeoGebra* софтвера јер ученици упознају облике и манипулишу њима у приказу са којим се могу сусрести и у штампаном облику.

Могућност сагледавања геометријских тела са више аспеката пружа ученицима основу за њихово дубље разумевање и даљу изградњу геометријских појмова. Употреба софтвера чини да се поступак мерења површине поједностави и приближи ученицима, чинећи тако да и ученици који се налазе на основном нивоу постигнућа буду у прилици да остварују боље резултате. У *GeoGebra* окружењу ученици имају прилику да схвате саму суштину поступка мерења површине који се заснива на поплочавању површи. Имају могућност да манипулишу објектима у динамичком окружењу, а такви поступци представљају прелаз од физичког поплочавања површи мерене фигуре фигурама које представљају мерне јединице ка статичним приказима са којима се сусрећу у уџбеницима.

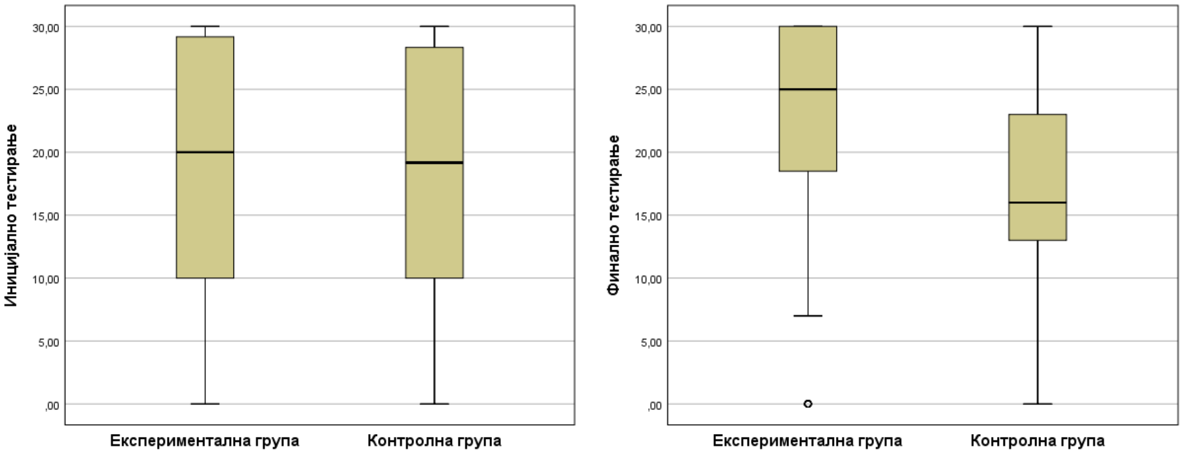
1.1.2. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика на средњем нивоу

Резултати анализе ефеката употребе софтверског пакета на постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије на иницијалном тестирању знања у области геометрије (на средњем нивоу постигнућа) ученика експерименталне (M = 18,94; SD = 10,21) и контролне групе (M = 18,48; SD = 8,70) дати су у Табели 20.

Табела 20. *Дескриптивни показатељи нивоа постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на средњем нивоу*

						95% Confidence Interval for Mean	
		N	M	SD	SDE	Lower Bound	Upper Bound
Иницијално тестирање	Експериментална група	103	18,94	10,21	1,01	16,94	20,93
	Контролна група	104	18,48	8,70	0,85	16,79	20,18
	Укупно	207	18,71	9,46	0,66	17,41	20,01
Финално тестирање	Експериментална група	103	21,88	9,98	0,98	19,93	23,83
	Контролна група	104	16,58	8,42	0,82	14,94	18,21
	Укупно	207	19,22	9,58	0,67	17,90	20,53

Резултати које су ученици остварили на финалном тестирању указују на то да је експериментална група ученика просечно остварила знатно бољи резултат (M = 21,88; SD = 9,98) у поређењу са контролном групом код које можемо уочити приличан пад у односу на иницијално тестирање знања на средњем нивоу постигнућа (M = 16,58; SD = 8,42) (Табела 20). Додатно, графички приказ постигнућа обе групе ученика остварених приликом иницијалног и финалног тестирања знања средњег нивоа приказан је на Графикону 7.



Графикон 7. *Резултати остварени приликом иницијалног и финалног тестирања знања ученика на средњем нивоу*

За испитивање статистичке значајности разлика у постигнућима на средњем нивоу добијених финалним тестирањем знања ученика користили смо двофакторску анализу варијансе. Левенов тест једнакости варијанси потврђује да је на финалном мерењу претпоставка о једнакости варијансе задовољена (F = 0,669; p = 0,886) (Табела 21).

Табела 21. *Левенов тест једнакости варијанси на средњем нивоу постигнућа*

Dependent Variable: Финално тестирање

F	df1	df2	Sig.
0,669	26	166	0,886

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Након што смо уклонили утицаја коваријата (резултат иницијалног тестирања), установили смо да разлика у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе на средњем нивоу постигнућа има карактер статистичке значајности (F = 11,801; p = 0,001) (Табела 22). Вредност парцијалног ета квадрата 0,066 указује на мали утицај варијансе у резултатима финалног тестирања (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). На основу вредности ета квадрата можемо закључити да се 6,6% варијансе у финалном тестирању (на средњем нивоу постигнућа) може објаснити независном променљивом, односно експерименталним програмом који је обухватао примену софтвера приликом усвајања садржаја из области геометрије.

Утицај коваријата (постигнућа ученика на средњем нивоу на иницијалном тестирању) на постигнућа ученика на истом нивоу на финалном тестирању након уклањања утицаја независне променљиве (група) статистички је значајан (F = 5,558; p = 0,014) (Табела 22). Добијени парцијални ета квадрат 0,071 указује на мали утицај варијансе на резултате финалног тестирања знања ученика.

Табела 22. *Анализа коваријансе на средњем нивоу постигнућа*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Финално тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	5355,748[a]	40	133,894	1,638	0,017	0,283
Intercept	18260,751	1	18260,751	223,357	0,000	0,574
Иницијално тестирање	1902,161	22	92,068	5,558	0,014	0,071
Група	964,839	1	964,839	11,801	0,001	0,066
Error	13571,470	166	81,756			
Total	95374,000	207				
Corrected Total	18927,217	206				

a. R Squared = 0,283 (Adjusted R Squared = 0,110)

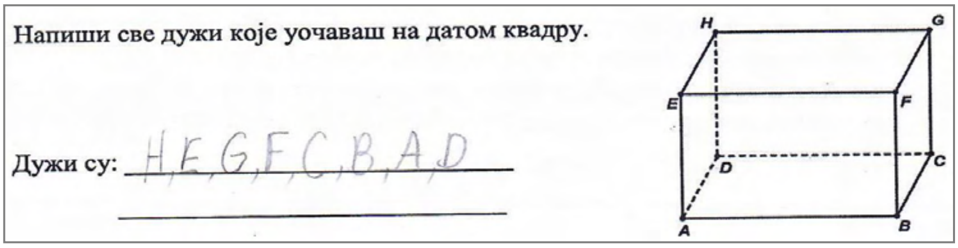
На основу добијених резултата може се уочити да је код ученика који су чинили експерименталну групу дошло до повећања нивоа постигнућа, односно да су остварили боље резултате у односу на иницијално тестирање знања из области геометрије на средњем нивоу. За разлику од њих, ученици контролне групе су приликом решавања задатака на средњем нивоу образовних постигнућа остварили лошије резултате него на иницијалном тестирању.

Зарад бољег разумевања околности које су иницирале овакве резултате осврнимо се на карактеристичне грешке које су ученици правили приликом решавања задатака на средњем нивоу постигнућа. Сагледавање резултата рада ученика путем анализе најчешћих грешака помоћи ће да створимо јаснију представу о томе због чега је приликом финалног тестирања дошло до пада у постигнућима ученика који су садржаје геометрије усвајали класичним путем у односу на ученике експерименталне групе код којих је током часова обраде и утврђивања садржаја геометрије централно место заузимала примена софтвера *GeoGebra*.

На иницијалном тестирању желели смо да утврдимо у којој мери су ученици у стању да препознају и уоче међусобне односе геометријских појмова. Будући да су се ученици претходно упознали са појмом дужи, намера нам је била да проверимо да ли су у стању да именују дужи које се налазе у различитим односима. Дате дужи заузимале су такве положаје да представљају ивице квадра, а од ученика је тражено да напишу све дужи које уочавају. Међу грешкама које су ученици чинили решавајући поменути задатак најфреквентнија су два типа грешака. Први тип, приказан у Примеру 21, подразумевао је да су ученици као решење задатка наводили темена квадра. Премда појам дужи упознају као део праве линије ограничен са две тачке већ у првом разреду, овакве грешке показују да и у четвртом разреду велики број ученика није у стању да нотира дуж навођењем двеју крајњих тачака. Навођењем појединачних тачака, ученици су показали да су делимично разумели налог, али не и да се дуж записује уз помоћ њених крајњих тачака.

Пример 21. *Решење задатка уочавања датих дужи – иницијално тестирање*

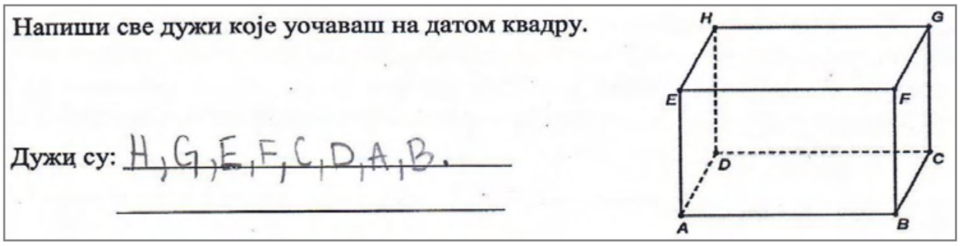
а)



Напиши све дужи које уочаваш на датом квадру.

Дужи су: H, E, G, F, C, B, A, D

б)

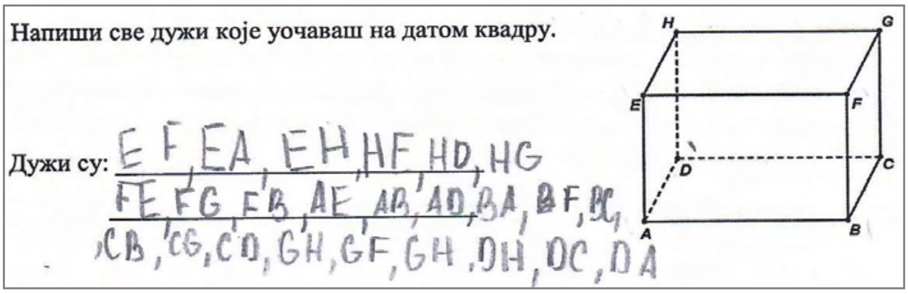


Напиши све дужи које уочаваш на датом квадру.

Дужи су: H, G, E, F, C, D, A, B.

Други тип грешака односио се на недовољно развијену свест ученика о појму дужи, да се дуж нотира навођењем њених крајњих тачака, без обзира на поредак тачака. Знатан број тестираних ученика (12,56%) уместо дванаест дужи, записао је двадесет четири (Пример 22). Ова грешка показује да ученици, на пример, дужи *AB* и *BA* доживљавају као две различите дужи, иако је у питању једна иста дуж записана на два различита начина. Тиме су показали да, иако су се са означавањем дужи сусрели такође у првом разреду, и даље нису довољно добро разумели појам дужи и начин њеног обележавања.

Пример 22. *Решење задатка уочавања датих дужи – иницијално тестирање*

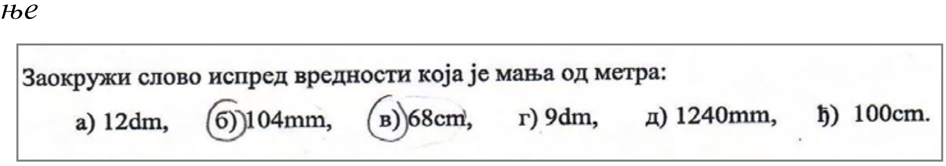


Напиши све дужи које уочаваш на датом квадру.

Дужи су: EF, EA, EH, HF, HD, HG
FE, FG, FB, AE, AB, AD, BA, BF, BC,
CB, CG, CD, GH, GF, GH, DH, DC, DA

Мерне јединице за мерење дужине ученици су усвојили у другом разреду основне школе (метар, дециметар и центиметар), док их у трећем разреду проширују појмовима милиметар и километар. Решавањем другог задатка са средњег нивоа постигнућа на иницијалном тестирању показало се да велики број ученика има проблем да у четвртом разреду претвори јединице за мерење дужине и изврши њихово поређење. Оно што посебно изненађује јесте да су најчешће грешили сматрајући да дужина од 9 dm није мања од једног метра (Пример 23). Овакву грешку начинило је 16,42% обе групе ученика на иницијалном тестирању знања.

Пример 23. *Решење задатка уочавања односа датих величина – иницијално тестирање*



Заокружи слово испред вредности која је мања од метра:

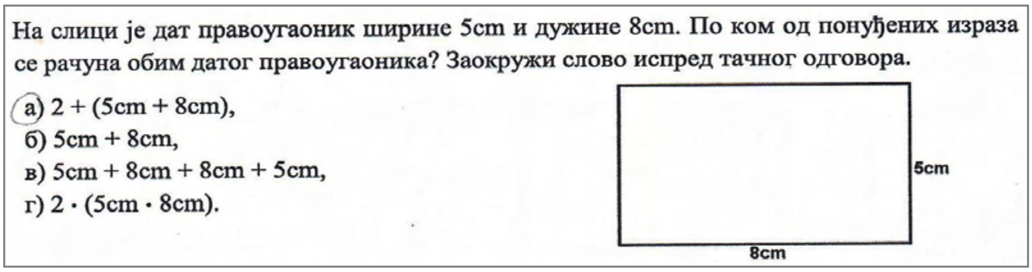
а) 12dm, [✓ б)] 104mm, [✓ в)] 68cm, г) 9dm, д) 1240mm, ђ) 100cm.

Овакви резултати указују на недовољно адекватан приступ увођењу мерних јединица и изостанак визуелних репрезентација. Мали број примера у којима су односи међу мерним јединицама реално приказани чини да ученици односе меморишу без јасних представа, због чега нису у стању да изврше превођење датих величина у исте мерне јединице и њихово поређење. Све ово за последицу има да ученици нису у довољној мери овладали односима јединица мере за дужину, што представља битан основ каснијем учењу мерних јединица за површину и запремину простора.

Изразита потреба за очигледношћу огледа се у немогућности ученика да, и у случају када је приказан правоугаоник са датим дужинама страница, са сигурношћу одреде израз којим се израчунава његов обим (Пример 24).

Пример 24. *Решење задатка израчунавања обима правоугаоника – иницијално тестирање*

а)

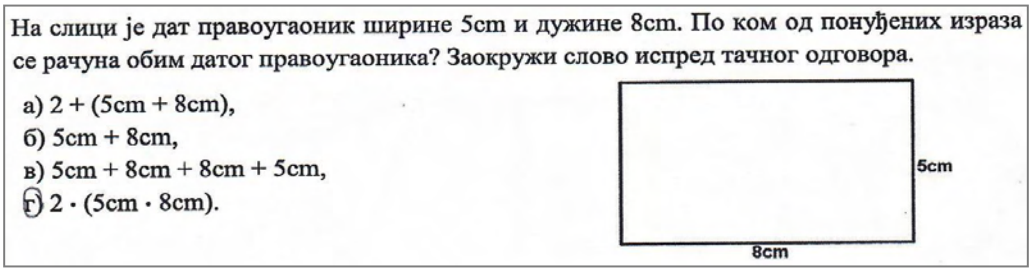


На слици је дат правоугаоник ширине 5cm и дужине 8cm. По ком од понуђених израза се рачуна обим датог правоугаоника? Заокружи слово испред тачног одговора.

[✓ а)] 2 + (5cm + 8cm),
б) 5cm + 8cm,
в) 5cm + 8cm + 8cm + 5cm,
г) 2 · (5cm · 8cm).

5cm
8cm

б)



На слици је дат правоугаоник ширине 5cm и дужине 8cm. По ком од понуђених израза се рачуна обим датог правоугаоника? Заокружи слово испред тачног одговора.

а) 2 + (5cm + 8cm),
б) 5cm + 8cm,
в) 5cm + 8cm + 8cm + 5cm,
[✓ г)] 2 · (5cm · 8cm).

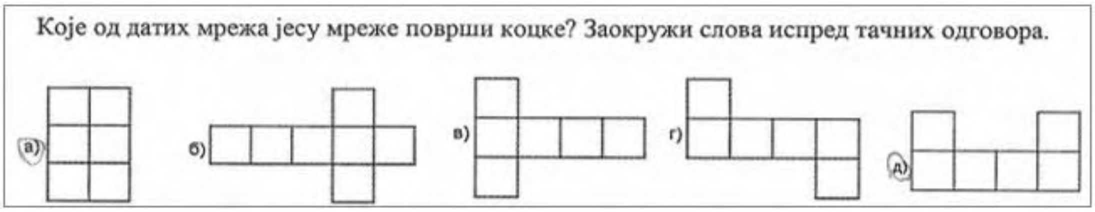
5cm
8cm

Велики проценат ученика успешно је дао одговор на питање у задатку (67,63%), али са друге стране знатан је и број оних ученика који сматрају да је тачан одговор под а) или под г) (укупно 22,70%). Избором израза под а) или под г) ученици су показали да нису у довољној мери овладали појмом обима и поступком његовог израчунавања (Пример 24 а) и б)).

Са појмом обима ученици се први пут сусрећу у другом разреду основне школе. На том узрасту проблем одређивања обима фигуре своди се на графичко надовезивање дужи након чега долази до сабирања мерних бројева дужина страница те фигуре. У трећем разреду ученици обим фигуре рачунају применом обрасца за израчунавање обима. Са увођењем обрасца, у највећем броју случајева престаје се са коришћењем визуелних репрезентација, а од ученика се очекује да меморишу образац и примењују га у одговарајућим ситуацијама. Управо избор израза под а) и под г) у Примеру 24 то и показује. Ученици су се одлучивали за ове одговоре због њиховог сличног изгледа са обрасцем $O = 2 \cdot (a + b)$, притом занемарујући знаке рачунских операција. Скоро четвртина ученика обе групе није у одговору 5 cm + 8 cm + 8 cm + 5 cm препознала поступак који се заснива на сабирању мерних бројева дужина страница правоугаоника већ се фокусирала на изразе који нотацијом подсећају на образац. Овакви налази поклапају се са резултатима истраживања Виги и Марчини (Vighi, Marchini, 2011) који појаву проблема одређивања обима везују управо за рано учење обрасца за његово израчунавање.

Насупрот резултатима иницијалног тестирања, анализом радова ученика на финалном тестирању можемо уочити напредак када је у питању препознавање и уочавање међусобних односа геометријских појмова и препознавање мреже коцке међу датим фигурама. Овакав напредак евидентан је нарочито међу ученицима који су чинили експерименталну групу и код којих је приликом рада коришћен софтвер *GeoGebra*. Наиме, док је 9,61% ученика контролне групе сматрало да фигуре под а) или под д) у Примеру 25 одговарају мрежи коцке, овакву грешку није начинио ниједан ученик експерименталне групе.

Пример 25. *Решење задатка уочавања мреже коцке – финално тестирање*

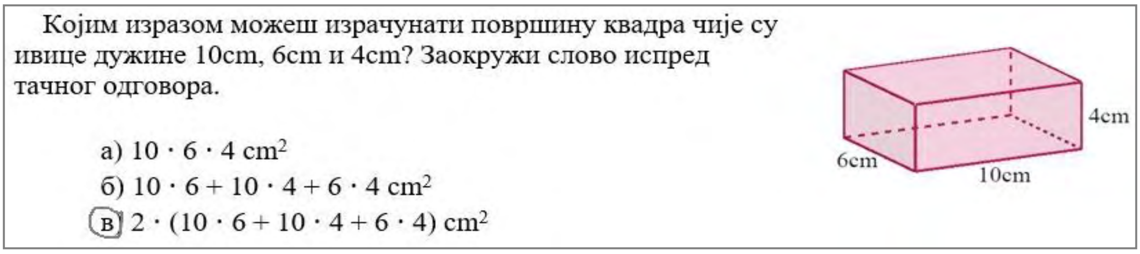


Које од датих мрежа јесу мреже површи коцке? Заокружи слова испред тачних одговора.

Просечно бољи резултати ученика експерименталне групе у поређењу са ученицима контролне групе могу се довести у везу са бројним могућностима визуелизације појма мреже коцке уз помоћ софтвера. Захваљујући *GeoGebra* софтверу ученици су били у прилици да сагледају које фигуре могу представљати мрежу коцке, па нису имали проблем да уоче да су у Примеру 25 тачни одговори под в) и г) (47,57%), док је само 25,96% ученика контролне групе дало тачан одговор на питање у истом задатку. Велики број ученика контролне групе одлучио се за одговор под б) занемарујући основни услов да се мрежа коцке састоји од шест подударних квадрата (Jeon, 2009). Ово наводи на закључак да је у раду са ученицима контролне групе дошло до појаве дисконтинуитета при преласку са тродимензионалног на дводимензионални приказ, односно да не доводе у директну везу број страна коцке са квадратима који чине њену мрежу.

У задатку са датим квадром на финалном тестирању знања (Пример 26) ученици је требало да одреде којим се од понуђених израза може представити површина квадра када су подаци дати у истим мерним јединицама. Највећи број ученика са успехом је решио овај задатак (80,67%), препознајући међу датим изразима образац којим се израчунава површина квадра. Од ученика који су тачно урадили задатак највише је оних из експерименталне групе, што потврђује предност коју пружа коришћење образовног софтвера у настави. Мали број ученика ове групе који су изабрали одговор под а) или б) показује да су модели креирани у софтверу допринели да лакше визуелизују појам квадра, боље упознају карактеристике и овладају поступком израчунавања његове површине.

Пример 26. *Решење задатка израчунавања површине квадра – финално тестирање*



Којим изразом можеш израчунати површину квадра чије су ивице дужине 10cm, 6cm и 4cm? Заокружи слово испред тачног одговора.

а) $10 \cdot 6 \cdot 4$ cm^2
б) $10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4$ cm^2
[✓ в)] $2 \cdot (10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4)$ cm^2

Са резултатима нашег истраживања сагласни су и закључци до којих су у својој студији дошли Мулиган, Прескот, Мичелмор и Аутред, наводећи да је за овладавање појмом површине тродимензионалног геометријског тела неопходно да ученици у довољној мери разумеју формирање мреже површи датог тела (Mulligan, Prescott, Mitchelmore, Outhred, 2005). Будући да је при формирању мреже неопходно обезбедити изразиту очигледност, то је коришћење софтвера *GeoGebra* оправдано са аспекта пружања динамичног приказа поменутог поступка.

***

Резултати истраживања упућују на закључак да је интерактивна визуелна репрезентација помогла ученицима експерименталне групе да боље разумеју садржаје геометрије и да им модел учења уз примену софтвера *GeoGebra* одговара. Вишеструки прикази доступни захваљујући софтверу учинили су да ученицима садржаји буду очигледни и да самим тим дубље разумеју односе геометријских фигура у равни и простору. Овакав начин рада спречио је меморисање образаца без разумевања поступака, пружајући ученицима прилику да активно учествују у изградњи и развоју геометријских појмова и њихових просторних способности.

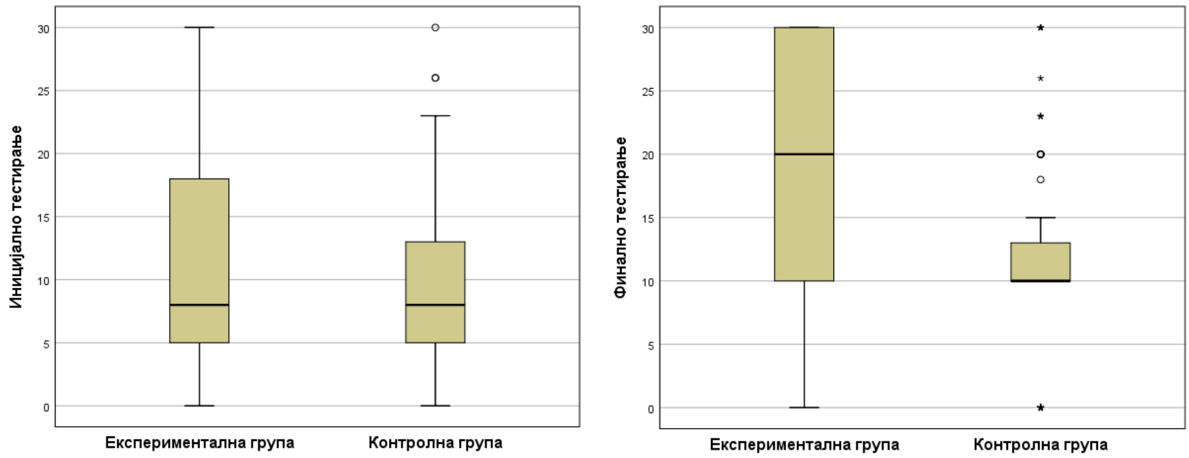
1.1.3. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика на напредном нивоу

На иницијалном тестирању знања у области геометрије на напредном нивоу ученици експерименталне групе просечно су остварили боље резултате (M = 10,96; SD = 8,27) у односу на контролну групу ученика (M = 9,14; SD = 6,54) (Табела 23).

Табела 23. *Дескриптивни показатељи нивоа постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на напредном нивоу*

		N	M	SD	SDE	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound
Иницијално тестирање	Експериментална група	103	10,96	8,27	0,81	9,35	12,58
	Контролна група	104	9,14	6,54	0,64	7,87	10,41
	Укупно	207	10,05	7,49	0,52	9,02	11,07
Финално тестирање	Експериментална група	103	17,98	10,84	1,07	15,86	20,10
	Контролна група	104	11,13	6,88	0,67	9,79	12,47
	Укупно	207	14,54	9,68	0,67	13,21	15,87

На финалном тестирању знања обе групе ученика показале су напредак у односу на иницијално тестирање. Ученици који су чинили експерименталну групу остварили су знатно више просечне резултате (M = 17,98; SD = 10,84), при чему је и контролна група ученика остварила бољи резултат него на иницијалном тестирању (M = 11,13; SD = 6,88) (Табела 23). На Графикону 8 дали смо и графички приказ постигнућа обе групе испитаника на иницијалном и финалном тестирању знања на напредном нивоу.



Графикон 8. *Резултати остварени приликом иницијалног и финалног тестирања знања ученика на напредном нивоу*

За тестирање постојања статистички значајне разлике у постигнућима ученика на напредном нивоу добијених финалним тестирањем користили смо двофакторску анализу варијансе. Коефицијент статистичке значајности Левеновог теста у финалном мерењу већи је од 0,05 (F = 0,923; p = 0,674) и потврђује да претпоставка о једнакости варијансе није нарушена (Табела 24).

Табела 24. *Левенов тест једнакости варијанси на напредном нивоу постигнућа*

Dependent Variable: Финално тестирање

F	df1	df2	Sig.
0,923	32	165	0,674

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Након што смо уклонили утицај коваријата (резултат иницијалног тестирања), установили смо да разлика у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе на напредном нивоу има карактер статистичке значајности (F = 10,859; p = 0,001) (Табела 25). Вредност парцијалног ета квадрата 0,062 указује нам на мали утицај варијансе у резултатима финалног тестирања (Cohen, 1988, према Pallant, 2011), док тумачењем добијеног ета квадрата закључујемо да се 6,2% варијансе у финалном тестирању (на напредном нивоу постигнућа) може објаснити утицајем независне променљиве (експерименталним програмом).

Посматрањем утицаја коваријата који чине постигнућа ученика на напредном нивоу у оквиру иницијалног тестирања на постигнућа ученика на финалном тестирању на истом нивоу након уклањања утицаја независне променљиве (група), добија се статистички значајна разлика (F = 1,845; p = 0,011) (Табела 25). Вредност парцијалног ета квадрата је 0,232 што представља умерени утицај варијансе у резултатима финалног тестирања.

Табела 25. *Анализа коваријансе на напредном нивоу постигнућа*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Финално тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	7268,893[a]	41	177,290	2,433	0,000	0,377
Intercept	18144,683	1	18144,683	248,981	0,000	0,601
Иницијално тестирање	3630,040	27	134,446	1,845	0,011	0,232
Група	791,351	1	791,351	10,859	0,001	0,062
Error	1482,303	13	114,023			
Total	12024,508	165				
Corrected Total	63062,000	207				

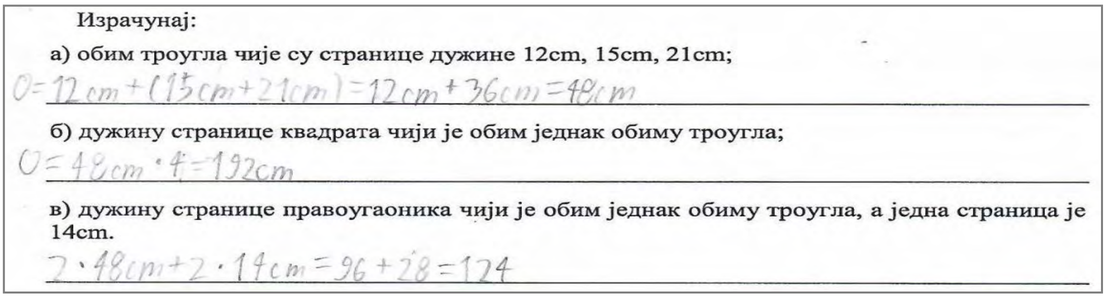
a. R Squared = 0,377 (Adjusted R Squared = 0,222)

На основу резултата иницијалног и финалног тестирања знања ученика можемо закључити да је и код ученика експерименталне и ученика контролне групе дошло до побољшања постигнућа на напредном нивоу. Ученици који су садржаје геометрије усвајали уз коришћење софтверског пакета *GeoGebra* током трајања наставе остварили су значајан напредак у постигнућима у односу на ученике контролне групе.

Како бисмо боље разумели околности које су довеле до поменутих разлика у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе осврнућемо се и на најфреквентније грешке које су ученици правили приликом решавања задатака са напредног нивоа. На тај начин моћи ћемо да стекнемо бољи увид у то како ученици размишљају и решавају проблеме везане за израчунавање обима и површине геометријских фигура у равни и простору који су највећим делом чинили задатке поменутог нивоа. Указаћемо и на најучесталије поступке решавања ученика, што нам може помоћи да закључимо у којој мери и у којим аспектима је софтвер *GeoGebra* утицао на побољшање постигнућа.

Први задатак напредног нивоа постигнућа на иницијалном тестирању знања односио се на поступак израчунавања обима троугла, квадрата и правоугаоника када су подаци дати у истим мерним јединицама. Велики број ученика у обе групе испитаника није имао проблем да израчуна обим троугла датих дужина страница, али се број ученика знатно смањио када је требало извршити реверзибилну операцију и на основу вредности обима квадрата и правоугаоника израчунати дужину њихових страница (Пример 27).

Пример 27. *Решење задатка израчунавања обима троугла, квадрата и правоугаоника – финално тестирање*



Израчунај:

а) обим троугла чије су странице дужине 12cm, 15cm, 21cm;

O=12 cm+(15cm+21cm)=12cm+36cm=48cm

б) дужину странице квадрата чији је обим једнак обиму троугла;

O=48cm·4=192cm

в) дужину странице правоугаоника чији је обим једнак обиму троугла, а једна страница је 14cm.

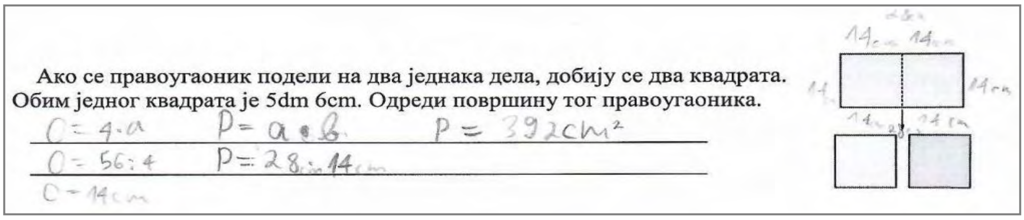
2·48cm+2·14cm=96+28=124

Навикнути да најчешће на основу датих података израчунавају обим фигура, ученици су недовољно пажње посветили разумевању налога у примерима под б) и в) и обим троугла узимали за страницу квадрата, односно правоугаоника. Један од разлога може се наћи у чињеници да ученици још увек не повезују на исправан начин дужину страница фигуре са дужином дужи која је једнака обиму фигуре. Ученици их посматрају одвојено и након увођења обрасца за израчунавање обима заборављају на поступак надовезивања дужи на којем се заснива мерење обима.

Задатак одређивања површине правоугаоника састављеног од два подударна квадрата на финалном тесту захтевао је од ученика управо да на основу датог обима најпре израчунају дужину његове странице (Пример 28).

Пример 28. *Решење задатка израчунавања површине правоугаоника – финално тестирање*

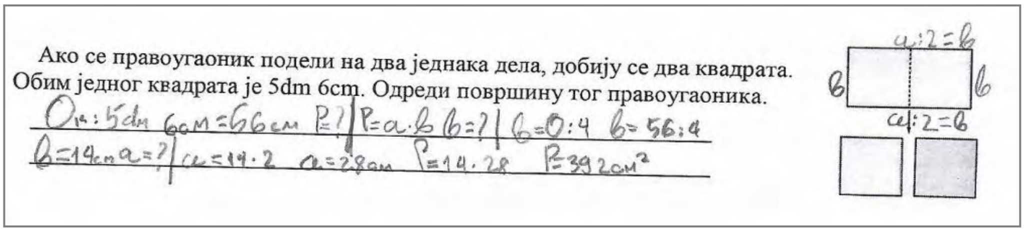
а)



Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 5dm 6cm. Одреди површину тог правоугаоника.

O = 4·a P = a • b P = 392cm²
O = 56 : 4 P = 28cm 14cm
O = 14cm

б)



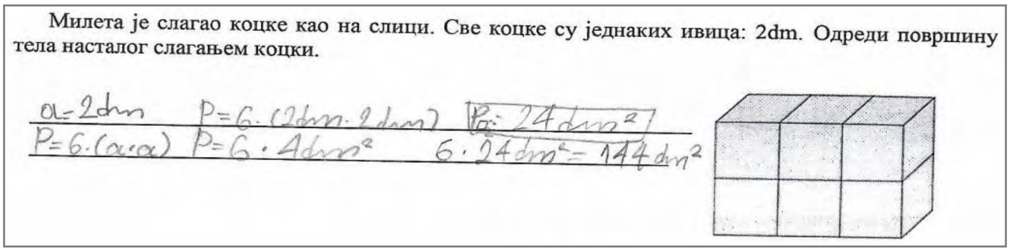
Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 5dm 6cm. Одреди површину тог правоугаоника.

Oк : 5dm 6cm = 56cm P=? | P = a · b b = ? | b = O : 4 b = 56 : 4
b = 14cm a = ? | a = 14 · 2 a = 28cm P = 14 · 28 P = 392cm²

На основу анализе радова ученика можемо приметити да су, за разлику од иницијалног, на финалном тестирању ученици били знатно успешнији приликом одређивања дужине странице квадрата на основу датог обима. Велики број ученика при решавању је користио графички приказ правоугаоника дат уз задатак како би означио односе међу величинама и елементе потребне за израчунавање површине (Пример 28 а) и б)). Међу ученицима који су користили графички приказ знатно је већи број оних из експерименталне групе, што указује да је начин рада у оквиру експерименталног програма допринео да ученици теже визуелизацији проблема. Имајући на уму природну потребу ученика млађег школског узраста за очигледношћу и да је већина задатака реализованих на часовима математике у експерименталној групи била поткрепљена графичким приказима у софтверу *GeoGebra*, овакав приступ решавању проблема не изненађује.

Графички приказ тела насталог слагањем коцки дат је и уз задатак у којем је требало израчунати површину квадра састављеног од шест подударних коцки (Пример 29). Иако је уз задатак приказан и изглед тела састављеног од коцки дате дужине ивица, утисак је да одређени број ученика то није схватио као једну врсту додатне подршке при решавању задатка.

Пример 29. *Решење задатка израчунавања површине квадра – финално тестирање*



Милета је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица: 2dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

$a=2dm$ $P=6\cdot(2dm\cdot 2dm)$ $\boxed{P_\square = 24dm^2}$

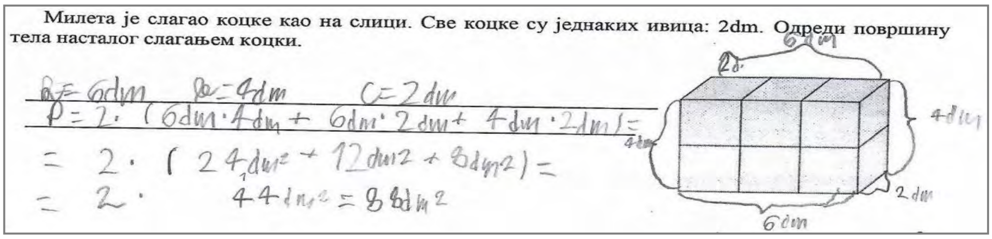
$P=6\cdot(a\cdot a)$ $P=6\cdot 4dm^2$ $6\cdot 24dm^2=144dm^2$

На основу грешке коју су учестало правили, можемо закључити да су адитивну карактеристику површине фигура у равни ученици преносили и на површину геометријских тела. Ученици су најпре одређивали површину једне од коцки из којих се састојао квадар, а затим добијену вредност површине множили са шест како би одредили површину целог квадра. Карактеристично је да је ову грешку поновило 27,88% ученика контролне групе, док је исту грешку начинило само 6,79% ученика одељења у којима је спроведен експериментални програм.

Да би решио исти задатак, један део ученика искористио је сам графички приказ квадра, у оквиру њега изразио односе и одредио тачно решење (Пример 30 а) и б)).

Пример 30. *Решење задатка израчунавања површине квадра – финално тестирање*

а)



Милета је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица: 2dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

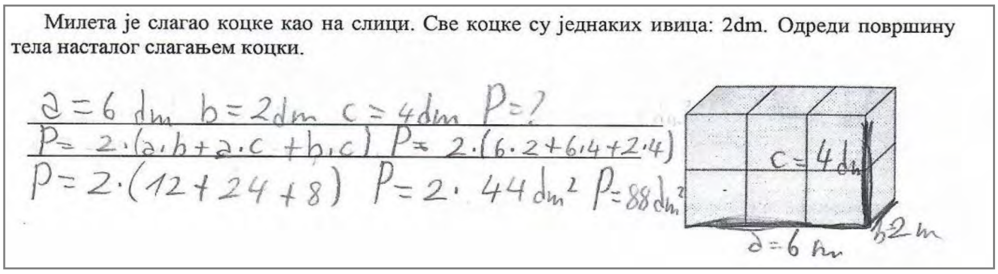
$a=6dm$ $b=4dm$ $c=2dm$

$P=2\cdot(6dm\cdot 4dm+6dm\cdot 2dm+4dm\cdot 2dm)=$

$=2\cdot(24dm^2+12dm^2+8dm^2)=$

$=2\cdot 44dm^2=88dm^2$

б)



Милета је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица: 2dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

$a=6dm$ $b=2dm$ $c=4dm$ $P=?$

$P=2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)$ $P=2\cdot(6\cdot 2+6\cdot 4+2\cdot 4)$

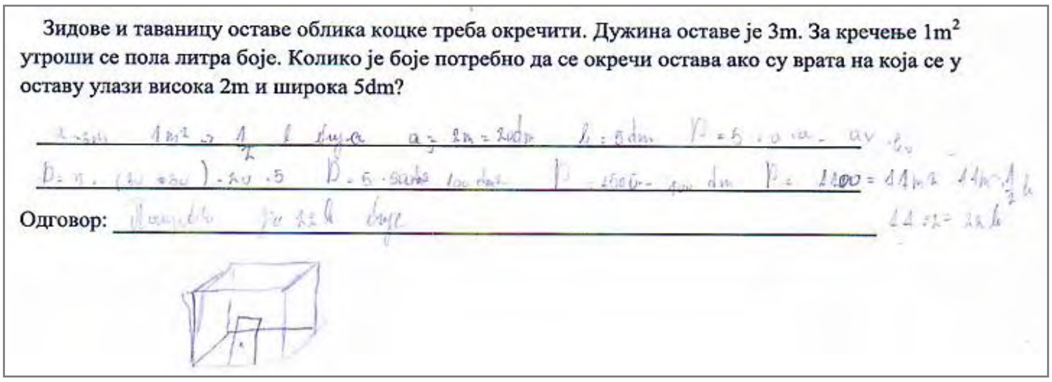
$P=2\cdot(12+24+8)$ $P=2\cdot 44dm^2$ $P=88dm^2$

За разлику од ученика који су грешили множећи површину једне коцке са шест, ученици који су користили графички приказ квадра дат уз задатак довели су у везу дужине ивица коцке и димензије квадра потребне за израчунавање површине. Слику квадра ученици су искористили ради потпунијег сагледавања односа међу познатим и непознатим вредностима у задатку и тако дошли до тачног решења. Овакво запажање у складу је са налазима Кожевникова и сарадника који сугеришу да „ученици са развијеним способностима просторне визуелизације имају тенденцију да кодирају и обрађују слике аналитички, део по део, користећи просторне односе за распоређивање и анализу компонената” (Kozhevnikov, Kosslyn, Shephard, 2005: 723).

У последњем задатку напредног нивоа на финалном тестирању изражена је тенденција ученика експерименталне групе за визуелизацијом проблема (Пример 31). Како уз задатак није постојала графичка репрезентација, ученици који су током часова реализације садржаја геометрије користили моделе креиране у софтверу *GeoGebra* показују тежњу ка визуелном приказу проблемске ситуације.

Пример 31. *Решење задатка израчунавања површине коцке – финално тестирање*

а)



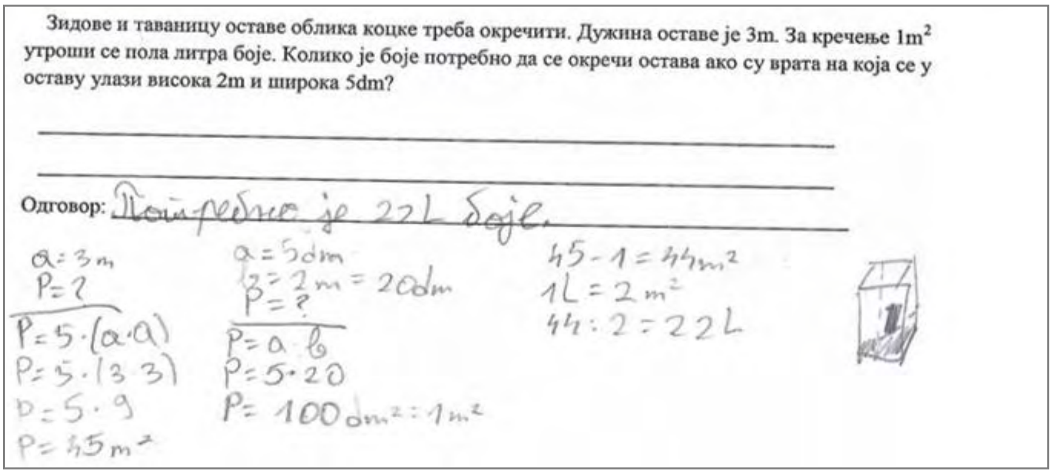
Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење 1m^2 утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

$a=3m$ $1m^2 \rightarrow \frac{1}{2}$ l боје $a=2m=20dm$ $b=5dm$ $P=5\cdot a\cdot a - a\cdot b$

$P=5\cdot(30\cdot 30)-20\cdot 5$ $P=5\cdot 900-100dm$ $P=4500-100dm$ $P=4400=44m^2$ $44m^2\cdot\frac{1}{2}$ l

Одговор: Потребно је 22l боје $44:2=22$l

б)



Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење 1m^2 утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

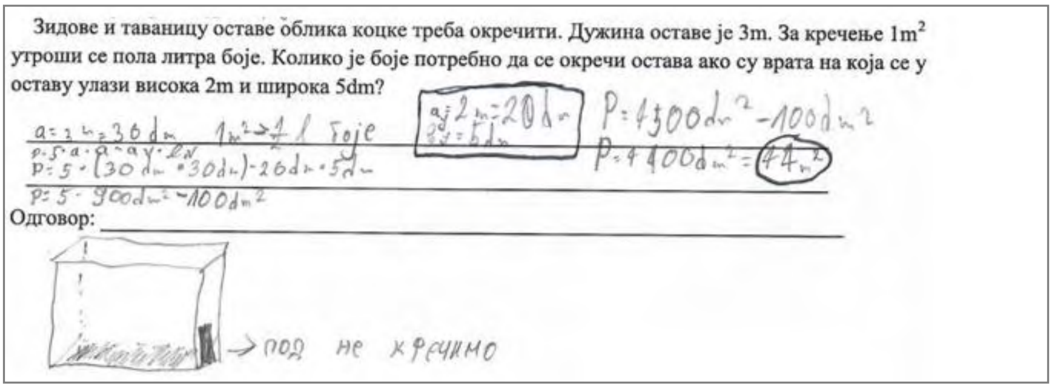
Одговор: Потребно је 22L боје.

$a=3m$
$P=?$
$P=5\cdot(a\cdot a)$
$P=5\cdot(3\cdot 3)$
$P=5\cdot 9$
$P=45m^2$

$a=5dm$
$b=2m=20dm$
$P=?$
$P=a\cdot b$
$P=5\cdot 20$
$P=100dm^2=1m^2$

$45-1=44m^2$
$1L=2m^2$
$44:2=22L$

в)



Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење 1m^2 утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

$a=3m=30dm$ $1m^2 \rightarrow \frac{1}{2}$ l боје

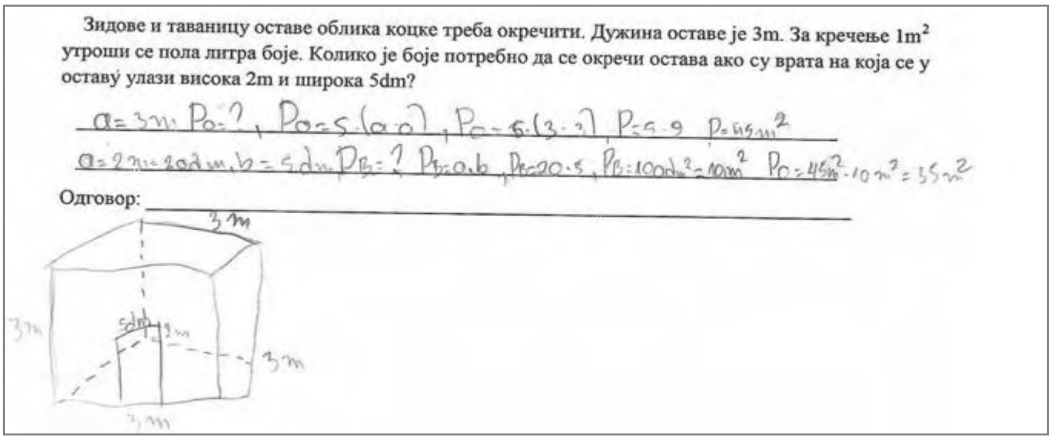
$\boxed{a=2m=20dm \quad b=5dm}$

$P=5\cdot a\cdot a - a\cdot b$
$P=5\cdot(30dm\cdot 30dm)-20dm\cdot 5dm$
$P=5\cdot 900dm^2-100dm^2$

$P=4500dm^2-100dm^2$
$P=4400dm^2=\boxed{44m^2}$

Одговор:

г)



Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење 1m^2 утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

$a=3m$, $P_O=?$, $P_O=5\cdot(a\cdot a)$, $P_O=5\cdot(3\cdot 3)$, $P=5\cdot 9$ $P=45m^2$

$a=2m=20dm$, $b=5dm$, $P_B=?$ $P_B=a\cdot b$, $P_B=20\cdot 5$, $P_B=100dm^2=10m^2$ $P_O=45m^2-10m^2=35m^2$

Одговор:

Потребе ученика експерименталне групе за визуелним приказом проблема показују се оправданим, будући да их је 45,63% у целости тачно урадило задатак, у односу на 7,69% ученика контролне групе који су имали успеха при његовом решавању. Међу ученицима експерименталне групе који су решавали задатак, један део њих користио је цртеже како би једноставније уочио односе међу величинама, извршио повезивање познатих и непознатих вредности и открио начин на који могу доћи до решења. Са друге стране, ниједан ученик контролне групе није покушао да илуструје задати проблем уз помоћ цртежа. То говори о начину рада примењеном у оквиру експерименталног програма, током којег су ученици имали прилике да уз помоћ софтвера *GeoGebra* прате визуелне приказе проблема који су решавани на часовима математике.

***

Резултати до којих смо истраживањем дошли недвосмислено показују да су графички прикази сложених математичких проблема помогли ученицима да лакше изврше њихово декомпоновање, јасније уоче односе међу познатим и непознатим вредностима у задатку и на једноставнији начин дођу до решења. Ученици који су током трајања експерименталног програма имали прилику да континуирано користе динамичне моделе креиране у *GeoGebra* софтверу били су ефикаснији у решавању ових проблема, између осталог и због чињенице да су чешће прибегавали њиховој визуелизацији.

Резултати нашег истраживања показују и да је до највеће промене у просечним постигнућима дошло на напредном нивоу, што се може образложити чињеницом да се предности софтвера *GeoGebra* најбоље уочавају када је динамични приказ сложених проблема у питању. Такви прикази превазилазе могућности манипулисања очигледним дидактичким средствима којима је могуће представити једноставне односе и то коначан број случајева. Статични прикази проблема пружају ученицима ограничен број информација које им могу бити од помоћи приликом решавања проблема, док са друге стране софтвер пружа бројне могућности трансформације приказа чинећи на тај начин проблем лакше решивим. Могућност ротације модела креираних у софтверу помаже ученицима да уоче скривене односе међу објектима, карактеристике које на први поглед нису лако уочљиве.

Све предности које доноси употреба софтвера чине оправданом чињеницу да са порастом нивоа сложености задатака долази до све значајнијих ефеката његове примене у настави. Док је једноставне односе геометријских објеката могуће лако представити манипулисањем очигледним дидактичким средствима, сложене геометријске проблеме који укључују бројне услове са успехом је могуће представити тек коришћењем једног оваквог пакета.

1.2. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у зависности од пола

Истраживањем смо, између осталог, желели испитати остварује ли употреба софтвера *GeoGebra* у садржајима геометрије у почетној настави математике подједнак утицај на постигнућа ученика оба пола. С тим у вези, спровели смо иницијално тестирање знања ученика на којем су девојчице у контролној групи (M = 44,54; SD = 15,16) постигле боље резултате од дечака (M = 41,51; SD = 16,08), док је у експерименталној групи разлика у постигнућима девојчица (M = 45,22; SD = 17,22) и дечака (M = 44,81; SD = 19,60) нешто умеренија (Табела 26). На основу резултата можемо закључити да су девојчице у експерименталној групи биле најуспешније на иницијалном тестирању, док су дечаци у контролној групи имали најслабије резултате.

Табела 26. *Постигнућа ученика на иницијалном и финалном тестирању у зависности од пола*

Група	Пол	Иницијално тестирање		Финално тестирање		N
		Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation	
Експериментална група	Мушки	44,8086	19,60003	51,8200	28,36187	50
	Женски	45,2230	17,21976	58,2075	23,26880	53
	Укупно	45,0218	18,32371	55,1068	25,93730	103
Контролна група	Мушки	41,5060	16,07915	40,0000	19,84823	43
	Женски	44,5411	15,15696	43,1475	18,68318	61
	Укупно	43,2863	15,54042	41,8462	19,14166	104
Укупно	Мушки	43,2816	18,03821	46,3548	25,36501	93
	Женски	44,8582	16,07951	50,1491	22,16800	114
	Укупно	44,1499	16,96344	48,4444	23,67448	207

Након реализације експерименталног програма извршено је финално тестирање знања ученика обе групе. Ученици оба пола у експерименталној групи остварили су знатно више резултате у односу на ученике контролне групе (Табела 26), и то: дечаци (M = 51,82; SD = 28,36), девојчице (M = 58,21; SD = 23,27). Истовремено, ученици контролне групе постигли су следеће резултате: дечаци (M = 40,00; SD = 19,85), девојчице (M = 43,15; SD = 18,68). Видимо да су и на финалном тестирању девојчице из експерименталне групе постигле просечно боље резултате у односу на дечаке и да су просечно више напредовале (оствариле су бољи резултат за 12,98 поена, док су дечаци остварили напредак од 7,02 поена). Може се уочити да су ученици оба пола у контролној групи имали пад у просечним резултатима у односу на иницијално тестирање.

За утврђивање статистичке значајности разлике у постигнућима ученика и провере доприноси ли *GeoGebra* софтвер остваривању бољих резултата код ученика посматрано у односу на пол употребили смо двофакторску анализу коваријансе. Како је за њену примену потребно проверити да ли су испуњене све претпоставке двофакторске анализе варијансе, најпре смо испитали хомогеност варијансе (Табела 27). Вредност Левеновог теста (F(3,203) = 4,621; p = 0,061) потврђује да је задовољена једнакост варијансе и да су испуњени сви услови потребни за анализу коваријансе.

Табела 27. *Левенов тест хомогености варијансе*

Dependent Variable: Финално тестирање

F	df1	df2	Sig.
4,621	3	203	0,061

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Резултати двофакторске анализе коваријансе (Табела 28) указују да, ако се утицај коваријата (иницијалног тестирања) узме у обзир, утицај интеракције групе (експерименталне, контролне) и пола ученика није статистички значајан (F(1,202) = 0,438; p = 0,509). То имплицира да се претпоставка према којој ученицима једног пола одговара одређени начин рада (примена софтвера или класичан начин рада) одбацује. Вредност парцијалног ета квадрата је прилично мала, свега 0,002, што указује да је утицај врло мали. Тек 0,2% варијансе у финалном тестирању објашњено је интеракцијом независних променљивих исказаних групом и полом ученика.

Табела 28. *Двофакторска анализа коваријансе*

Dependent Variable: Финално тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	16780,440[a]	4	4195,110	8,588	0,000	0,145
Intercept	30217,460	1	30217,460	61,857	0,000	0,234
Иницијално тестирање	6381,098	1	6381,098	13,062	0,000	0,061
Група	8297,613	1	8297,613	16,986	0,000	0,078
Пол	896,254	1	896,254	1,835	0,177	0,009
Група * Пол	214,058	1	214,058	0,438	0,509	0,002
Error	98678,672	202	488,508			
Total	601260,000	207				
Corrected Total	115459,111	206				

a. R Squared = 0,145 (Adjusted R Squared = 0,128)

Ако посматрамо коваријансу добијену приликом финалног тестирања између група ученика формираних на основу пола, закључујемо да (уколико се изостави утицај коваријата) не постоји статистички значајна разлика у постигнућима ученика (F(1,202) = 1,835; p = 0,177), док парцијални ета квадрат 0,009 указује да се свега 0,9% варијансе објашњава полом, што представља врло мали утицај. Ради додатне сигурности у исправност добијених резултата, у Прилогу 10 дат је приказ коригованих средњих вредности зависне променљиве (утицај коваријата статистички је уклоњен) за сваку групу и засебно за сваку од независних променљивих, а затим и обједињено. У Прилогу 10, на дијаграму графички су приказане кориговане средње вредности добијених резултата у зависности од пола ученика на иницијалном и финалном тестирању. На овом дијаграму јасно је уочљиво да не постоји интеракција између променљивих, односно да ученици оба пола у експерименталној групи просечно постижу знатно више резултате у односу на ученике контролне групе.

Можемо закључити да примена софтверског пакета *GeoGebra* доприноси повећању нивоа постигнућа ученика без обзира на њихов пол. Представљени резултати јасно указују на то да ученици оба пола на сличан начин реагују на уведени експериментални програм и да приликом његове припреме и реализације није потребно водити рачуна о полу ученика. Такође, можемо закључити да су на иницијалном и на финалном тестирању девојчице постигле боље, али не и статистички значајне резултате у односу на дечаке. До истих закључака дошао је и Аканму (Akanmu, 2016) испитујући да ли у постигнућима дечака и девојчица који су учили математику уз употребу *GeoGebra* софтвера постоји статистички значајна разлика. Налази студије указују да је већина ученика, без обзира на пол, постигла боље резултате на финалном тесту у поређењу са резултатима тестирања обављеног пре експеримента. И Мукири (Mukiri, 2016) као закључак истраживања обављеног у сврху израде дисертације наводи да коришћење пакета *GeoGebra* у настави и учењу геометријских појмова подједнако позитивно утиче на побољшање резултата ученика оба пола, чиме се превазилазе разлике у постигнућима ученика. Дакле, можемо рећи да *GeoGebra* окружење пружа свим ученицима прилику да уче математику на истом нивоу, без дискриминације у односу на пол.

1.3. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у зависности од оцене из математике

Следеће што смо желели да утврдимо јесте постоји ли повезаност између начина рада који обухвата примену софтвера *GeoGebra* и оцене коју ученици имају из математике. Намера нам је била да праћењем ефеката примене софтвера испитамо да ли овакав приступ утиче на ниво постигнућа ученика у зависности од оцене из математике постигнуте на крају трећег разреда.

У обе групе најбоље резултате на иницијалном тестирању постигли су ученици са оценом одличан (5) из математике (Табела 29), у експерименталној групи (M = 52,96; SD = 14,44) а у контролној (M = 49,98; SD = 12,54). Следећи, најуспешнији у обе групе, јесу ученици са оценом врлодобар (4), и то: у експерименталној групи (M = 34,53; SD = 16,20) а у контролној (M = 35,67; SD = 15,53); затим ученици који имају оцену добар (3), у експерименталној групи (M = 26,99; SD = 13,82) а у контролној (M = 34,70; SD = 11,66). Најлошије резултате на иницијалном тестирању, у обе групе ученика, остварили су ученици који имају оцену довољан (2), у експерименталној групи (M = 17,28; SD = 2,37) а у контролној (M = 27,51; SD = 15,07). Уочљиво је да, док су ученици обе групе са оценама врло добар (4) и одличан (5) постигли прилично уједначене резултате, код ученика са оценама довољан (2) и добар (3) постоје разлике у постигнућима у корист ученика контролне групе.

Табела 29. *Постигнућа ученика на иницијалном и финалном тестирању у зависности од оцене из математике*

Група	Оцена	Иницијално тестирање		Финално тестирање		N
		Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation	
Експериментална група	Довољан (2)	17,2820	2,37764	32,2000	25,04396	5
	Добар (3)	26,9989	13,82520	42,7778	23,19902	9
	Врлодобар (4)	34,5305	16,20107	46,6818	25,24808	22
	Одличан (5)	52,9579	14,44503	61,2388	24,72460	67
	Укупно	45,0218	18,32371	55,1068	25,93730	103
Контролна група	Довољан (2)	27,5114	15,07599	29,4286	21,96100	7
	Добар (3)	34,7020	11,66049	35,0000	14,59833	10
	Врлодобар (4)	35,6781	15,53394	35,7407	21,08881	27
	Одличан (5)	49,9810	12,54338	47,1833	17,02490	60
	Укупно	43,2863	15,54042	41,8462	19,14166	104
Укупно	Довољан (2)	23,2492	12,40062	30,5833	22,20753	12
	Добар (3)	31,0532	12,98261	38,6842	19,01769	19
	Врлодобар (4)	35,1629	15,68028	40,6531	23,45257	49
	Одличан (5)	51,5515	13,60872	54,5984	22,48465	127
	Укупно	44,1499	16,96344	48,4444	23,67448	207

Након увођења експерименталног програма и реализације наставе уз имплементацију софтвера *GeoGebra* извршено је финално тестирање знања ученика и експерименталне и контролне групе (Табела 29). Најбољи резултат на финалном тестирању у експерименталној групи постигли су ученици са оценом одличан (5) (M = 61,24; SD = 24,72), који су у односу на иницијално тестирање остварили просечно по 8,28 поена више. Већи напредак у просечном броју поена остварили су ученици који имају оцену врлодобар (4), који су у односу на иницијално тестирање сада у просеку остварили по 12,15 поена више (M = 46,68; SD = 25,24). Највећи напредак у просечном броју поена у односу на иницијално тестирање остварили су ученици са оценом довољан (2) (M = 32,20; SD = 25,04) и добар (3) (M = 42,78; SD =23,20), који су на финалном тестирању просечно постигли 14,92, односно 15,78 поена више. У контролној групи, ученици који имају оцену одличан (5) из математике такође остварили су најбољи резултат (M = 47,18; SD = 17,02), али су у односу на иницијално тестирање просечно имали по 2,8 поена мање. Ученици који имају оцену врлодобар (4) на финалном тестирању постигли су готово исти резултат остварујући просечно по 0,07 поена више у односу на иницијално тестирање (M = 35,74; SD = 21,08). На финалном тестирању ученици са оценом добар (3) остварили су нешто бољи резултат, у односу на иницијално тестирање просечно по 0,3 поена више (M = 35,00; SD = 14,59). Највећи напредак у контролној групи остварила је група ученика који имају оцену довољан (2) (M = 29,42; SD = 21,96), остварујући просечно по 1,91 поен више у односу на иницијално тестирање.

Поредећи резултате постигнуте на иницијалном и финалном тестирању знања, уочљиво је да су ученици експерименталне групе показали знатно виши ниво постигнућа од ученика контролне групе који су углавном имали приближне резултате на оба тестирања. Док су ученици осталих подгрупа контролне групе показали благи пораст нивоа постигнућа, ученици са оценом одличан (5) постигли су просечно нижи број поена у односу на иницијално тестирање.

На основу резултата финалног тестирања можемо констатовати да је пораст просечног броја поена експерименталне групе у односу на иницијално тестирање најизраженији међу ученицима са оценом довољан (2) и добар (3). До сличних резултата дошли су у свом истраживању и Мартиновски и Мартиновски (Martinovski, Martinovski, 2013). Они наводе да ученици којима решавање геометријских проблема представља велику потешкоћу под утицајем примене софтверског пакета *GeoGebra* показују знатно већи успех. Поредећи постигнућа контролне и експерименталне групе на пост-тесту, наглашавају да је број ученика са исподпросечним постигнућима значајно смањен у корист у експерименталне групе.

Са циљем утврђивања да ли разлика у постигнућима ученика у односу на оцену из математике има карактер статистичке значајности користили смо двофакторску анализу коваријансе. Најпре смо утврдили хомогеност варијансе провером претпоставке о једнакости варијансе. Левенов тест (Табела 30) показао је да је задовољена хипотеза о једнакости варијансе (F(7,199) = 1,248; p = 0,278), чиме су створени услови за анализу коваријансе.

Табела 30. *Левенов тест хомогености варијансе*

Dependent Variable: Финално тестирање

F	df1	df2	Sig.
1,248	7	199	0,278

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept + Иницијално тестирање + Група + Оцена + Група * Оцена

Резултати двофакторске анализе коваријансе (Табела 31) указују на то да, након уклањања утицаја коваријата (иницијалног тестирања), није евидентирана статистичка значајност утицаја интеракције групе (експерименталне, контролне) и оцене из математике на постигнућа ученика остварена на финалном тестирању знања (F(3,198) = 0,248; p = 0,863). Дакле, претпоставка да ученицима са различитом оценом из математике одговарају различити начини рада (рад уз примену софтвера *GeoGebra* или класичан начин рада) није потврђена и стога је морамо одбацити. Посматрањем парцијалног ета квадрата чија је вредност 0,004 закључујемо да је утицај веома мали, односно да се свега 0,4% варијансе у финалном тестирању може објаснити интеракцијом независних промењивих (групом и оценом коју ученици имају из математике). Ово је значајно јер нам говори да се уз примену *GeoGebra* софтвера остварује напредак у постигнућима ученика без обзира на оцену из математике коју имају.

Табела 31. *Двофакторска анализа коваријансе*

Dependent Variable: Финално тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	21837,101[a]	8	2729,638	5,773	0,000	0,189
Intercept	34077,945	1	34077,945	72,071	0,000	0,267
Иницијално тестирање	401,180	1	401,180	0,848	0,358	0,004
Група	2048,764	1	2048,764	4,333	0,039	0,021
Оцена	6113,289	3	2037,763	4,310	0,006	0,061
Група * Оцена	352,039	3	117,346	0,248	0,863	0,004
Error	93622,011	198	472,838			
Total	601260,000	207				
Corrected Total	115459,111	206				

a. R Squared = 0,189 (Adjusted R Squared = 0,156)

Даље, посматрањем резултата двофакторске анализе коваријансе можемо установити да се добијени резултати разликују у зависности од оцене коју ученици имају из математике. Ученици са вишим оценама остварили су боље резултате, док су ученици са слабијим оценама показали и лошије резултате на финалном тестирању знања. Када се уклони утицај групе, вредност коваријансе добијена финалним тестирањем између група ученика формираних у односу на оцену коју имају из математике (F(3,198) = 4,310; p = 0,006) указује на статистичку значајност разлика и везу коваријата и успеха ученика постигнутог приликом финалног тестирања. Парцијални ета квадрат са вредношћу 0,061 показује средњи утицај, односно да се 6,1% варијансе финалног тестирања може објаснити независном променљивом коју представља оцена из математике.

Добијена вредност коваријансе (F(1,198) = 4,333; p = 0,039) указује на то да постоји статистички значајна разлика у резултатима ученика експерименталне и контролне групе, чиме се додатно потврђују ефекти употребе софтверског пакета на повећање постигнућа ученика. Ради додатне провере добијених резултата, извршили смо анализу у којој је примењено статистичко уклањање утицаја коваријата на вредности променљивих, а затим израчуната вредност зависне варијабле за сваку од група (Прилог 11). У оквиру Прилога 11 дат је дијаграм кориговaних средњих вредности добијених резултата у зависности од оцене из математике. На дијаграму се уочава да нема интеракције између променљивих, то јест да сви ученици у експерименталној групи, без обзира на њихову оцену из математике, постижу боље резултате од ученика са истим оценама у контролној групи.

Дакле, можемо закључити да употреба софтвера *GeoGebra* приликом извођења наставе и учења геометрије остварује позитивне ефекте и подстиче раст постигнућа ученика, без обзира на њихову оцену из математике. Резултати које смо добили иницијалним и финалним тестирањем говоре да је напредак групе ученика који су наставне садржаје обрађивали уз употребу софтвера значајан. Док су резултати ученика контролне групе остали на нивоу иницијалног тестирања, након увођења експерименталног програма ученици експерименталне групе остварили су знатно више резултате. Диференцијацијом у зависности од оцене коју ученици имају из математике, можемо запазити да се са порастом оцене повећавају и разлике у просечном броју поена на финалном тестирању обе групе ученика. Посебно значајан напредак остварују ученици експерименталне групе са оценом добар (3) и довољан (2) из математике. Овакве резултате можемо образложити динамичним приказима које *GeoGebra* обезбеђује, могућношћу експериментисања и манипулацијама објектима током учења и приликом решавања задатака. Визуелизација позитивно утиче на ученике да дубље разумеју геометријске проблеме и лакше их савладају. *GeoGebra* пакет ученицима са просечним и исподпросечним оценама поједностављује поступак решавања задатака, што имплицира постизање бољих резултата. С тим у вези, Љајко (Љајко, 2014) наводи да је употреба софтвера у сложенијим математичким проблемима вишеструко потврђена, због чега има смисла више пажње посветити увођењу софтвера у редовну наставу и тиме проширити обухват ученика на свим нивоима. На тај начин, боља индивидуална постигнућа ученика могу утицати на повећање квалитета како почетне наставе математике тако и наставе математике уопште.

1.4. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на образовна постигнућа ученика у учењу садржаја геометрије у зависности од општег успеха

Задатак нам је био и да утврдимо постоји ли интеракција између ефеката наставе која се одвија уз употребу софтверског пакета и школског успеха који су ученици постигли на крају претходног разреда. Желели смо да утврдимо да ли примена пакета *GeoGebra* на садржајима геометрије доприноси постизању бољих резултата код свих ученика, без обзира на њихов општи успех.

Увидом у резултате које су ученици остварили на иницијалном тесту (Табела 32) можемо констатовати да су најуспешнији били ученици са одличним успехом, у експерименталној (M = 48,81; SD = 16,67) а у контролној групи (M = 47,64; SD = 13,18). Следећи, подједнако успешни, били су ученици са врлодобрим општим успехом, и то: експериментална група (M = 27,86; SD = 14,60), контролна група (M = 27,30; SD = 14,02). Број ученика у обе групе са општим успехом добар и довољан је релативно мали, те су тако у експерименталној групи свега два ученика са добрим успехом (M = 17,50; SD = 1,76), док је у контролној групи само један ученик са тим општим успехом (M = 34,75; SD = 0,00). По један ученик у обе групе на крају трећег разреда постигао је довољан општи успех, док су на иницијалном тестирању постигли следеће резултате: експериментална група (M = 13,83; SD = 0,00), контролна (M = 34,75; SD = 0,00). Ако, због величине узорка изоставимо ученике са успехом довољан и добар, можемо закључити да су ученици са општим успехом врлодобар и одличан постигли прилично уједначене резултате у обе групе испитаника.

Табела 32. *Постигнућа ученика на иницијалном и финалном тестирању у зависности од општег успеха*

Група	Општи успех	Иницијално тестирање		Финално тестирање		N
		Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation	
Експериментална група	Довољан	13,8300	0,00000	26,5000	0,00000	1
	Добар	17,5000	1,76777	32,5000	2,12132	2
	Врлодобар	27,8679	14,60530	46,3929	21,66899	14
	Одличан	48,8171	16,67155	57,3837	25,86306	86
	Укупно	45,0218	18,32371	55,1068	25,49785	103
Контролна група	Довољан	34,7500	0,00000	25,0000	0,00000	1
	Добар	34,7500	0,00000	29,0000	0,00000	1
	Врлодобар	27,3019	14,02000	30,0952	19,32331	21
	Одличан	47,6411	13,17972	45,2593	18,16575	81
	Укупно	43,2863	15,54042	41,8462	19,24788	104
Укупно	Довољан	24,2900	14,79267	25,7500	1,06066	2
	Добар	23,2500	10,03743	31,3333	2,51661	3
	Врлодобар	27,5283	14,04509	36,6143	21,55911	35
	Одличан	48,2467	15,04592	51,5030	23,20518	167
	Укупно	44,1499	16,96344	48,4444	23,48038	207

Непосредно након завршетка примене експерименталног програма у оквиру којег је софтвер *GeoGebra* коришћен током обраде садржаја геометрије обављено је финално тестирање знања обе групе ученика. Резултати финалног тестирања приказани у Табели 23 показали су да су у експерименталној групи најбоље резултате постигли ученици са одличним општим успехом (M = 57,38; SD = 25,86), остваривши просечно по 8,57 поена више у односу на иницијално тестирање. Већи напредак у просечном броју поена остварили су ученици који имају општи успех довољан (M = 26,50; SD = 0,00) и добар (M = 32,50; SD = 2,12), који су у односу на иницијално тестирање постигли просечно 12,67, односно 15 поена више. Највећи напредак у експерименталној групи, у односу на иницијално тестирање, остварили су ученици са општим успехом врлодобар, који су на финалном тестирању просечно имали 18,53 поена више (M = 46,39; SD = 21,67). И у контролној групи најбоље резултате остварили су ученици са општим успехом одличан (M = 45,26; SD = 18,16), при чему је евидентан пад у постигнућима у односу на иницијално тестирање за просечно 2,38 поена. Код ученика са општим успехом врлодобар приметан је умерени напредак, будући да су остварили резултат за просечно 2,79 поена виши у односу на иницијално тестирање (M = 30,09; SD = 19,32). Велики пад у постигнућима остварили су ученици са успехом добар (M = 29,00; SD = 0,00) и довољан (M = 25,00; SD = 0,00) будући да су имали 5,75 односно 9,75 поена мање него на иницијалном тестирању знања.

Ако резултате финалног тестирања упоредимо са иницијалним тестом, највећи напредак међу ученицима експерименталне групе остварили су ученици са општим успехом врлодобар, затим добар, довољан и одличан. У случају ученика контролне групе ситуација је другачија. Осим ученика са успехом врлодобар који бележе боље резултате приликом финалног тестирања у односу на иницијално, све остале групе ученика оствариле су лошије просечне скорове.

Како бисмо утврдили да ли примена софтвера *GeoGebra* доприноси повећању нивоа постигнућа ученика у зависности од општег успеха применили смо двофакторску анализу коваријансе. Пре тога, Левеновим тестом испитали смо да ли је нарушена претпоставка о једнакости варијансе. Левенов тест (F(7,199) = 1,753; p = 0,099) указује да је претпоставка о једнакости варијансе задовољена (Табела 33) и испуњени су услови за примену анализе коваријансе.

Табела 33. *Левенов тест хомогености варијансе*

Dependent Variable: Финално тестирање

F	df1	df2	Sig.
1,753	7	199	0,099

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept + Иницијално тестирање + Група + Општи успех + Група * Општи успех

Примењена двофакторска анализа коваријансе (Табела 34) указује да, након уклањања утицаја коваријата (резултата постигнутих на иницијалном тестирању), утицај интеракције групе и општег успеха ученика на резултате постигнуте приликом финалног тестирања знања није статистички значајан (F(3,198) = 0,120; p = 0,948). То можемо интерпретирати као одбацивање претпоставке да ученици са различитим општим успехом постижу исте резултате без обзира на примењени начин рада. Парцијални ета квадрат од 0,002 представља веома мали утицај (Cohen, 1988, према Pallant, 2011), односно свега 0,2% варијансе приликом финалног тестирања може се објаснити интеракцијом независних варијабли групом и општим успехом ученика.

Ако посматрамо утицај општег успеха на резултате добијене финалним тестирањем закључујемо да не постоји статистички значајан утицај (F(3,198) = 1,885; p = 0,133) експерименталног програма на успех ученика када се отклони утицај коваријата (резултата иницијалног тестирања). Овакви резултати имплицирају да су ученици подједнако напредовали без обзира на општи успех, док вредност парцијалног ета квадрата која износи 0,028 указује да 2,8% варијансе остварене на финалном тестирању може објаснити независна променљива коју представља општи успех ученика. Можемо рећи да оваквим начином рада сви ученици остварују напредак у постигнућима, без обзира на општи успех.

Табела 34. *Двофакторска анализа коваријансе*

Dependent Variable: Финално тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	18592,140^a	8	2324,018	4,845	0,000	0,164
Intercept	11386,819	1	11386,819	23,737	0,000	0,107
Иницијално тестирање	1850,821	1	1850,821	3,858	0,051	0,019
Група	453,765	1	453,765	0,946	0,032	0,055
Општи успех	2713,254	3	904,418	1,885	0,133	0,028
Група * Општи успех	172,195	3	57,398	0,120	0,948	0,002
Error	94981,471	198	479,704			
Total	599374,500	207				
Corrected Total	113573,611	206				

a. R Squared = 0,164 (Adjusted R Squared = 0,130)

Резултати потврђују позитивне ефекте употребе софтверског пакета на раст постигнућа ученика, јер добијена вредност коваријансе (F(1,198) = 0,946; p = 0,032) упућује на постојање статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе услед деловања експерименталног програма у корист ученика експерименталне групе.

Са циљем додатне провере добијених резултата, извршили смо и анализу са статистички уклоњеним утицајем коваријата на вредности независних променљивих, након чега смо израчунали вредност зависне променљиве за сваку групу (Прилог 12). Дијаграм кориговани средњих вредности добијених резултата у зависности од општег успеха, дат у саставу Прилога 12, графички приказује интеракцију између променљивих. Може се уочити да сви ученици експерименталне групе, независно од општег успеха, имају боља постигнућа у поређењу са ученицима са истим општим успехом из контролне групе.

На основу свега претходно изнетог, можемо закључити да примена софтверског пакета *GeoGebra* приликом реализације садржаја геометрије погодује свим ученицима, без обзира на остварени општи успех на крају претходног разреда. Од изузетног је значаја нагласити да и ученици за најслабијим општим успехом учењем уз употребу софтвера остварују побољшање у постигнућима, што његову примену чини додатно методички оправданом. Мартиновски и Мартиновски (Martinovski, Martinovski, 2013) слично закључују, истичући већи успех ученика који иначе имају потешкоћа при решавању геометријских проблема. Више пута истицана особина софтвера да наставне садржаје учини динамичним и очигледним омогућава ученицима са слабијим успехом да лакше разумеју геометријске појмове. Међутим, многоструки бенефити коришћења *GeoGebra* пакета не исцрпљују се само доприносом ученицима са слабијим успехом да визуелизују појмове, већ се проширују и на успешније ученике. Подстичући геометријске способности софтвер позитивно утиче на остваривање бољих резултата и повећање образовних постигнућа свих ученика.

2. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика у почетној настави математике

Други истраживачки задатак био је да утврдимо да ли примена софтверског пакета *GeoGebra* у учењу садржаја геометрије доприноси повећању трајности знања ученика. Анализом резултата добијених истраживањем закључили смо да под утицајем употребе софтвера ученици остварују значајно боље резултате у поређењу са ученицима који су садржаје усвајали класичним моделом наставе. Додатно, желели смо да испитамо да ли се применом поменутог софтвера у реализацији садржаја геометрије у почетној настави математике може позитивно утицати на трајност знања стечених оваквим приступом.

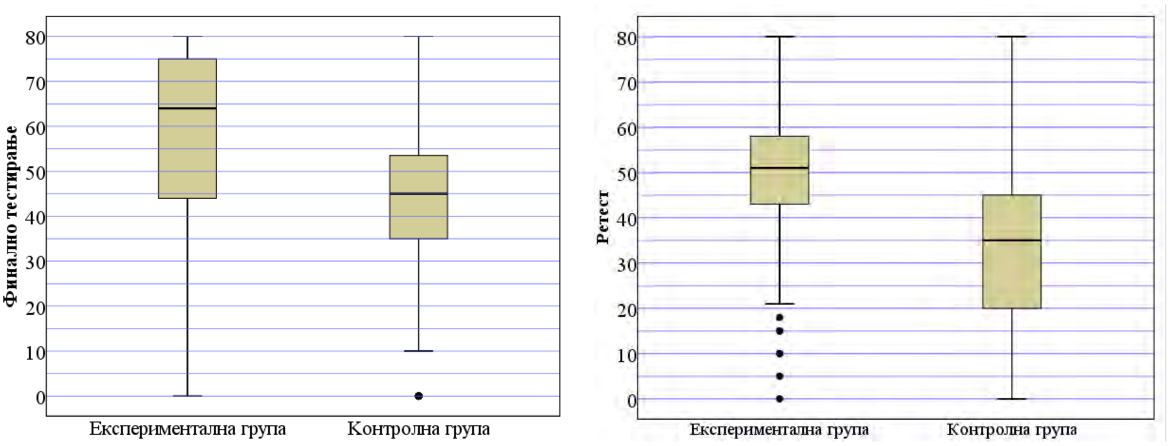
Истеком четири месеца од завршетка спровођења експерименталног програма и по обављеном финалном тестирању извршили смо поновљено тестирање обе групе ученика. Утицај примене софтверског пакета на трајност знања ученика мерили смо постигнућем оствареним на тесту знања по истеку четири месеца од извршеног експерименталног програма. На основу овако дефинисаног истраживачког задатка, поставили смо и тестирали истраживачку хипотезу: *Примена софтверског пакета GeoGebra у учењу садржаја геометрије доприноси повећању трајности знања ученика у почетној настави математике.*

У Табели 35 дат је приказ резултата ученика обе групе постигнутих на поновљеном тестирању. Ученици у експерименталној групи на овом тесту знања остварили су слабије резултате (M = 48,98; SD = 14,78) у односу на резултате добијене финалним тестирањем спроведеним четири месеца раније (M = 55,10; SD = 25,93). Код ученика контролне групе забележен је већи пад у постигнућима на поновљеном тестирању (M = 33,17; SD = 18,33) у односу на резултате финалног тестирања (M = 41,84; SD = 19,14). На основу резултата можемо констатовати да без обзира на нижа постигнућа обе групе ученика по истеку одређеног временског периода, ученици у експерименталној групи бележе просечно мањи пад (6,12 бодова у односу на ученике контролне групе који у просеку остварују пад од 8,67 бодова) и показују знатно више резултате у поређењу са ученицима контролне групе.

Табела 35. *Дескриптивни показатељи нивоа постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на финалном и поновљеном тестирању*

		N	M	SD	SDE	95% Confidence Interval for Mean	
						Lower Bound	Upper Bound
Финално тестирање	Експериментална група	103	55,10	25,93	2,55	50,03	60,17
	Контролна група	104	41,84	19,14	1,87	38,12	45,56
	Укупно	207	48,44	23,67	1,64	45,20	51,68
Ретест	Експериментална група	103	48,98	14,78	1,46	46,09	51,87
	Контролна група	104	33,17	18,33	1,80	29,61	36,74
	Укупно	207	41,04	18,41	1,28	38,52	43,56

На основу графичког приказа резултата (Графикон 9) јасно је да је код обе групе ученика дошло до појаве слабијих резултата на поновљеном тестирању у поређењу са резултатима финалног теста. И поред тога, ученици експерименталне групе показују виши ниво постигнућа од ученика контролне групе, што, ако изузмемо природан процес заборављања с обзиром да је реч о периоду од четири месеца између два тестирања, можемо повезати са применом софтверског пакета приликом реализације наставних садржаја.



Графикон 9. *Резултати остварени приликом финалног и поновљеног тестирања знања ученика*

Како бисмо утврдили да ли постоји статистички значајна разлика у постигнућу експерименталне и контролне групе ученика на финалном и поновљеном тестирању извршили смо анализу варијансе. Вредности Левеновог теста дате у Табели 36 и на финалном тестирању (F(1,205) = 12,059; p = 0,001) и на ретесту (F(1,205) = 7,814; p = 0,006) мање су од граничне вредности, због чега смо посматрали резултате Велшовог и Браун–Форсајтовог теста отпорних на кршење претпоставке о хомогености варијансе. Оба теста потврдила су да је разлика у постигнутим резултатима група на поновљеном тестирању знања ученика статистички значајна у корист експерименталне групе (Табела 36).

Табела 36. *Анализа варијансе финалног и поновљеног тестирања*

Test of Homogeneity of Variances

	Levene statistic	df1	df2	Sig.
Финално тестирање	12,059	1	205	0,001
Ретест	7,814	1	205	0,006

ANOVA

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Финално тестирање	Између група	9099,747	1	9099,747	17,539	0,000
	Унутар групе	106359,364	205	518,826		
	Укупно	115459,111	206			
Ретест	Између група	12930,845	1	12930,845	46,616	0,000
	Унутар групе	56864,846	205	277,389		
	Укупно	69795,691	206			

Robust Tests of Equality of Means

		Statistic	df1	df2	Sig.
Финално тестирање	Welch	17,489	1	187,648	0,000
	Brown–Forsythe	17,489	1	187,648	0,000
Ретест	Welch	46,712	1	196,918	0,000
	Brown–Forsythe	46,712	1	196,918	0,000

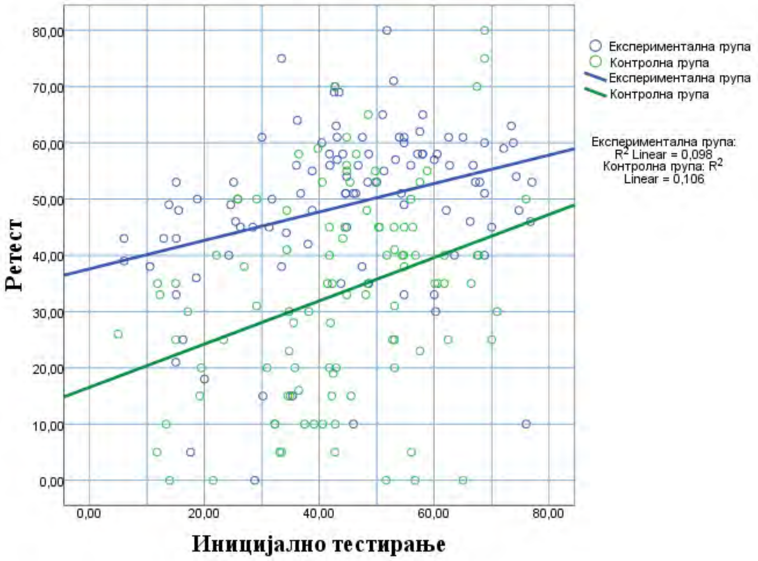
Добијени резултати указују да је напредак експерименталне у односу на контролну групу статистички значајан, то потврђује претходну претпоставку о ефектима примене софтверског пакета на повећање нивоа постигнућа ученика. Под утицајем експерименталног програма, ученици су напредовали и постигли боље резултате приликом решавања математичких задатака који се односе на садржаје геометрије у односу на ученике који су те садржаје учили применом класичног модела.

Вредност Кронбах коефицијента алфа 0,72 (Табела 37) указује да ретест има прихватљиву унутрашњу сагласност, те резултате добијене овим тестом можемо сматрати поузданим.

Табела 37. *Вредност Кронбах коефицијента алфа*

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
0,720	0,724	8

Да бисмо се уверили да добијени резултати нису последица неуједначености група (експерименталне и контролне), извршили смо примену анализе коваријансе. Резултате остварене на иницијалном тестирању узели смо за коваријат, док смо за проверу линеарности коваријата и зависне променљиве (резултата поновљеног тестирања) користили дијаграм растурања (Графикон 10). На графикону је уочљиво да је у свакој од група (експерименталној и контролној) однос између зависне променљиве и коваријата праволинијски, односно линеаран. Тиме је потврђена претпоставка о линеарности зависне променљиве и коваријата.



Графикон 10. *Линеарност зависне променљиве и коваријата*

Проверу интеракције између коваријата и начина рада у групама извршили смо статистички испитујући хомогеност регресионих нагиба. Вредност интеракције коваријата и зависне променљиве (F(1,203) = 0,987; p = 0,322) дата у Табели 38 указује да претпоставка о хомогености регресионих нагиба није нарушена, те да су испуњени услови за примену анализе коваријансе.

Табела 38. *Хомогеност регресионих нагиба*

Dependent Variable: Ретест

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	18791,904ª	3	6263,968	24,931	0,000
Intercept	19057,765	1	19057,765	75,852	0,000
Група	2879,354	1	2879,354	11,460	0,001
Иницијално тестирање	5847,554	1	5847,554	23,274	0,000
Група * Иницијално тестирање	247,884	1	247,884	0,987	0,322
Error	51003,787	203	251,250		
Total	418419,000	207			
Corrected Total	69795,691	206			

a. R Squared = 0,269 (Adjusted R Squared = 0,258)

У Табели 39 дата је анализа коваријансе иницијалног и поновљеног тестирања, при чему смо најпре статистички уклонили утицај коваријата (резултата постигнутих на иницијалном тестирању знања ученика). Сигнификатност резултата (F(1,204) = 47,915; p = 0,000) показује да постоји утицај резултата поновљеног мерења знања ученика обе групе ако се уклони утицај коваријата, и да је он статистички значајан. Добијена вредност парцијалног ета квадрата 0,190 показује велики утицај променљивих (Cohen, 1988, према Pallant, 2011), односно да се након четворомесечног периода 19% варијансе поновљеног тестирања може објаснити примењеним начином рада.

Табела 39. *Анализа коваријансе*

Dependent Variable: Ретест

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	18544,020ª	2	9272,010	36,906	0,000	0,266
Intercept	19965,743	1	19965,743	79,471	0,000	0,280
Иницијално тестирање	5613,175	1	5613,175	22,342	0,000	0,099
Група	12037,757	1	12037,757	47,915	0,000	0,190
Error	51251,670	204	251,234			
Total	418419,000	207				
Corrected Total	69795,691	206				

a. R Squared = 0,266 (Adjusted R Squared = 0,258)

На основу приказаних резултата закључујемо да употреба софтвера *GeoGebra* на садржајима геометрије позитивно утиче на трајност знања ученика из математике. Тиме је потврђена постављена хипотеза да *примена софтверског пакета GeoGebra у учењу садржаја геометрије доприноси повећању трајности знања ученика у почетној настави математике*. Дакле, истраживањем смо показали да примена *GeoGebra* пакета има позитиван ефекат на повећање нивоа постигнућа ученика, али и садржаје савладане уз употребу поменутог софтвера чини трајнијим.

До резултата сличних нашим, односно до закључка да знања стечена у процесу наставе путем примене софтверског пакета *GeoGebra* показују већу стабилност и трајност од знања стечених у класичном наставном процесу, дошао је Прентовић спроводећи истраживање са ученицима трећег разреда средње школе (Прентовић, 2014). Резултати његовог истраживања потврђују да настава уз помоћ образовног софтвера доводи до повећања образовног учинка ученика, тј. до боље оспособљености за самостално учење и усвајање знања, успешније примене на тај начин стечених знања и њихове веће трајности.

Овакви закључци истраживача доказују да један од важних циљева процеса наставе јесте да обезбеди да усвојено знање буде дугорочно задржано у свести ученика. Будући да се заборављање јавља као неминован и природан процес, трајност усвојених знања поставља се као императив како би се нови садржаји усвајали на тим темељима. Мишчевић-Кадијевић наводи да се квалитет знања не огледа само у испољавању знања непосредно након стицања, већ да ученици у различитим временским периодима у одређеном обиму покажу да су стекли одређена знања (Мишћевић-Кадијевић, 2009). У прилог томе Дриден и Вос износе податак да су ученици који уче слушајући наставу и користећи класичан уџбеник у стању да запамте, односно репродукују око 30% садржаја, док ученици који непосредно виде, доживе и активно учествују у реализацији наставних садржаја могу научити и у дужем временском периоду ефикасно репродуковати до 90% садржаја (Dryden, Vos, 2001). Ови подаци само потврђују најчешће истицану дидактичку компоненту *GeoGebra* пакета, а то је могућност визуелног представљања великог броја примера. Будући да ученици старијег узраста у недовољној мери владају основним математичким појмовима стеченим у оквиру почетне наставе математике (Миликић, 2018), то се употреба *GeoGebra* софтвера при реализацији садржаја чини оправданом за обезбеђивање трајности знања. Примена софтвера може учинити стечено знање трајнијим него знање стечено класичним начином извођења наставе, што даје позитиван импулс учитељима да се у већој мери окрену настави организованој на овај начин.

2.1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика према нивоима образовних постигнућа

Поред испитивања ефеката примене софтверског пакета на повећање нивоа постигнућа ученика, један од циљева истраживања био је и откривање утицаја спроведеног експерименталног програма на резултате ученика који се налазе на различитим нивоима образовних постигнућа.

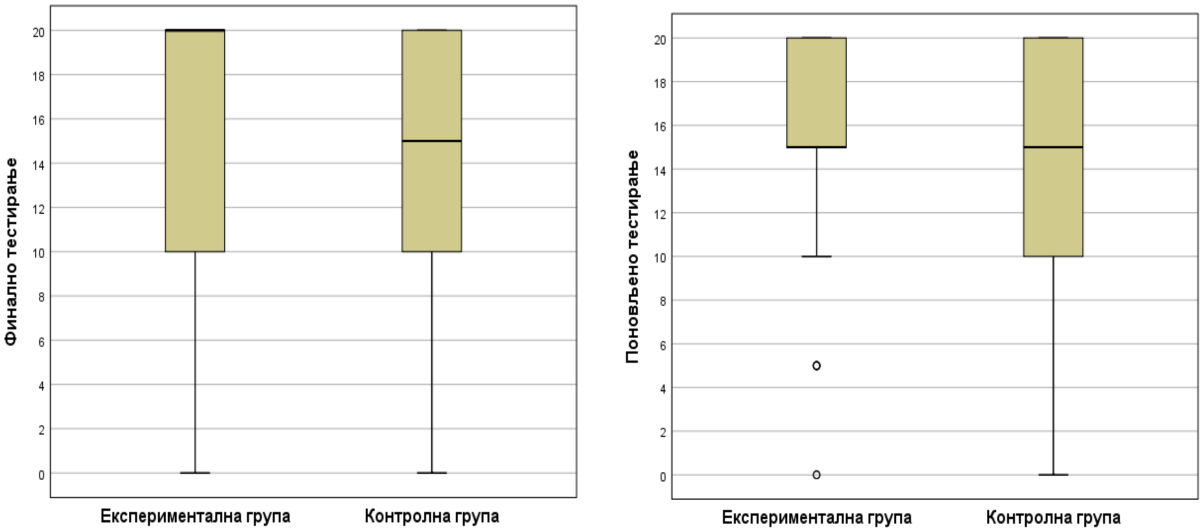
2.1.1. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика на основном нивоу постигнућа

Испитивање ефеката примене софтвера *GeoGebra* на садржајима геометрије на трајност знања ученика у четвртом разреду основне школе на основном нивоу постигнућа започели смо дескриптивном анализом резултата финалног и поновљеног тестирања. На основу података представљених у Табели 40, може се закључити да су приликом финалног тестирања ученици експерименталне групе постигли бољи резултат (M = 15,24; SD = 7,15) у поређењу са ученицима одељења у којима се настава математике одвијала на класичан начин (M = 14,13; SD = 6,44).

Табела 40. *Дескриптивни показатељи нивоа постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на основном нивоу*

						95% Confidence Interval for Mean	
		N	M	SD	SDE	Lower Bound	Upper Bound
Финално тестирање	Експериментална група	103	15,24	7,15	0,70	13,84	16,64
	Контролна група	104	14,13	6,44	0,63	12,88	15,39
	Укупно	207	14,69	6,81	0,47	13,75	15,62
Поновљено тестирање	Експериментална група	103	15,58	4,86	0,48	14,63	16,53
	Контролна група	104	12,35	7,34	0,72	10,93	13,78
	Укупно	207	13,96	6,42	0,45	13,08	14,84

Резултати поновљеног тестирања показују да је група ученика код којих је реализован експериментални програм постигла сличан резултат као на финалном тестирању уз благо повећање просечног броја поена (M = 15,58; SD = 4,86), док је код контролне групе ученика уочен пад у просечном броју остварених поена (M = 12,35; SD = 7,34) (Табела 40). Графички приказ постигнућа обе групе ученика на финалном и поновљеном тестирању знања дат је на Графикону 11.



Графикон 11. *Резултати остварени на финалном и поновљеном тестирању знања ученика на основном нивоу*

За утврђивање постојања статистичке значајности разлика у добијеним резултатима служили смо се двофакторском анализом варијансе. Вредност добијена Левеновим тестом на поновљеном тестирању (F = 2,156; p = 0,369) указује да је претпоставка о једнакости варијансе задовољена (Табела 41).

Табела 41. *Левенов тест једнакости варијанси на основном нивоу постигнућа*

Dependent Variable: Поновљено тестирање

F	df1	df2	Sig.
2,156	1	205	0,369

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Након што смо уклонили утицај коваријата (резултат иницијалног тестирања) утврдили смо да је разлика у постигнућима ученика на основном нивоу статистички значајна (F = 14,521; p = 0,000) (Табела 42). Вредност парцијалног ета квадрата 0,066 указује на мали утицај варијансе када су резултати поновљеног тестирања у питању (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). На основу вредности парцијалног ета квадрата можемо закључити да се 6,6% варијансе у поновљеном тестирању знања на основном нивоу постигнућа може објаснити утицајем независне променљиве, односно примењеним експерименталним програмом.

Ако се посматра утицај коваријата представљен постигнућима на основном нивоу током иницијалног тестирања на резултате ученика на поновљеном тестирању након што уклонимо утицај независне променљиве (групе), вредност коваријансе указује да добијене разлике јесу статистички значајне (F = 3,536; p = 0,017) (Табела 42). Вредност парцијалног ета квадрата 0,153 потврђује умерени утицај експерименталног програма у резултатима поновљеног тестирања знања, односно да се 15,3% варијансе на основном нивоу постигнућа на поновљеном тестирању може објаснити независном променљивом (експерименталним програмом).

Табела 42. *Анализа коваријансе на основном нивоу постигнућа*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Поновљено тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	598,312[a]	2	299,156	7,722	0,001	0,070
Intercept	2053,339	1	2053,339	53,000	0,000	0,206
Иницијално тестирање	59,506	1	59,506	3,536	0,017	0,153
Група	562,559	1	562,559	14,521	0,000	0,066
Error	7903,379	204	38,742			
Total	48850,000	207				
Corrected Total	8501,691	206				

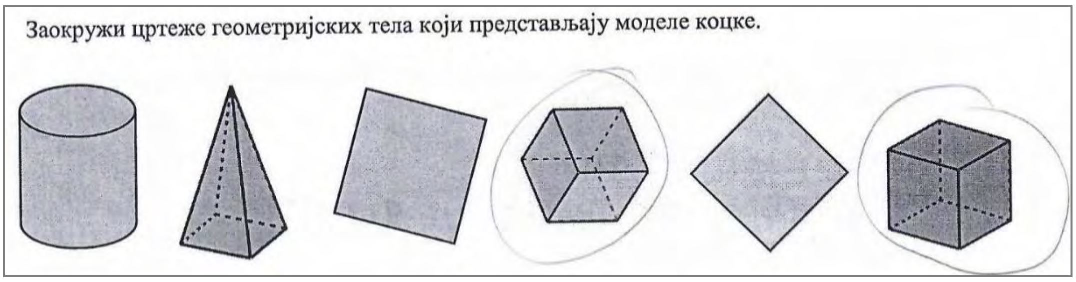
a. R Squared = 0,070 (Adjusted R Squared = 0,061)

Резултати до којих смо дошли показују да су ученици који су садржаје геометрије обрађивали уз примену софтверског пакета *GeoGebra* на поновљеном тестирању знања остали на истом нивоу, док су ученици контролне групе остварили лошије резултате при решавању задатака са основног нивоа постигнућа. Начин рада примењиван у обе групе наводи на закључак да су визуелне репрезентације садржаја допринеле да основна геометријска знања која су ученици стекли буду трајнија у односу на начин стицања знања класичним моделом учења.

У циљу прецизнијег утврђивања садржаја основног нивоа постигнућа на чију је трајност утицала примена софтвера, анализираћемо неке од радова ученика са поновљеног теста и упоредити их са резултатима оствареним на финалном тестирању.

Првим задатком са основног нивоа тестирали смо способност ученика да међу датим геометријским фигурама у равни и простору препознају модел коцке (Пример 31).

Пример 31. *Решење задатка препознавања коцке међу датим геометријским фигурама – поновљено тестирање*



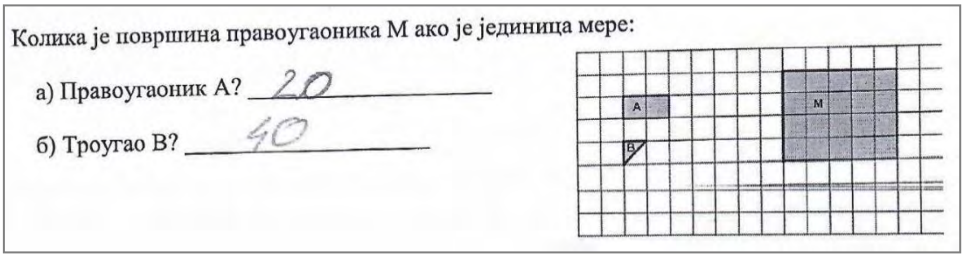
Заокружи цртеже геометријских тела који представљају моделе коцке.

За разлику од финалног тестирања где је један део ученика имао проблем да препозна модел коцке, на поновљеном тестирању је број ученика који нису успели да реше овај задатак јако мали. Ученици и експерименталне и контролне групе били су веома успешни у његовом решавању, 96,11% ученика експерименталне и 90,38% ученика контролне групе тачно је решило задатак у целости. Преостали ученици грешили су означавајући квадрате, док међу ученицима није било нити једног који је погрешио заокруживањем ваљка или пирамиде. Ако ове резултате упоредимо са резултатима постигнутим у оквиру задатка са аналогним захтевом на финалном тестирању, можемо запазити да су након одређеног временског периода ученици били успешнији када је у питању разликовање коцке од других геометријских тела. Иако је међу ученицима било оних који су показали да још увек недовољно добро праве дистинкцију између квадрата (фигуре у равни) и коцке (тела у простору), са друге стране можемо рећи да је код ученика изграђена свест о геометријским телима у простору и њиховим карактеристикама.

Циљ другог задатка са основног нивоа на поновљеном тестирању био је да проверимо у којој мери су ученици трајно усвојили поступак мерења површине површи фигуре поплочавањем датом нестандардном јединицом мере (Пример 32).

Пример 32. *Решење задатка мерења површине правоугаоника – поновљено тестирање*

а)

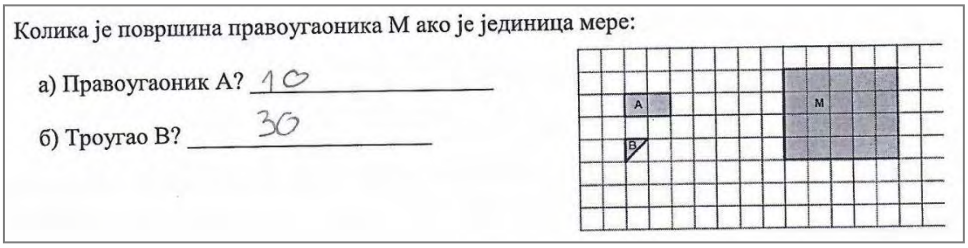


Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А? 20

б) Троугао В? 40

б)



Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

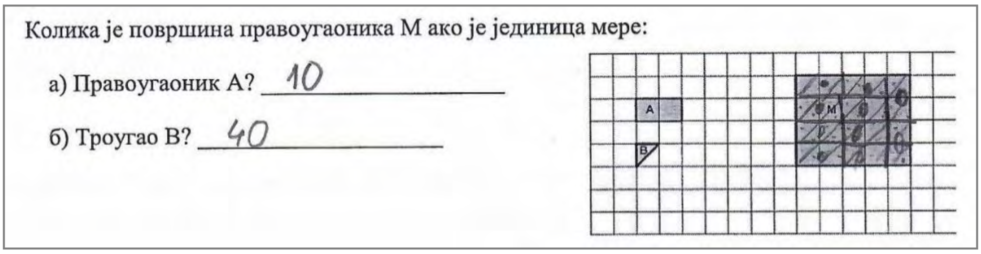
а) Правоугаоник А? 10

б) Троугао В? 30

Анализом радова можемо закључити да је ученицима највећи проблем био пребројавање фигура потребних да се поплоча површ датог правоугаоника *М*. Ученици су разумели захтев задатка али су занемарили налог на основу којег је правоугаоник *М* требало поплочати правоугаоником *А*, односно троуглом *В*. У Примеру 32 приказане су грешке са највећом фреквенцијом. Под а) представљено је решење у којем, уместо у мерним јединицама *А* (правоугаоницима који су се састојали од два мала квадрата), површина правоугаоника *М* је изражена у малим квадратима. Са друге стране, под б) је приказано погрешно решење у којем је ученицима очигледно представљало тешкоћу да прецизно преброје колико је мерних јединица *В* (два троугла чине један мали квадрат) потребно да би се поплочала површ правоугаоника *М*.

Ако анализирамо грешке које су ученици чинили при решавању другог задатка запазићемо да, за разлику од финалног тестирања, на поновљеном тестирању нико од ученика није покушао да примени образац за израчунавање површине правоугаоника. Дакле, иако су пре извесног времена усвојили формуле за израчунавање површине, ученици ипак теже примени практичног поступка мерења површине поплочавањем показујући тиме да су схватили суштину. Важно је и напоменути да је приликом решавања задатка значајан број ученика графички представио сам поступак поплочавања (Пример 33). Међу њима, знатно је већи број ученика одељења у којима је реализован експериментални програм, што имплицира да је визуелизација оставила дубок траг на њихов начин мишљења. Свесни подршке коју адекватан графички приказ проблема пружа, са успехом га користе приликом решавања.

Пример 33. *Решење задатка мерења површине правоугаоника – поновљено тестирање*



Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А? 10

б) Троугао В? 40

Ученици су делили површ мерене фигуре *М* на фигуре *А* и *В* које представљају јединице мере водећи рачуна да не дође до њиховог преклапања. Након тога, пребројавањем су са сигурношћу могли да утврде површину правоугаоника *М*.

***

Резултати истраживања показују да примена софтверског пакета *GeoGebra* приликом усвајања основних појмова геометрије доприноси већој трајности и стабилности знања ученика. Коришћење софтвера за креирање и приказивање различитих графичких приказа чини да ученици који се налазе на основном нивоу постигнућа буду способни да стечена базична знања примене и након дужег временског периода. Употреба софтвера током реализације наставе омогућава ученицима који остварују слабији успех у настави математике да лакше визуелизују појмове, дубље их разумеју и тако дугорочно меморишу.

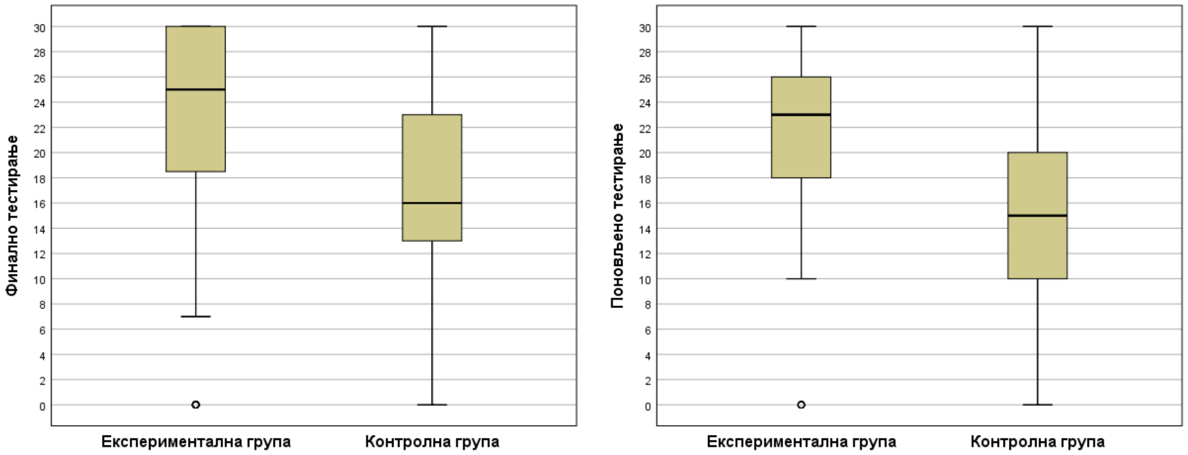
2.1.2. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика на средњем нивоу постигнућа

Са циљем анализе ефеката примене софтвера *GeoGebra* на трајност геометријских знања ученика на средњем нивоу образовних постигнућа, у Табели 43 представили смо резултате ученика остварене на поновљеном тестирању. На основу приказаних података закључујемо да су ученици експерименталне групе на финалном тестирању знања (M = 21,88; SD = 9,98) просечно остварили више резултате у поређењу са ученицима контролне групе (M = 16,58; SD = 8,42).

Табела 43. *Дескриптивни показатељи нивоа постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на основном нивоу*

						95% Confidence Interval for Mean	
		N	M	SD	SDE	Lower Bound	Upper Bound
Финално тестирање	Експериментална група	103	21,88	9,98	0,98	19,93	23,83
	Контролна група	104	16,58	8,42	0,82	14,94	18,21
	Укупно	207	19,22	9,58	0,67	17,90	20,53
Поновљено тестирање	Експериментална група	103	21,24	7,57	0,74	19,76	22,72
	Контролна група	104	14,47	8,43	0,83	12,83	16,11
	Укупно	207	17,84	8,68	0,60	16,65	19,03

На поновљеном тестирању код ученика експерименталне групе дошло је до нешто нижих просечних резултата у односу на финално тестирање (M = 21,24; SD = 7,57), док је код ученика контролне групе пад у постигнућима на средњем нивоу уочљивији (M = 14,47; SD = 8,43) (Табела 43). Ако упоредимо нивое постигнућа обе групе ученика на средњем нивоу у оквиру поновљеног тестирања знања уочићемо да су ученици у експерименталној групи постигли знатно више просечне резултате у поређењу са ученицима који су чинили одељења контролне групе. На Графикону 12 дајемо и графички приказ постигнућа ученика обе групе на финалном и поновљеном тестирању.



Графикон 12. *Резултати остварени на финалном и поновљеном тестирању знања ученика на средњем нивоу*

Како бисмо утврдили да ли постоји статистички значајна разлика у резултатима ученика на поновљеном тесту користили смо двофакторску анализу варијансе. Сигнификантност Левеновог теста (F = 2,376; p = 0,125) указује да није било значајнијег нарушавања претпоставке о једнакости варијансе (Табела 44).

Табела 44. *Левенов тест једнакости варијанси на средњем нивоу постигнућа*

Dependent Variable: Поновљено тестирање

F	df1	df2	Sig.
2,376	1	205	0,125

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Након уклањања утицаја коваријата (резултата иницијалног тестирања знања), утврђено је да постоји статистички значајна разлика између ученика обе групе на средњем нивоу постигнућа поновљеног тестирања (F = 38,203; p = 0,000) (Табела 45). На основу вредности парцијалног ета квадрата 0,158 закључујемо да постоји умерени утицај варијансе на резултате поновљеног тестирања. Односно, након протицања четири месеца од финалног тестирања 15,8% варијансе у поновљеном тестирању можемо објаснити утицајем експерименталног програма.

Утицај коваријата (постигнућа ученика на средњем нивоу иницијалног тестирања) на резултате ученика на истом нивоу поновљеног тестирања након уклањања утицаја независне променљиве (групе) има карактер статистичке значајности (F = 14,357; p = 0,000) (Табела 45). Вредност парцијалног ета квадрата 0,462 упућује на средњи утицај експерименталног програма на резултате поновљеног теста знања. Ова вредност упућује на чињеницу да се 46,2% варијансе у резултатима поновљеног тестирања на средњем нивоу постигнућа може објаснити ефектима спроведеног експеримента.

Табела 45. *Анализа коваријансе на средњем нивоу постигнућа*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Поновљено тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	3238,344[a]	2	1619,172	26,860	0,000	0,208
Intercept	7994,237	1	7994,237	132,615	0,000	0,394
Иницијално тестирање	865,450	1	865,450	14,357	0,000	0,462
Група	2302,944	1	2302,944	38,203	0,000	0,158
Error	12297,395	204	60,281			
Total	81421,000	207				
Corrected Total	15535,739	206				

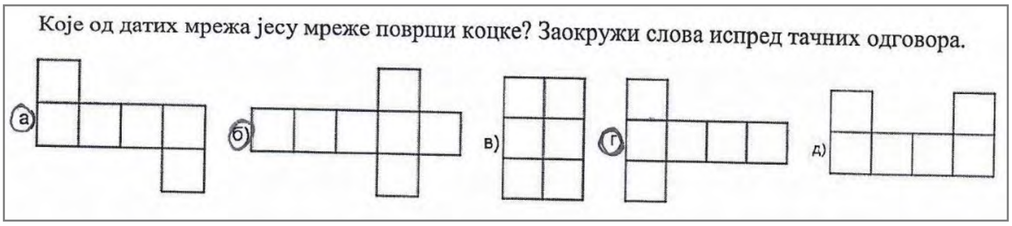
a. R Squared = 0,208 (Adjusted R Squared = 0,201)

Анализом добијених резултата долазимо до закључка да иако је истеком четири месеца од реализације експерименталног програма дошло до природног процеса заборављања, ученици експерименталне групе и даље постижу знатно више просечне резултате на средњем нивоу постигнућа од ученика контролне групе. Овакве резултате можемо повезати са мноштвом визуелних приказа који су захваљујући софтверском пакету *GeoGebra* били на располагању ученицима приликом усвајања садржаја геометрије током трајања експеримента. Садржаји обухваћени средњим нивоом образовних постигнућа су по својим карактеристикама сложенији и могућност њихове вишеструке репрезентације утицала је да се на тај начин усвојена знања трајније задрже у меморији ученика.

Како бисмо боље разумели у чему се огледа допринос *GeoGebra* пакета трајности знања на средњем нивоу постигнућа, сматрамо да је важно да се осврнемо на појединачне радове ученика код којих је овај утицај најизраженији.

Први задатак са средњег нивоа представљао је аналогну форму задатка са финалног тестирања. Овим задатком желели смо да проверимо у којој су мери ученици четири месеца након увођења појма мреже коцке у стању да међу датим фигурама препознају ону која одговара мрежи коцке.

Пример 34. *Решење задатка уочавања мреже коцке – поновљено тестирање*



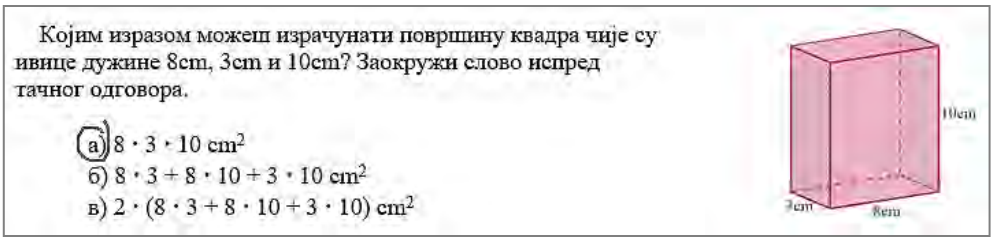
Које од датих мрежа јесу мреже површи коцке? Заокружи слова испред тачних одговора.

У примеру 34 представљена је једна од најчешћих грешака коју су ученици чинили на поновљеном тестирању. Поред тачних решења под а) и г) ученици су неретко као тачан одговор означавали и пример б). Много чешће овакву грешку су понављали ученици контролне групе (25,0%), за разлику од ученика одељења у којима је спроведен експеримент (9,71%). То показује да један број ученика и даље не повезује број страна коцке са бројем квадрата које фигура дата у примеру б) садржи. Мањи број ученика експерименталне групе који је правио овакве грешке можемо повезати са начином рада примењеним са овим ученицима. Они су били успешнији приликом савладавања садржаја који се односио на појам коцке и њене карактеристике, што резултати и потврђују. Такође, ниједан ученик из експерименталне групе није имао проблем да уочи да фигуре под в) и д) нису мреже коцке, док је овакву грешку поновило 7,69% ученика контролне групе. Ови резултати су потврда резултата добијених финалним тестирањем и показују да је вишеструки приказ мреже коцке у софтверу *GeoGebra* учинио да ученици дугорочно овладају појмом мреже.

Циљ другог задатка на средњем нивоу теста поновљеног четири месеца након финалног тестирања био је да утврдимо да ли ученици након одређеног временског периода и даље разумеју на који се начин израчунава површина квадра. Одговори великог броја ученика, приказани у Примеру 35, показују да су након неколико месеци заборавили образац за израчунавање површине квадра и да међу датим изразима не препознају онај који представља тачан одговор. Када упоредимо групе ученика по успешности у решавању овог задатка, уочавамо да је тек 27,88% ученика из контролне групе тачно решило задатак, док је 79,32% ученика експерименталне групе дало тачан одговор.

Пример 35. *Решење задатка израчунавања површине квадра – поновљено тестирање*

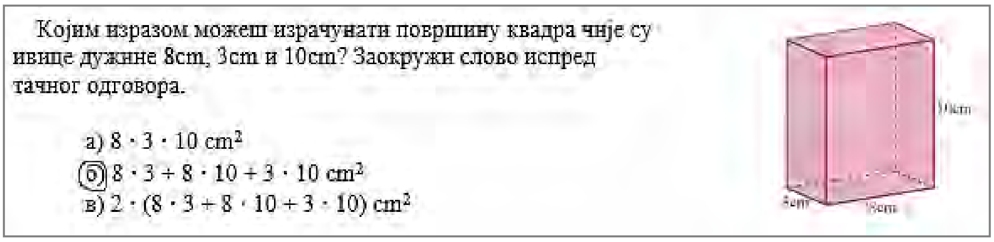
а)



Којим изразом можеш израчунати површину квадра чије су ивице дужине 8cm, 3cm и 10cm? Заокружи слово испред тачног одговора.

[✓ а)] $8 \cdot 3 \cdot 10$ cm^2
б) $8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10$ cm^2
в) $2 \cdot (8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10)$ cm^2

б)



Којим изразом можеш израчунати површину квадра чије су ивице дужине 8cm, 3cm и 10cm? Заокружи слово испред тачног одговора.

а) $8 \cdot 3 \cdot 10$ cm^2
[✓ б)] $8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10$ cm^2
в) $2 \cdot (8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10)$ cm^2

Ако резултате решавања задатка приказаног у Примеру 35 доведемо у везу са поступцима примењеним током савладавања садржаја на часовима математике, долазимо до закључка да је коришћење модела креираних уз помоћ софтвера *GeoGebra* допринело да ученици боље схвате суштину мерења површине. Велики број примера подржаних графичким приказима проблема није захтевао од ученика да меморишу обрасце, већ им је помогао да их дубље разумеју и смислено користе. Са друге стране, у класично организованој настави долази до преранog увођења обрасца који даље води алгоритмизацији, без дубљег схватања самог поступка мерења површине.

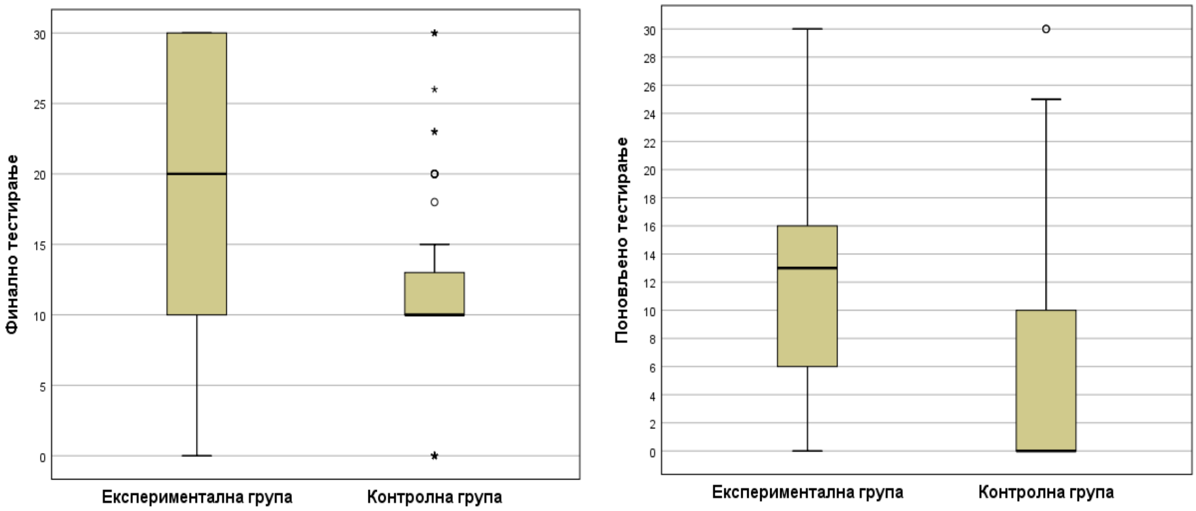
2.1.3. Ефекти примене софтверског пакета *GeoGebra* на трајност знања ученика на напредном нивоу постигнућа

Анализу ефеката примене софтвера *GeoGebra* на трајност знања ученика о садржајима геометрије на напредном нивоу образовних постигнућа започећемо дескриптивном анализом резултата постигнутих на финалном и поновљеном тестирању. Приликом финалног тестирања ученици у експерименталној групи просечно су остварили боље резултате (M = 17,98; SD = 10,84), док су ученици у контролној групи остварили слабије резултате (M = 11,13; SD = 6,88) (Табела 46).

Табела 46. *Дескриптивни показатељи нивоа постигнућа ученика експерименталне и контролне групе на напредном нивоу*

						95% Confidence Interval for Mean	
		N	M	SD	SDE	Lower Bound	Upper Bound
Финално тестирање	Експериментална група	103	17,98	10,84	1,07	15,86	20,10
	Контролна група	104	11,13	6,88	0,67	9,79	12,47
	Укупно	207	14,54	9,68	0,67	13,21	15,87
Поновљено тестирање	Експериментална група	103	12,21	7,87	0,77	10,67	13,75
	Контролна група	104	6,35	7,73	0,76	4,84	7,85
	Укупно	207	9,26	8,32	0,58	8,12	10,40

На тестирању које је обављено четири месеца након реализације експерименталног програма обе групе ученика оствариле су мањи број поена у односу на резултате финалног тестирања. И поред природног процеса заборављања, ученици експерименталне групе постигли су знатно виши просечни резултат (M = 12,21; SD = 7,87) у односу на ученике који су чинили контролну групу (M = 6,35; SD = 7,73). Графички приказ постигнућа обе групе ученика представили смо на Графикону 13.



Графикон 13. *Резултати остварени на финалном и поновљеном тестирању знања ученика на напредном нивоу*

Ради утврђивања постојања статистички значајне разлике у постигнућима ученика оствареним на поновљеном тестирању на напредном нивоу користили смо се двофакторском анализом варијансе. На основу резултата Левеновог теста једнакости варијанси потврђено је да је на поновљеном тестирању задовољена претпоставка о једнакости варијансе (F = 0,192; p = 0,662) (Табела 47).

Табела 47. *Левенов тест једнакости варијанси на напредном нивоу постигнућа*

Dependent Variable: Поновљено тестирање

F	df1	df2	Sig.
0,192	1	205	0,662

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Након што смо уклонили утицај коваријата (резултат иницијалног тестирања) утврдили смо постојање статистички значајне разлике у постигнућима на напредном нивоу између експерименталне и контролне групе ученика (F = 25,778; p = 0,000) (Табела 48). Вредност добијеног парцијалног ета квадрата 0,112 упућује на постојање малог утицаја варијансе на резултате поновљеног тестирања (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). Можемо закључити да се 11,2% варијансе у поновљеном тестирању на напредном нивоу образовних постигнућа може објаснити утицајем независне променљиве у виду примењеног експерименталног програма.

Табела 48. *Анализа коваријансе на напредном нивоу постигнућа*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Поновљено тестирање

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	2610,170[a]	2	1305,085	22,849	0,000	0,183
Intercept	3144,273	1	3144,273	55,048	0,000	0,213
Иницијално тестирање	828,623	1	828,623	14,507	0,000	0,466
Група	1472,406	1	1472,406	25,778	0,000	0,112
Error	11652,216	204	57,119			
Total	32034,000	207				
Corrected Total	14262,386	206				

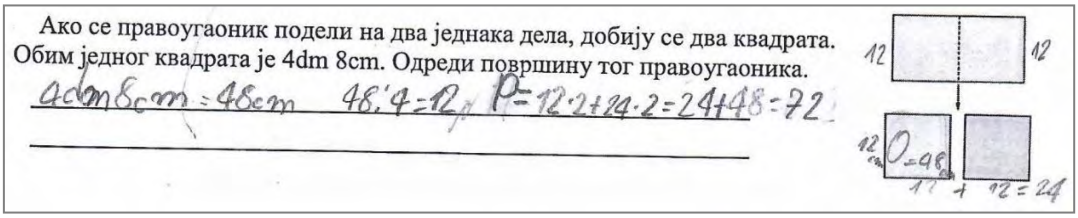
a. R Squared = 0,183 (Adjusted R Squared = 0,175)

Утицај коваријата (постигнућа ученика остварена на напредном нивоу на иницијалном тесту) на њихове резултате на поновљеном тестирању након уклањања утицаја независне променљиве (групе) такође је статистички значајан (F = 14,507; p = 0,000) (Табела 48). Коефицијент парцијалног ета квадрата 0,466 имплицира да постоји средњи утицај експерименталног програма на резултате ученика на поновљеном тестирању. На основу вредности парцијалног ета квадрата закључујемо да је 46,6% варијансе приликом поновљеног тестирања на напредном нивоу образовних постигнућа објашњено утицајем реализованог експерименталног програма.

Са циљем бољег разумевања аспеката у којима је примена софтвера највише допринела повећању трајности знања ученика, анализирали смо и поступке којима су ученици решавали задатке са напредног нивоа образовних постигнућа. Овај вид анализе помогао нам је при доношењу јаснијих закључака о дугорочним бенефитима које пружа овако организована настава.

Првим задатком напредног нивоа постигнућа требало је проверити да ли су ученици четири месеца након обављеног финалног тестирања у стању да са успехом понове поступак израчунавања површине правоугаоника. Када је у питању контролна група, само је мали број ученика (6,73%) са успехом решио цео задатак. Један од разлога за овако лоше резултате можемо пронаћи у чињеници да ученици нису препознали вредност графичког приказа који је дат уз задатак. Анализом радова уочили смо да је свега један ученик, од укупно 104 колико је бројала контролна група, користио графички приказ како би означио односе међу величинама (Пример 36). Међутим, иако је исправно одредио димензије правоугаоника, ученик није израчунао његову површину већ обим.

Пример 36. *Решење задатка израчунавања површине правоугаоника – поновљено тестирање*



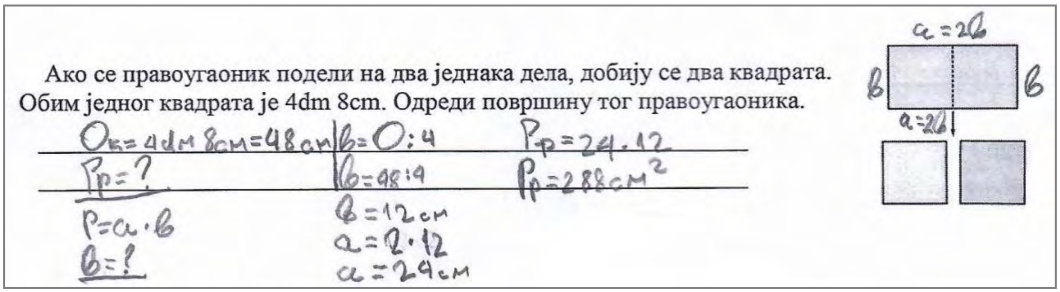
Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 4dm 8cm. Одреди површину тог правоугаоника.

$4dm 8cm = 48cm$ $48 : 4 = 12$ $P = 12 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 24 + 48 = 72$

Са друге стране, ученици експерименталне групе не само да су били успешнији при решавању задатка (76,70%), већ је анализирањем њихових радова уочено да је знатан број ученика непосредно користио слику дату уз задатак како би на њој означили потребне елементе и њихове односе (Пример 37).

Пример 37. *Решење задатка израчунавања површине правоугаоника – поновљено тестирање*

а)



Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 4dm 8cm. Одреди површину тог правоугаоника.

$O_к = 4dм 8cм = 48cм$ | $b = O : 4$ $P_p = 24 \cdot 12$

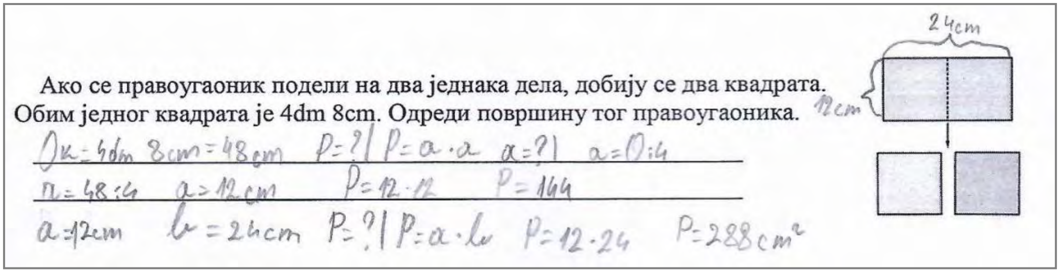
$P_p = ?$ | $b = 48 : 4$ $P_p = 288cм^2$

$P = a \cdot b$ $b = 12cм$

$b = ?$ $a = 2 \cdot 12$

$a = 24cм$

б)



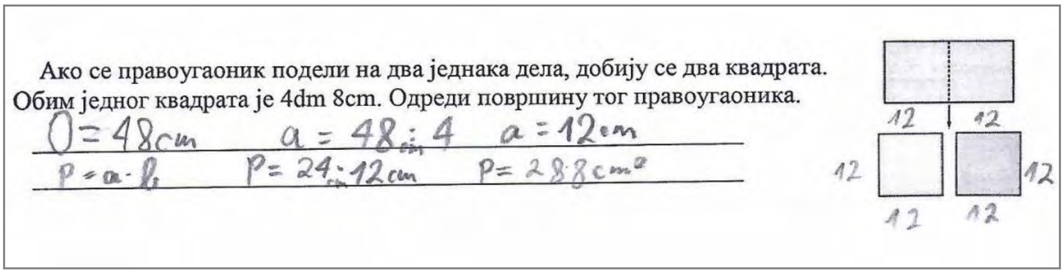
Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 4dm 8cm. Одреди површину тог правоугаоника.

$O_к = 4dm 8cm = 48cm$ $P = ?$ | $P = a \cdot a$ $a = ?$ | $a = O : 4$

$a = 48 : 4$ $a = 12cm$ $P = 12 \cdot 12$ $P = 144$

$a = 12cm$ $b = 24cm$ $P = ?$ | $P = a \cdot b$ $P = 12 \cdot 24$ $P = 288cm^2$

в)



Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 4dm 8cm. Одреди површину тог правоугаоника.

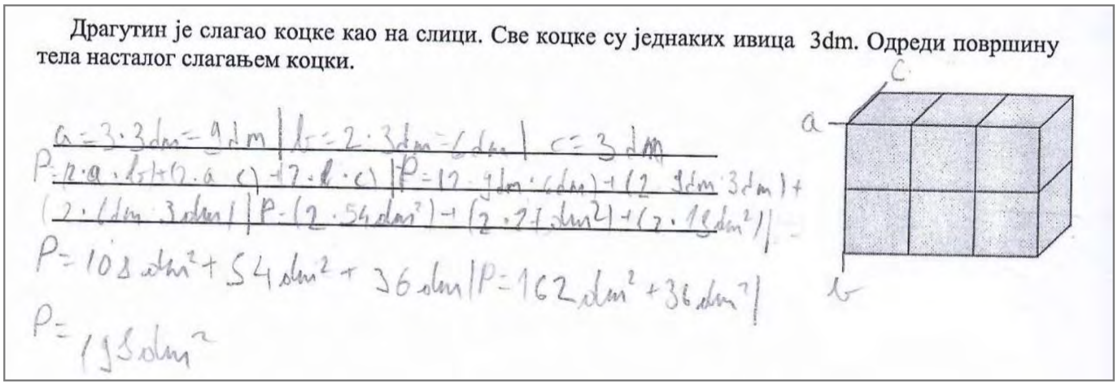
$O = 48cm \quad a = 48cm : 4 \quad a = 12cm$

$P = a \cdot b \quad P = 24cm : 12cm \quad P = 288cm^2$

Заједнички именитељ већини радова у којима су ученици користили слику приликом решавања задатка јесте да су дошли до тачног решења. Та чињеница имплицира да је начин рада у оквиру експерименталног програма оставио снажан утисак на ученике, софтвер *GeoGebra* помогао је ученицима да развију способност визуелизације и теже повезивању проблема са његовим графичким приказом.

Сличну ситуацију запажамо и анализом задатка у којем је требало израчунати површину тела облика квадра насталог слагањем коцки. Имајући у виду да је за дати број коцки задатак могао имати више тачних решења, графички приказ проблема требало је да учини лакшим решавање задатка. Са друге стране, мали број ученика је слику дату уз задатак схватио као врсту олакшице. Као и у претходном задатку, међу ученицима из контролне групе тек њих двоје искористило је слику како би на њој означило основне елементе потребне за решавање задатка (Пример 38), док је незнатно већи број ученика, њих пет (4,81%), успело да тачно реши цео задатак. Најчешћа грешка ученика контролне групе била је што су, као и на финалном тестирању, адитивну особину површине фигура у равни преносили на површину геометријских тела. Најпре би одредили површину једне коцке, а затим добијену вредност површине помножили са шест и тако на погрешан начин рачунали површину квадра.

Пример 38. *Решење задатка израчунавања површине квадра – поновљено тестирање*



Драгутин је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 3dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

$a = 3 \cdot 3dm = 9dm \mid b = 2 \cdot 3dm = 6dm \mid c = 3dm$

$P = (2 \cdot a \cdot b) + (2 \cdot a \cdot c) + (2 \cdot b \cdot c) \mid P = (2 \cdot 9dm \cdot 6dm) + (2 \cdot 9dm \cdot 3dm) +$

$(2 \cdot 6dm \cdot 3dm) \mid P = (2 \cdot 54dm^2) + (2 \cdot 27dm^2) + (2 \cdot 18dm^2) \mid$

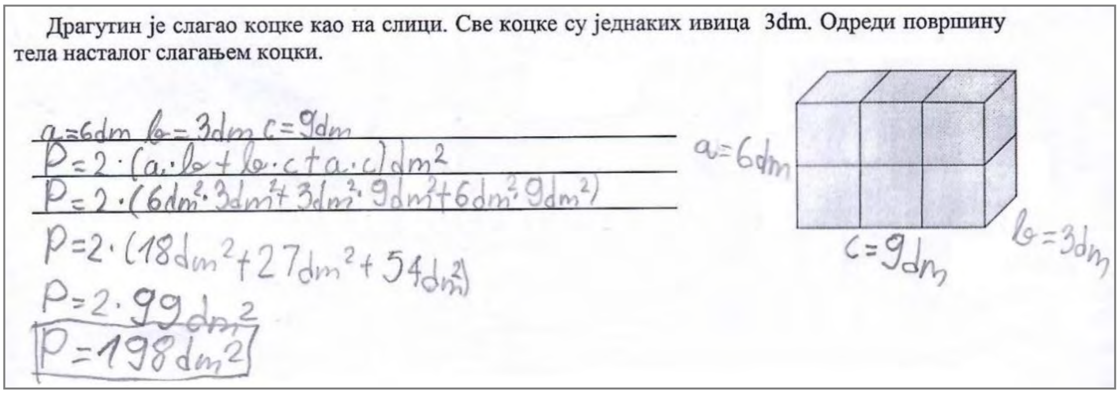
$P = 108dm^2 + 54dm^2 + 36dm \mid P = 162dm^2 + 36dm^2 \mid$

$P = 198dm^2$

Ученици из експерименталне групе били су далеко успешнији при решавању овог задатка од својих вршњака из контролне групе (56,99% ученика у целости је тачно решило задатак). Многи од њих користили су слику како би довели у везу дату дужину ивица коцке и димензије квадра. Визуелна репрезентација помогла је ученицима да потпуније сагледају однос познатих и непознатих вредности и дођу до тачног решења задатка.

Пример 39. *Решење задатка израчунавања површине квадра – поновљено тестирање*

а)



Драгутин је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 3dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

$a = 6dm \quad b = 3dm \quad c = 9dm$

$P = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) dm^2$

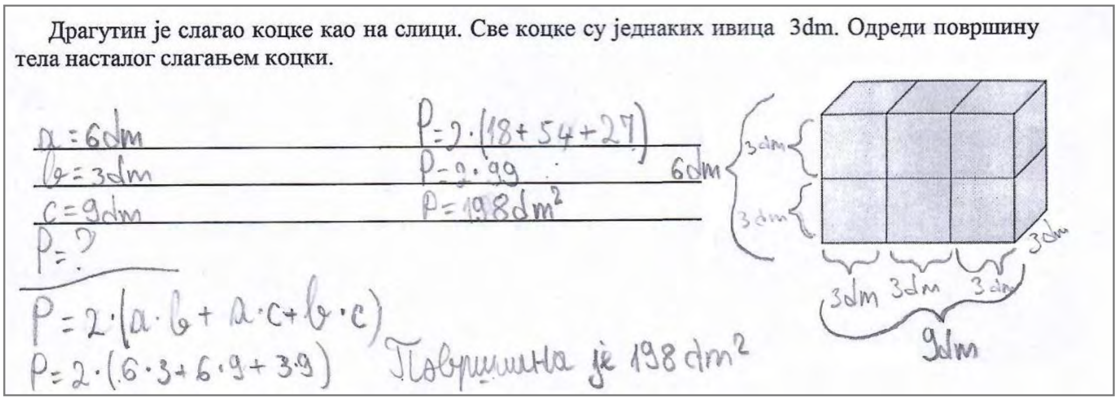
$P = 2 \cdot (6dm^2 \cdot 3dm^2 + 3dm^2 \cdot 9dm^2 + 6dm^2 \cdot 9dm^2)$

$P = 2 \cdot (18dm^2 + 27dm^2 + 54dm^2)$

$P = 2 \cdot 99dm^2$

$\boxed{P = 198dm^2}$

б)



Драгутин је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 3dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

$a = 6dm$

$b = 3dm$

$c = 9dm$

$P = ?$

$P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

$P = 2 \cdot (6 \cdot 3 + 6 \cdot 9 + 3 \cdot 9)$

$P = 2 \cdot (18 + 54 + 27)$

$P = 2 \cdot 99$

$P = 198dm^2$

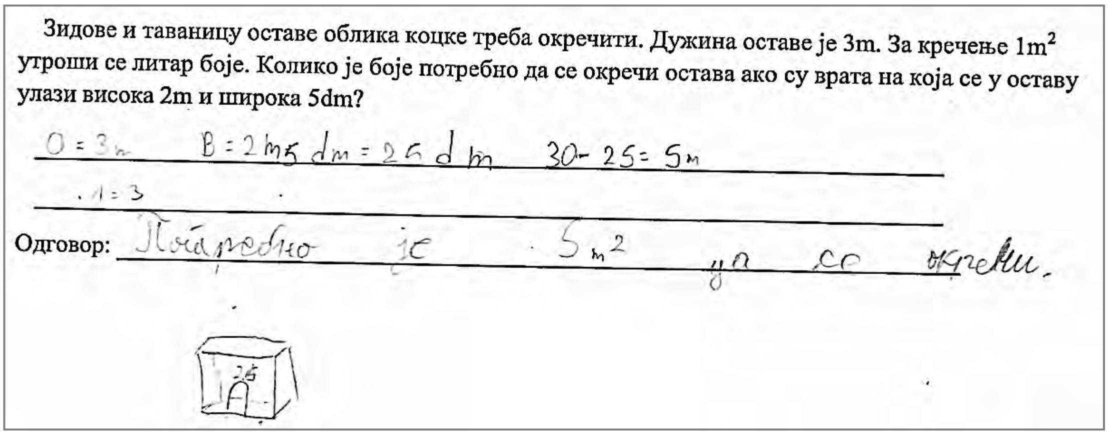
Површина је 198 dm^2

Последњим задатком напредног нивоа образовних постигнућа желели смо да испитамо у којој мери су ученици осетили потребу за визуелизацијом проблема. Уз задатак није дата слика, па је интересантно анализирати у којој мери су ученици исказали склоност ка графичком приказу и да ли им је такав приказ помогао при решавању задатка.

Свега четири ученика контролне групе (3,85%) успела су да тачно ураде цео задатак, док је само њих двоје покушало је да проблем дат у задатку графички представи (Пример 40). Пажњу привлачи чињеница да од ученика који су покушали да креирају визуелни приказ ниједан од њих није успешно решио задатак. Овај податак говори о томе да ученици који су на класичан начин усвајали садржаје геометрије нису у довољној мери оспособљени да исправно користе цртеж као помоћ и подршку за решавање математичког проблема.

Пример 40. *Решење задатка израчунавања површине коцке – поновљено тестирање*

а)



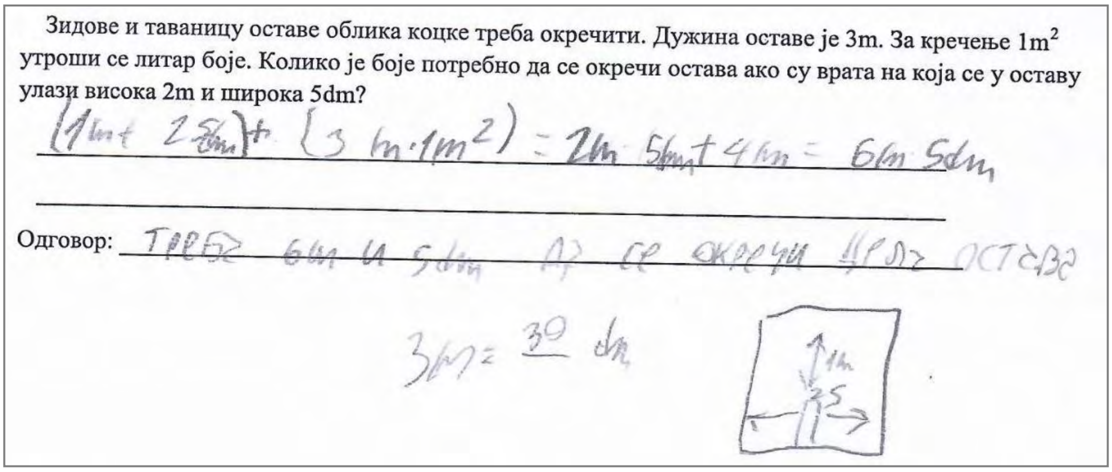
Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење $1m^2$ утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

О = 3m В = 2m 5 dm = 25 dm 30 - 25 = 5m

. 1 = 3

Одговор: Потребно је 5 m^2 да се окречи.

б)



Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење $1m^2$ утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

$(1m + 2\,5dm) + (3\,m \cdot 1m^2) = 2m\,5dm + 4m = 6m\,5dm$

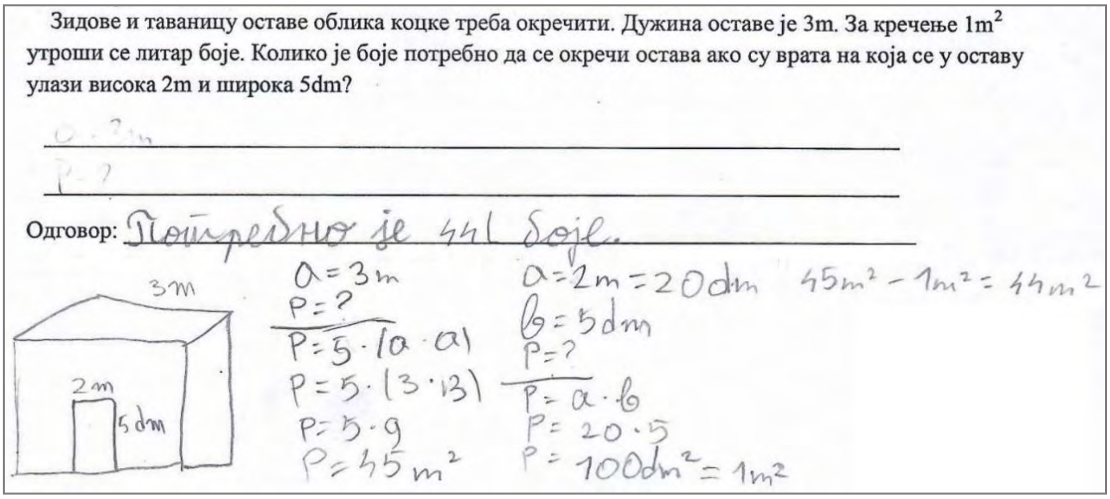
Одговор: Треба 6m и 5dm да се окречи цела остава

$3m = \underline{30}\,dm$

Иако мање успешни при решавању задатка у односу на резултате финалног теста, ученици експерименталне групе су ипак били знатно успешнији у решавању овог задатка од својих вршњака из контролне групе. Задатак је до краја урадило 35,92% ученика, а притом је и значајан број њих до решења дошао уз помоћ графичког приказа (Пример 41).

Пример 41. *Решење задатка израчунавања површине коцке – поновљено тестирање*

а)



Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење $1m^2$ утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

a = 3m

P = ?

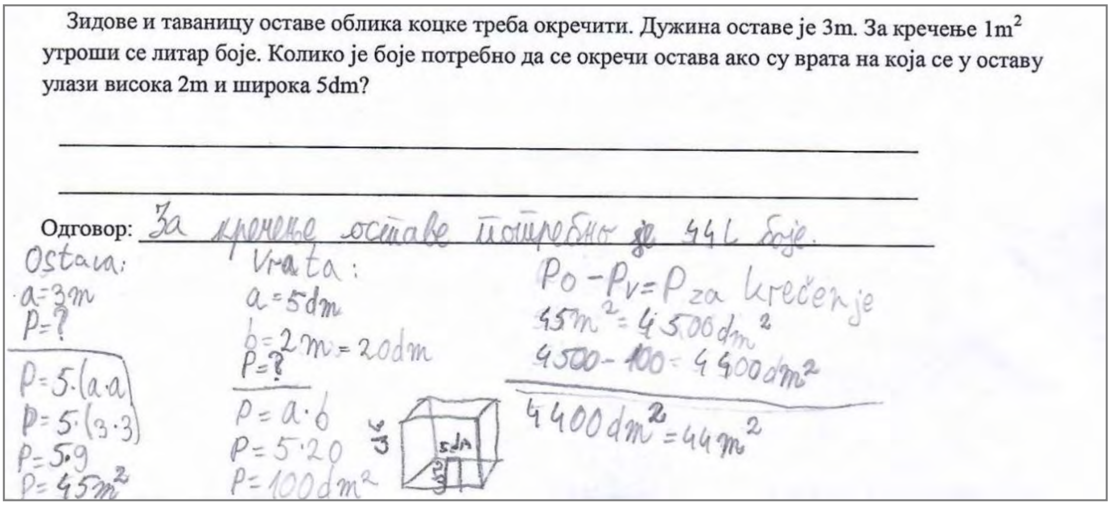
Одговор: Потребно је 44l боје.

$a = 3m$
$P = ?$
$P = 5 \cdot (a \cdot a)$
$P = 5 \cdot (3 \cdot 13)$
$P = 5 \cdot 9$
$P = 45\,m^2$

$a = 2m = 20dm$
$b = 5dm$
$P = ?$
$P = a \cdot b$
$P = 20 \cdot 5$
$P = 100dm^2 = 1m^2$

$45m^2 - 1m^2 = 44m^2$

б)



Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење $1m^2$ утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

Одговор: За кречење оставе потребно је 44l боје.

Ostava:
$a = 3m$
$P = ?$
$P = 5 \cdot (a \cdot a)$
$P = 5 \cdot (3 \cdot 3)$
$P = 5 \cdot 9$
$P = 45m^2$

Vrata:
$a = 5dm$
$b = 2m = 20dm$
$P = ?$
$P = a \cdot b$
$P = 5 \cdot 20$
$P = 100dm^2$

$P_o - P_v = P$ za krečenje
$45m^2 = 4500dm^2$
$4500 - 100 = 4400dm^2$
$4400dm^2 = 44m^2$

***

Захваљујући анализи радова долазимо до закључка да је начин рада оставио дубоки траг на начин размишљања ученика обе групе. Ученици контролне групе ретко повезују геометријске проблеме са њиховом визуелном репрезентацијом, покушавају да их преведу на поље алгебре и тако дођу до решења. Са друге стране, ученици експерименталне групе и после четири месеца од реализације експеримента осећају потребу да у задацима у којима су дате искористе слике на начин који им олакшава уочавање познатих и непознатих величина. У задацима у којима слика није дата, ученици имају тенденцију да проблем учине очигледним покушавајући да га графички представе. Ове чињенице недвосмислено указују на то да је софтвер *GeoGebra* имао позитиван утицај на ученике, повећавајући њихову успешност у решавању оваквих задатака и уопштено гледано приступ проблемима овог типа.

3. Утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на ставове и мишљења ученика о математици

У учењу математике ставови су веома важна варијабла јер ученици који показују позитивне ставове према математици стреме ка томе да испоље и високе математичке способности (Awofala, 2014). У том смислу, трећи задатак који смо поставили приликом утврђивања ефеката примене софтверског пакета био је да испитамо ставове ученика експерименталне групе према примењеном начину рада. Конкретно, желели смо да испитамо да ли је и колико примењени начин рада утицао на промену ученичког поимања почетне наставе математике. Као почетну претпоставку узели смо да *примена софтверског пакета GeoGebra доприноси формирању позитивних ставова и мишљења ученика према математици.*

У сврху извршења овог задатка обавили смо скалирање ставова и анкетирање ученика о математици у два наврата, како бисмо могли да обавимо упоређивање добијених резултата – пре почетка деловања експерименталног програма у експерименталној групи и након деловања експерименталног програма. Скалирање и анкетирање обављени су са циљем да се утврди да ли експериментални програм утиче на промену у ставовима и мишљењима ученика. Желели смо да испитамо:

1) утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на ставове ученика према математици као наставном предмету;
2) утицај примене *GeoGebra* софтвера на мишљења ученика о учењу математике.

3.1. Утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на ставове ученика према математици као наставном предмету

Ставове ученика према математици као наставном предмету испитивали смо коришћењем петостепене скале ставова Ликертовог типа. Скала је садржала 8 ајтема, а ученици су изражавали своје ставове заокруживањем једног од понуђених бројева (1 – *уопште се не слажем*, 2 – *углавном се не слажем*, 3 – *нити се слажем нити се не слажем*, 4 – *углавном се слажем*, 5 – *потпуно се слажем*). Вредност 3 – *нити се слажем нити се не слажем* изражавала је неутралан став ученика према датој тврдњи. Скала је садржала и позитивне (тврдње 1, 2, 3, 5, 6 и 7) и негативне тврдње (тврдње 4 и 8), при чему смо негативно формулисане тврдње рекодирали пре статистичке обраде података (Pallant, 2011).

На основу резултата приказаних у Табели 49 уочава се да су ученици изразили позитивне ставове према математици и приликом првог скалирања које је обављено пре увођења експерименталног програма. Наглашавамо да су негативно формулисане тврдње *Нисам добар/добра у математици* и *Решавање математичких задатака ми није интересантно* рекодиране, док високе просечне вредности указују да је самоперцепција ученика о њиховим математичким способностима на високом нивоу. Посматрано глобално, резултати добијени другим скалирањем имплицирају да је дошло до промене ставова ученика, односно да су под утицајем експерименталног програма изградили позитивније ставове у односу скалирање обављено пре примене *GeoGebra* пакета.

Како бисмо утврдили ефекте примене софтверског пакета на промену ставова ученика према математици као наставном предмету користили смо *t*-тест упарених узорака за тестирање статистичке значајности разлика у ставовима. Сигнификантност добијена тестом указује да код седам ајтема постоје одступања у ставовима, односно да је дошло до промене ставова ученика услед примене софтверског пакета. У питању су ајтеми: *Волим да учим нове ствари из математике* (прво скалирање M = 3,88; SD = 0,902; друго скалирање M = 4,20; SD = 0,696; t = -5,181; p = 0,000), *Математика је један од најважнијих школских предмета* (прво скалирање M = 3,79; SD = 0,977; друго скалирање M = 4,22; SD = 0,760; t = -5,795; p = 0,000), *Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци* (прво скалирање M = 4,21; SD = 0,875; друго скалирање M = 4,45; SD = 0,640; t = -3,859; p = 0,000), *Нисам добар/добра у математици* (прво скалирање M = 4,29; SD = 0,804; друго скалирање M = 4,38; SD = 0,733; t = -2,377; p = 0,019), *Редовно радим домаће задатке из математике* (прво скалирање M = 3,85; SD = 1,070; друго скалирање M = 4,16; SD = 0,896; t = -3,926; p = 0,000), *Волим да решавам задатке из геометрије* (прво скалирање M = 3,84; SD = 1,017; друго скалирање M = 4,15; SD = 0,797; t = -5,043; p = 0,000), *Решавање математичких задатака ми није интересантно* (прво скалирање M = 4,10; SD = 0,898; друго скалирање M = 4,25; SD = 0,787; t = -2,887; p = 0,005). Резултати *t*-теста указују да је повећање оцене ставова у наведеним ајтемима у вези са наставом математике статистички значајно у корист другог скалирања обављеног након реализације експерименталног програма.

Промене вредности у оцени ајтема *Волим да решавам изразе са бројевима* (прво скалирање M = 4,22; SD = 0,860; друго скалирање M = 4,27; SD = 0,851; t = -0,897; p = 0,372) нису релевантне са аспекта статистике, односно не можемо констатовати да су статистички значајне.

Табела 49. *Ставови ученика о математици као наставном предмету пре и након примене GeoGebra софтвера*

Тврдња	Прво скалирање		Друго скалирање		*t*-тест		
	M	SD	*M*	*SD*	t	df	Sig.
Волим да учим нове ствари из математике.	3,88	0,902	4,20	0,696	-5,181	99	0,000
Математика је један од најважнијих школских предмета.	3,79	0,977	4,22	0,760	-5,795	99	0,000
Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци.	4,21	0,875	4,45	0,640	-3,859	100	0,000
Нисам добар/добра у математици.	4,29	0,804	4,38	0,733	-2,377	100	0,019
Редовно радим домаће задатке из математике.	3,85	1,070	4,16	0,896	-3,926	99	0,000
Волим да решавам задатке из геометрије.	3,84	1,017	4,15	0,797	-5,043	100	0,000
Волим да решавам изразе са бројевима.	4,22	0,860	4,27	0,851	-0,897	99	0,372
Решавање математичких задатака ми није интересантно.	4,10	0,898	4,25	0,787	-2,887	98	0,005

У Табели 50 приказани су коефицијенти корелације између карактеристика ученика (независних варијабли општи успех и оцена из математике) и њихових ставова према математици као наставном предмету. Код свих ајтема вредност $r > 0,49$ те постоји велика позитивна корелација између општег успеха и ставова ученика према математици (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). Променљива оцена из математике код ајтема *Математика је један од најважнијих школских предмета* ($r = 0,425$; $p = 0,000$) и *Редовно радим домаће задатке из математике* ($r = 0,461$; $p = 0,000$) има средњу позитивну корелацију, док је код осталих шест ајтема уочена јака позитивна корелација.

Табела 50. *Корелација између варијабли општи успех и оцена из математике и ставова ученика према математици као наставном предмету*

Тврдња	Општи успех		Оцена из математике	
	r	Sig.	r	Sig.
Волим да учим нове ствари из математике.	0,730	0,000	0,568	0,000
Математика је један од најважнијих школских предмета.	0,661	0,000	0,425	0,000
Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци.	0,708	0,000	0,706	0,000
Нисам добар/добра у математици.	0,884	0,000	0,818	0,000
Редовно радим домаће задатке из математике.	0,670	0,000	0,461	0,000
Волим да решавам задатке из геометрије.	0,784	0,000	0,640	0,000
Волим да решавам изразе са бројевима.	0,788	0,000	0,640	0,000
Решавање математичких задатака ми није интересантно.	0,816	0,000	0,690	0,000

За утврђивање постојања разлика у ставовима ученика различитог општег успеха према математици користили смо једнофакторску анализу варијанси (ANOVA). У Табели 81 приказани су ставови ученика пре увођења експерименталног програма. Резултати ANOVA теста показују да разлика између ставова ученика који су на крају претходне школске године постигли различит успех има карактер статистичке значајности. Овакве ставове ученика можемо довести у везу са постигнутим општим успехом. Очекивано, најпозитивније ставове према математици као наставном предмету исказују ученици са одличним општим успехом (Наход, 1997). Иза њих налазе се ученици са врлодобрим општим успехом, док је број ученика са општим успехом добар и довољан исувише мали (свега три ученика) да бисмо на основу њихових резултата могли изводити генерализације.

Табела 51. *Ставови ученика према математици као наставном предмету у зависности од општег успеха пре увођења експерименталног програма*

Тврдња	Довољан		Добар		Врлодобар		Одличан		ANOVA	
	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	F	Sig.
Волим да учим нове ствари из математике.	1,00	.	2,00	0,000	2,71	1,069	4,17	0,556	32,935	0,000
Математика је један од најважнијих школских предмета.	4,00	.	1,50	0,707	2,43	1,284	4,04	0,645	23,875	0,000
Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци.	4,00	.	1,00	.	3,93	1,328	4,29	0,704	6,038	0,001
Нисам добар/добра у математици.	3,00	.	3,00	1,414	3,21	1,311	4,48	0,502	17,369	0,000
Редовно радим домаће задатке из математике.	2,00	.	1,50	0,707	2,38	1,387	4,14	0,697	24,842	0,000
Волим да решавам задатке из геометрије.	2,00	.	1,00	0,000	2,50	1,160	4,13	0,647	32,172	0,000
Волим да решавам изразе са бројевима.	2,00	.	2,00	0,000	3,29	1,204	4,46	0,525	24,468	0,000
Решавање математичких задатака ми није интересантно.	3,00	.	1,00	0,000	3,07	1,141	4,33	0,562	29,802	0,000

Након реализације експерименталног програма није могуће утврдити одступања у ставовима ученика према математици у односу на групе формиране према општем успеху постигнутом на крају претходне школске године. Резултати ANOVA теста показују да и на другом скалирању постоје статистички значајне разлике у ставовима ученика са различитим општим успехом по свим ајтемима (Табела 52). Резултати приказани у Табели 52 имплицирају да је дошло до формирања позитивнијих ставова код свих група ученика. Приметно је да су ученици са општим успехом довољан и добар исказали бољи став код ајтема *Волим да учим нове ствари из математике* у односу на прво скалирање, на основу чега можемо закључити да се њихов однос према настави математике побољшао након уведеног програма. Високе вредности свих група ученика у оцени тврдње *Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци* указују да су ученици става да између дечака и девојчица не постоје разлике када су образовна постигнућа из математике у питању.

Најмања вредност промене ставова уочава се код ајтема *Волим да решавам изразе са бројевима*. Код ученика са општим успехом довољан, добар и одличан готово да није било промене у ставовима, док је евидентно формирање позитивнијих ставова само код ученика са успехом врлодобар (прво скалирање M = 3,29; SD = 1,204; друго скалирање M = 3,57; SD = 1,284). Будући да се садржај експерименталног програма није односио на бројеве и рачунске операције могли бисмо рећи да је овакав резултат донекле и очекиван.

Табела 52. *Ставови ученика према математици као наставном предмету у зависности од општег успеха након примене софтверског пакета GeoGebra*

Тврдња	Довољан		Добар		Врлодобар		Одличан		ANOVA	
	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	F	Sig.
Волим да учим нове ствари из математике.	2,00	.	3,00	1,414	3,64	0,929	4,35	0,505	13,255	0,000
Математика је један од најважнијих школских предмета.	3,00	.	2,50	2,121	3,38	1,044	4,40	0,494	16,370	0,000
Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци.	4,00	.	3,00	1,414	4,43	0,514	4,49	0,609	4,058	0,009
Нисам добар/добра у математици.	2,00	.	3,00	1,414	3,69	1,032	4,54	0,501	16,068	0,000
Редовно радим домаће задатке из математике.	2,00	.	3,00	1,414	2,93	1,328	4,38	0,557	21,134	0,000
Волим да решавам задатке из геометрије.	3,00	.	2,00	0,000	3,31	1,109	4,35	0,550	18,737	0,000
Волим да решавам изразе са бројевима.	2,00	.	2,00	0,000	3,57	1,284	4,45	0,546	17,777	0,000
Решавање математичких задатака ми није интересантно.	4,00	.	1,50	0,707	3,42	1,084	4,44	0,499	24,658	0,000

У Табели 53 дати су ставови ученика у односу на оцену из математике пре увођења експерименталног програма. Резултати ANOVA теста показали су да, сем код ајтема *Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци* (F = 2,431; p = 0,070), код свих ајтема разлика између ставова ученика који имају различиту оцену из математике је статистички значајна. Као и у прећашњем случају, овакве вредности ставова можемо довести у везу са оценама које ученици имају из математике. Приметно је да су најпозитивније ставове према математици као наставном предмету показали ученици који из тог предмета имају оцену одличан (5). Иза њих налазе се ученици са оценом врлодобар (4), док су ученици са оценама добар (3) и довољан (2) исказали релативно неповољне ставове према настави математике.

Табела 53. *Ставови ученика према математици као наставном предмету у зависности од оцене пре увођења експерименталног програма*

Тврдња	Довољан (2)		Добар (3)		Врло добар (4)		Одличан (5)		ANOVA	
	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	F	Sig.
Волим да учим нове ствари из математике.	1,80	0,837	2,44	0,882	3,82	0,664	4,28	0,451	52,141	0,000
Математика је један од најважнијих школских предмета.	1,80	1,304	2,33	1,000	3,73	0,883	4,12	0,569	28,890	0,000
Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци.	3,75	1,893	3,56	1,509	4,32	0,568	4,29	0,739	2,431	0,070
Нисам добар/добра у математици.	2,80	1,304	2,89	1,054	4,41	0,503	4,51	0,504	28,119	0,000
Редовно радим домаће задатке из математике.	1,60	0,548	2,25	1,165	3,90	0,889	4,18	0,721	28,173	0,000
Волим да решавам задатке из геометрије.	1,20	0,447	2,44	1,014	3,91	0,811	4,18	0,575	44,425	0,000
Волим да решавам изразе са бројевима.	1,60	0,548	3,56	0,882	4,27	0,456	4,50	0,535	46,598	0,000
Решавање математичких задатака ми није интересантно.	1,80	0,837	2,89	1,054	4,09	0,684	4,40	0,494	40,127	0,000

Након реализованог експерименталног програма није могуће утврдити евентуална одступања у ставовима ученика према математици као наставном предмету у односу на групе ученика формиране према оцени (Табела 54). Уочљиво је да су оцене ставова ученика са оценом довољан (2) и добар (3) за ајтеме *Волим да учим нове ствари из математике* и *Волим да решавам задатке из геометрије* више приликом другог скалирања, што указује да се њихов однос према настави математике променио у позитивном смислу током реализације експеримента. Заједнички именитељ ученика са оценом довољан (2), добар (3) и врлодобар (4) јесте да сви имају највиши став на другом скалирању у оцени тврдње *Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци*. Ученици са оценом одличан (5) највиши став исказали су приликом оцене тврдње *Нисам добар/добра у математици* (M = 4,59; SD = 0,495). Будући да је овај ајтем рекодиран, можемо закључити да је код ученика са оценом одличан (5) из математике у великој мери изражена свест о сопственим способностима у вези са математиком. Са друге стране, најнижи став ученици са истом оценом изразили су код ајтема *Волим да решавам задатке из геометрије* (M = 4,36; SD = 0,569). Ако упоредимо са резултатима првог скалирања, запазићемо да је и код овог ајтема дошло до формирања позитивнијих ставова под утицајем експерименталног програма, не само код ученика са оценом одличан (5), већ и међу ученицима са слабијим оценама из математике.

Табела 54. *Ставови ученика према математици као наставном предмету у зависности од оцене након примене GeoGebra софтвера*

Тврдња	Довољан (2)		Добар (3)		Врло добар (4)		Одличан (5)		ANOVA	
	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	F	Sig.
Волим да учим нове ствари из математике.	2,80	1,095	3,56	0,882	4,18	0,501	4,41	0,495	16,639	0,000
Математика је један од најважнијих школских предмета.	2,40	1,140	3,38	0,916	4,27	0,456	4,45	0,501	26,067	0,000
Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци.	4,00	1,225	4,33	0,500	4,59	0,590	4,45	0,610	1,300	0,279
Нисам добар/добра у математици.	2,80	1,095	3,50	0,926	4,41	0,503	4,59	0,495	21,806	0,000
Редовно радим домаће задатке из математике.	2,20	1,095	3,00	1,225	4,23	0,685	4,40	0,579	23,889	0,000
Волим да решавам задатке из геометрије.	2,20	0,447	3,33	1,000	4,35	0,489	4,36	0,569	26,713	0,000
Волим да решавам изразе са бројевима.	1,80	0,447	3,78	1,093	4,32	0,568	4,49	0,533	33,159	0,000
Решавање математичких задатака ми није интересантно.	2,25	1,258	3,33	1,000	4,37	0,496	4,46	0,502	25,143	0,000

Узимајући у обзир све претходно наведено можемо закључити да су ученици пре укључивања експерименталног програма имали умерено позитиван став према математици као наставном предмету, док је примена софтверског пакета *GeoGebra* иницирала стварање још позитивнијих ставова. До сличног закључка дошли су Росид и Умбара (Rosyid, Umbara, 2019) испитујући ставове ученика о настави математике потпомогнутој *GeoGebra* софтвером. Наиме, утврдили су да након периода учења проведеног уз коришћење софтвера ученици са неутралним ставом исказују умерено позитивне ставове према настави математике.

Реализација експерименталног програма која је укључивала употребу софтверског пакета *GeoGebra* у учењу геометрије остварила је утицај на формирање позитивнијих ставова свих ученика, без обзира на пол, општи успех или оцену из математике. Од посебног значаја је позитиван ефекат примене софтвера на ставове ученика са просечним и исподпросечним постигнућима. Софтвер је деловао на ученике да створе јаснију слику о математици и значају који може имати у решавању свакодневних проблемских ситуација, што је само још једна потврда вредности његове примене.

3.2. Утицај примене софтверског пакета *GeoGebra* на мишљења ученика о учењу математике

Поред ставова, истраживањем смо желели да испитамо да ли примена *GeoGebra* софтвера позитивно делује на промену мишљења ученика о начинима на које уче математику и о узроцима проблема са којима се сусрећу у савладавању математичких садржаја. С тим у вези, извршили смо анкетирање ученика анкетним листом који се састојао од десет тврдњи које је ученици требало да допуне избором адекватног одговора који осликава њихова мишљења о учењу математике. Анкетирање је обављено у два наврата, како би било могуће установити да ли су се мишљења ученика у вези са учењем математике под утицајем примене софтвера променила. Прво анкетирање реализовали смо пре почетка деловања експерименталног програма у експерименталној групи, а друго након завршетка експерименталног програма.

Прва тврдња у анкетном листу односила се на емоције које преовладавају код ученика током часова математике. Током првог анкетирања на питање како се осећају током часа математике највећи проценат ученика одговорио је да су опуштени (41,7%), затим да се осећају срећно (38,8%), док је проценат ученика код којих на часовима математике преовладавају непријатна осећања мањи (Табела 55). Иако вредност *t*-теста упарених узорака указује да разлике у мишљењима ученика између првог и другог анкетирања нису статистички значајне, приликом првог анкетирања 12,6% ученика изразило је несигурност као најдоминантније осећање током часа математике, а на другом анкетирању то је учинило свега 5,8% ученика. Разлог смањењу броја ученика који се осећају несигурно и уплашено на часовима математике може се пронаћи у начину рада са *GeoGebra* софтвером који је подразумева висок степен визуелизације садржаја. Чињеница да су ученици били у прилици да на часу истражују потенцијална решења уместо запамћивања поступка решавања и коришћења унапред задатих образаца допринела је да се већи проценат њих осећа опуштено и срећно него што је то случај приликом првог анкетирања.

Табела 55. *Мишљења ученика о томе како се осећају на часовима математике*

Тврдња		Опуштено		Уплашено		Срећно		Несигурно		Ништа од понуђеног		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
На часу математике осећам се	Прво анкетирање	43	41,7	2	1,9	40	38,8	13	12,6	1	1,0	1,325	97	0,188
	Друго анкетирање	47	45,6	1	1,0	42	40,8	6	5,8	4	3,9			

Приликом првог анкетирања, највећи проценат ученика оценио је да математику довољно добро разуме пратећи наставу на часу у школи (43,7%) (Табела 56), затим следе одговори ученика да боље разумеју садржаје вежбајући математичке задатке са укућанима (24,3%), али је и велики проценат ученика који садржаје разумеју захваљујући томе што похађају приватне часове математике (14,6%). На другом анкетирању дошло је до повећања процента ученика који математику разумеју захваљујући редовној настави (48,5%) и вежбању са другом/другарицом (прво анкетирање 10,7%, друго анкетирање 14,6%). Разлог томе може се пронаћи у чињеници да је ученицима једноставније да реше проблем када је дата његова графичка репрезентација, захваљујући чему могу да у сарадњи са вршњацима лакше декомпонују проблем и дођу до потенцијалног решења.

Статистичку значајност разлике утврдили смо *t*-тестом (t = 2,064; p = 0,042) и добијена вредност указује да је дошло до позитивне промене мишљења ученика након примене експерименталног програма (Табела 56). Рад у динамичном окружењу софтвера *GeoGebra* утицао је на ученике да боље разумеју математику смањујући потребу за спољним видовима подршке, било да се она огледа у виду помоћи чланова породице или кроз похађање приватних часова.

Табела 56. *Потреба ученика за додатном подршком у учењу математике*

Тврдња		Редовно пратим у школи		Идем на приватне часове		Вежбам са другом		Вежбам са укућанима		Ништа од понуђеног		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
Математику боље разумем када	Прво анкетирање	45	43,7	15	14,6	11	10,7	25	24,3	4	3,9	2,064	95	0,042
	Друго анкетирање	50	48,5	9	8,7	15	14,6	22	21,4	2	1,9			

На првом анкетирању 41,7% ученика исказало је мишљење да најмање потешкоћа имају приликом учења садржаја из области *Бројеви и операције са њима* (Табела 57), 12,6% из области *Геометрија*, 24,3% из области *Разломци*, односно 15,5% из области *Мерење и мере*. Након завршетка експерименталног програма, дошло је до промене у мишљењу ученика у корист области *Геометрија* и *Мерење и мере*, за шта је директно заслужан примењени начин рада. Будући да су садржаји поменутих области били обухваћени експерименталним програмом, то је и њихово методичко обликовање уз употребу *GeoGebra* софтвера утицало да ученици боље разумеју геометријске појмове и поступке мерења и боље овладају јединицама мере. Оно што је важно јесте да су позитивне промене утврђене резултатима *t*-теста упарених узорака статистички значајне (t = -1,991; p = 0,049).

Табела 57. *Област математике у којој ученици имају најмање потешкоћа приликом савладавања садржаја*

Тврдња		Бројеви и операције са њима		Геометрија		Разломци		Мерење и мере		Ништа од понуђеног		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
Област математике коју најбоље разумеш је	Прво анкетирање	43	41,7	13	12,6	25	24,3	16	15,5	4	3,9	-1,991	97	0,049
	Друго анкетирање	35	34,0	20	19,4	21	20,4	18	17,5	4	3,9			

Четвртом тврдњом у анкетном листу желели смо да ученици процене колико често вежбају задатке из математике (Табела 58). Резултати анкетирања указују да је дошло до статистички значајне промене у мишљењима ученика (t = 2,756; p = 0,007), односно да се након спроведеног експеримента повећао број ученика који математичке задатке вежбају свакодневно (прво анкетирање 27,2%; друго анкетирање 33,0%) и на седмичном нивоу (прво анкетирање 49,5%; друго анкетирање 53,4%), док се број ученика који вежбају само пред проверу знања (прво анкетирање 14,6%; друго анкетирање 10,7%) и који не вежбају (прво анкетирање 3,9%; друго анкетирање 2,9%) смањио. Може се закључити да су измењен начин рада, динамично окружење софтвера *GeoGebra* и могућност експериментисања мотивисали ученике да промене свој приступ учењу математике. Јављање позитивних осећања на часовима математике и чињеница да боље разумеју садржаје геометрије подстичу ученике да се радије баве решавањем математичких задатака.

Табела 58. *Степен учесталости вежбања математичких задатака*

Тврдња		Свакога дана		Једном недељно		Пред контролну вежбу		Не вежбам задатке		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
Задатке из математике вежбам	Прво анктирање	28	27,2	51	49,5	15	14,6	4	3,9	2,756	97	0,007
	Друго анкетирање	34	33,0	55	53,4	11	10,7	3	2,9			

У Табели 59 приказани су резултати првог анкетирања у којем је 36,9% ученика навело да када наиђу на математички задатак који не могу одмах да реше наставе да покушавају, 40,8% њих тражи помоћ од учитељице, 11,7% ученика пита за помоћ друга/другарицу, а њих 2,9% одустане. Премда нема статистички значајне разлике у мишљењима ученика по овом питању, примећујемо да је експериментални програм остварио позитиван утицај на ученике будући да је приликом другог анкетирања њих 41,7% одговорило да наставља самостално да покушава да пронађе решење проблема, док се 15,5% ученика обраћа за помоћ другу или другарици. Ову промену мишљења ученика можемо довести у везу са визуелним репрезентацијама задатака обухваћених садржајем експерименталног програма. Сваки од задатака је био приказан графички путем софтверског пакета, охрабрујући тако ученике да покушају самостално или уз помоћ вршњака да га реше, што се последично одразило на то да се проценат ученика који приликом решавања задатака подршку траже од учитељице смањи на 35,0%.

Табела 59. *Упорност ученика у решавању задатака из математике*

Тврдња		Наставим да покушавам		Питам за помоћ учитељицу		Питам за помоћ друга		Одустанем		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
Када наиђем на задатак који не могу одмах да решим	Прво анкетирање	38	36,9	42	40,8	12	11,7	3	2,9	0,815	94	0,417
	Друго анкетирање	43	41,7	36	35,0	16	15,5	4	3,9			

С обзиром на најчешће заступљену активност коју учитељ обавља док ученицима објашњава наставне садржаје, велики број ученика је приликом иницијалног анкетирања изнео мишљење да математичке садржаје најбоље разуме када их учитељ записује на табли (42,7%). Како је током трајања експерименталног програма акценат био на коришћењу софтерског пакета уз приказивање креираних садржаја, тако су и ученици приликом финалног анкетирања променили мишљење и одговорили да математику најбоље разумеју када је дат динамични приказ проблема путем пројектора (прво анкетирање 29,1%; друго анкетирање 38,8%). Добијена вредност *t*-теста упарених узорака указује да разлике у мишљењима ученика у вези са овим питањем нису статистички значајне (Табела 60), али су значајне са аспекта промене парадигме учења. Након искуства учења уз употребу софтвера у ком су имали прилику да на динамичним моделима прате настале промене (рецимо формирање мреже коцке или квадра), ученици препознају бенефите које пружа и дају предност *GeoGebra* софтверу у односу на друге облике учења.

Табела 60. *Мишљења ученика о томе на основу којих активности учитеља најбоље разумеју математику*

Тврдња		Објашњава само речима		Користи реалне предмете		Прикаже задатак на пројектору		Пише на табли		Ништа од понуђеног		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
Најбоље разумем математику када учитељ	Прво анкетирање	4	3,9	19	18,4	30	29,1	44	42,7	3	2,9	1,029	99	0,306
	Друго анкетирање	2	1,9	20	19,4	40	38,8	39	37,9	1	1,0			

Када је у питању тврдња која се односила на активност ученика у процесу учења на часовима математике, на првом анкетирању више од половине ученика је изјавило да се јављају само када знају одговор на питање учитеља (51,5%) (Табела 61). Иза њих се налазе ученици који се јављају само када им нешто није јасно (35,9%), док је значајан број ученика исказао пасивност током часова математике (6,8%). После експерименталног програма проценат ученика који се јављају само када знају одговор готово је уједначен (50,5%), али се проценат ученика који су охрабрени да на часу питају када им нешто није јасно знатно повећао (41,7%) на рачун ученика који се не јављају како би дали одговор на питање учитеља (2,9%). То повећање је статистички значајно, на шта нам указује вредност примењеног *t*-теста (t = 2,809; p = 0,006). Овакве резултате можемо повезати са поједностављеним приказом који *GeoGebra* обезбеђује. Радом уз помоћ софтвера ученици могу пратити сваки корак у решавању проблема, по потреби зауставити процес решавања и вратити се на претходни корак. То је допринело да се ученици осећају слободније да се активно укључе у рад на часу и поставе питање када имају одређених нејасноћа у вези са садржајем.

Табела 61. *Активност ученика у процесу учења на часовима математике*

Тврдња		Јављам се само кад ми нешто није јасно		Јављам се само када знам одговор на питање		Не јављам се		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
На часовима математике	Прво анкетирање	37	35,9	53	51,5	7	6,8	2,809	95	0,006
	Друго анкетирање	43	41,7	52	50,5	3	2,9			

При првом анкетирању чак 71,8% процената ученика мишљења је да на часовима математике искључиво овладавају алгоритмима који служе за решавање постављених задатака (Табела 62). Са друге стране, само 21,4% ученика оценило је да се решавањем математичких задатака заправо оспособљавају да реше неке проблемске ситуације на које се математика може применити. О томе колико је употреба софтверског пакета допринела промени мишљења ученика говори статистички значајна разлика у резултатима добијеним другим анкетирањем у корист ученика који су мишљења да на часовима математике уче како да примене математику на решавање проблема (t = -4,869; p = 0,000). Оваквој промени мишљења код знатног броја ученика допринео је приступ примењен током експерименталног програма и велики број задатака из свакодневног живота који су моделовани уз коришћење софтвера. Ученици су на очигледан начин могли да закључују о односима мерних јединица који су реално приказани, те тако стекну исправну менталну слику.

Табела 62. *Мишљења ученика о томе које вештине развијају на часовима математике*

Тврдња		Решимо задатке		рименимо математику на решаван проблема		*t*-тест		
		N	%	N	%	t	df	Sig.
На часовима математике учимо како да	Прво анкетирање	74	71,8	22	21,4	-4,869	95	0,000
	Друго анкетирање	54	52,4	46	44,7			

У оквиру тврдње која се односила на област математике коју ученици најслабије разумеју велики број ученика исказао је мишљење да не постоји област са којом имају потешкоће при учењу (прво анкетирање 20,4%; друго анкетирање 29,1%). Ученици који су одабрали неку од области математике најчешће су бирали *Геометрију* (прво анкетирање 37,9%; друго анкетирање 28,2%) и у оквиру ове области је запажена највећа промена. До промена у мишљењима ученика дошло је и у другим областима, међутим оне немају карактер статистичке значајности (Табела 63). Може се закључити да је до позитивних промена у мишљењу ученика у односу на садржаје геометрије и мерења довео рад у промењеном окружењу у односу на начин рада на који су навикли. Статичне приказе заменили су динамични, готово сваки задатак је имао своју визуелну репрезентацију, а све то је помогло ученицима који имају потешкоћа да замисле просторне односе међу објектима и учини ове садржаје мање сложеним.

Табела 63. *Потешкоће ученика у учењу у односу на област садржаја*

Тврдња		Бројеви и операције са њима		Геометрија		Разломци		Мерење и мере		Ништа од понуђеног		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
Област математике коју најслабије разумеш је	Прво анкетирање	7	6,8	39	37,9	13	12,6	17	16,5	21	20,4	-1,603	96	0,112
	Друго анкетирање	10	9,7	29	28,2	18	17,5	12	11,7	30	29,1			

Последњом тврдњом у анкетном листу ученици су у првом анкетирању изразили мишљење да облици спољашње мотивације (добијање добре оцене (20,4%) и похвале учитеља/родитеља (20,4)) умногоме утичу на разлоге због којих уче математику (Табела 64). Позитивне промене настале под утицајем експерименталног програма односе се на поље унутрашње мотивације, будући да је, за разлику од првог, на другом анкетирању више ученика одговорило да математику учи зато што је воли (прво анкетирање 36,9%; друго анкетирање 44,7%). Захваљујући пријатном радном окружењу *GeoGebra* софтвера дошло је до позитивних промена у мишљењу и код ученика који учење математике не доживљавају као пријатну активност, јер се број ученика који математику уче зато што морају и оних који је не уче смањио у односу на иницијално анкетирање. Напоменимо да ни на овом питању није уочена статистички значајна разлика.

Табела 64. *Мишљења ученика о разлозима због којих уче математику*

Тврдња		Да бих добио добру оцену		Зато што волим		Да бих добио похвалу		Зато што морам		Не учим је		*t*-тест		
		N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	t	df	Sig.
Математику учим	Прво анкетирање	21	20,4	38	36,9	21	20,4	13	12,6	7	6,8	1,238	95	0,219
	Друго анкетирање	18	17,5	46	44,7	17	16,5	10	9,7	5	4,9			

На темељу добијених резултата можемо закључити да употреба *GeoGebra* софтвера на садржајима геометрије у великој мери утиче на формирање позитивнијих ставова и позитивне промене мишљења ученика према математици, те их сматрамо веома значајним. Резултати указују на позитивне ефекте примене софтверског пакета у визуелизацији и побољшању разумевања садржаја геометрије, што се последично одражава и на ставове и мишљење ученика о математици. До највеће промене дошло је у ставовима ученика о математици као једном од најважнијих школских предмета. Томе је допринела изразита очигледност која је доминирала током реализације експерименталног програма, када су ученици могли да се упознају са могућностима практичне примене математике. Настава математике не своди се на овладавање поступцима израчунавања, већ оспособљава ученике да промишљају о корацима које је потребно предузети како би се одређена препрека савладала и проблем решио. Софтвер *GeoGebra* приближио је математику и ученицима који имају просечна и исподпросечна постигнућа, дајући им шансу да се активно укључе у процес учења конструишући тако сопствена знања. Све ово довело је до позитивних промена у односу ученика према учењу математике, а то потврђују и постигнути резултати тестирања знања.

Имајући на уму да се важност добијених резултата скалирања и анкетирања ученика огледа у пружању шире слике о значају и утицају примене софтвера приликом реализације наставних садржаја, прихватамо почетну претпоставку да *софтверски пакет GeoGebra доприноси формирању позитивних ставова и мишљења ученика према математици*.

Овакав наш закључак у сагласју је са резултатима других истраживача који су се бавили испитивањем промене ставова ученика под утицајем примене *GeoGebra* софтвера. Аканму (Akanmu, 2016) је у свом истраживању утврдио да интеграција *GeoGebra* пакета у наставу има позитивне ефекте не само на исходе учења ученика, већ истовремено и на њихов однос према математици. При поређењу ставова ученика пре и након третмана који је укључивао примену софтвера, резултати су показали да су ставови ученика према математици били знатно побољшани. Том приликом дошло је до одбацивања почетне хипотезе да став ученика према математици не зависи битно од њиховог познавања рада у *GeoGebra* пакету јер је откривено да добра оспособљеност за рад у пакету афирмативно утиче на став који испољавају у односу на математику као наставни предмет. Мурни, Сариаса и Ардана (Murni, Sariyasa, Ardana, 2017) као закључак који је проистекао из спроведеног истраживања са паралелним групама наводе да се способност ученика за решавање математичких проблема и ставови према математици заснованој на моделу учења путем открића уз асистенцију *GeoGebra* пакета налазе на много вишем нивоу у односу на ученике који се математиком баве на класичан начин. Дошли су до закључка да је приказивањем путем софтвера *GeoGebra* пажња ученика усмерена на конкретан проблем, пружајући тако реалнију слику која активира сва чула ученика и буди им веће интересовање.

4. Ставови ученика о учењу геометрије применом софтверског пакета *GeoGebra*

Образовна постигнућа ученика у великој мери одређена су ставовима ученика према учењу и настави. У складу са тим, у оквиру испитивања ефеката примене софтверског пакета на постигнућа ученика, желели смо да утврдимо ставове ученика експерименталне групе о томе да ли је примењени начин рада допринео да на лакши и ефикаснији начин усвоје садржаје обухваћене програмом. У остваривању тог циља, пошли смо од претпоставке да *примена софтверског пакета GeoGebra доприноси формирању позитивних ставова ученика према учењу геометрије.*

Реализовали смо скалирање ставова ученика петостепеном скалом ставова Ликертовог типа непосредно након завршетка експерименталног програма. Скала се састојала од 10 тврдњи, а ученици су имали могућност да изразе своје ставове заокруживањем једног од понуђених бројева (1 – *уопште се не слажем*, 2 – *углавном се не слажем*, 3 – *нити се слажем нити се не слажем*, 4 – *углавном се слажем*, 5 – *потпуно се слажем*). Вредност 3 – *нити се слажем нити се не слажем* изражавала је неутралан став ученика према датој тврдњи. Скала је садржала и позитивно (тврдње 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8) и негативно формулисане тврдње (тврдње 9 и 10). За потребе статистичке обраде резултата извршено је рекодирање негативно формулисаних тврдњи (Pallant, 2011).

У Табели 65 приказани су средња вредност и стандардна девијација за сваки ајтем упитника. Негативно формулисане тврдње *GeoGebra није од користи приликом учења математике* и *Математика није занимљивија уз употребу GeoGebre* су рекодиране пре статистичке обраде, тако да се позитиван став ученика према софтверском пакету може уочити и у оквиру ова два ајтема. Најпозитивнији став ученици су изразили код тврдње *Волео бих да учитељ користи GeoGebr*-у *чешће на часовима и у другим областима математике* (M = 4,52; SD = 0,502), затим следе тврдње *Уз GeoGebr*-у *било ми је лакше да уочим делове геометријских тела (стране, ивице, темена)* (M = 4,42; SD = 0,496), *Уз помоћ GeoGebr*-е *очигледније је како настају мреже геометријских тела* (M = 4,34; SD = 0,684), *GeoGebra је допринела да могу лакше да замислим геометријска тела* (M = 4,27; SD = 0,638), *GeoGebra ми је помогла да лакше научим математику* (M = 4,27; SD = 0,644), *GeoGebra није од користи приликом учења математике* (M = 4,26; SD = 0,613), *Уз GeoGebr-у лакше сам научио мерне јединице за површину* (M = 4,21; SD = 0,555), *GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре* (M = 4,16; SD = 0,714), *Математика није занимљивија уз употребу GeoGebr-е* (M = 4,15; SD = 0,565), док је најслабије оцењена тврдња *Уз GeoGebr-у сам лакше научио да израчунам површину геометријског тела* (M = 4,02; SD = 0,574).

Табела 65. *Ставови ученика о софтверском пакету GeoGebra*

Тврдња	M	SD
GeoGebra ми је помогла да лакше научим математику.	4,27	0,644
Уз *GeoGebr*-у лакше сам научио мерне јединице за површину.	4,21	0,555
GeoGebra је допринела да могу лакше да замислим геометријска тела.	4,27	0,638
Уз *GeoGebr*-у било ми је лакше да уочим делове геометријских тела (стране, ивице, темена).	4,42	0,496
Уз помоћ *GeoGebr*-е очигледније је како настају мреже геометријских тела.	4,34	0,684
Уз *GeoGebr*-у сам лакше научио да израчунам површину геометријског тела.	4,02	0,574
GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре.	4,16	0,714
Волео бих да учитељ користи *GeoGebr*-у чешће на часовима и у другим областима математике.	4,52	0,502
GeoGebra није од користи приликом учења математике.	4,26	0,613
Математика није занимљивија уз употребу *GeoGebr*-е.	4,15	0,565

За утврђивање корелације између ставова ученика према *GeoGebra* софтверу и независних варијабли општи успех и оцена из математике применили смо Пирсонов коефицијента корелације (Табела 66). Када је варијабла општи успех у питању, код тврдње *GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре* (r = 0,427; p = 0,000), постоји средња позитивна корелација (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). У случају варијабле оцена из математике уочили смо позитивну корелацију веће вредности са истим ставом (r = 0,497; p = 0,000).

Табела 66. *Корелација између варијабли општи успех и оцена из математике и ставова ученика о софтверском пакету GeoGebra*

Тврдња	Општи успех		Оцена из математике	
	r	Sig.	r	Sig.
GeoGebra ми је помогла да лакше научим математику.	0,170	0,087	0,142	0,152
Уз *GeoGebr*-у лакше сам научио мерне јединице за површину.	0,149	0,139	0,131	0,195
GeoGebra је допринела да могу лакше да замислим геометријска тела.	0,179	0,078	0,166	0,102
Уз *GeoGebr*-у било ми је лакше да уочим делове геометријских тела (стране, ивице, темена).	0,189	0,059	0,192	0,055
Уз помоћ *GeoGebr*-е очигледније је како настају мреже геометријских тела.	0,178	0,075	0,155	0,122
Уз *GeoGebr*-у сам лакше научио да израчунам површину геометријског тела.	0,187	0,066	0,189	0,063
GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре.	0,427	0,000	0,497	0,000
Волео бих да учитељ користи *GeoGebr*-у чешће на часовима и у другим областима математике.	0,153	0,124	0,121	0,225
GeoGebra није од користи приликом учења математике.	0,167	0,097	0,154	0,125
Математика није занимљивија уз употребу *GeoGebr*-е.	0,114	0,266	0,196	0,055

Тестирање статистичке значајности разлика у ставовима ученика различитог општег успеха према *GeoGebra* пакету извршили смо једнофакторском анализом варијанси (Табела 67). Резултати ANOVA теста показују да постоји статистички значајна разлика у ставовима ученика само код ајтема *GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре* (F = 12,985; p = 0,000). Ученици са општим успехом одличан изразили су најпозитивнији став (M = 4,33; SD = 0,498), следи ученик са успехом довољан (M = 4,00), ученици са добрим успехом (M = 3,50; SD = 0,707), док су ученици са општим успехом врлодобар исказали најнегативнији став у оквиру овог ајтема (M = 3,23; SD = 1,092). Овакве ставове ученика не можемо довести у линеарну везу са постигнутим општим успехом, с обзиром да су, за разлику од ученика са врлодобрим успехом, ученици са општим успехом добар и довољан показали да им је уз примену софтверског пакета било лакше да савладају садржаје који су се односили на површину геометријских фигура.

Табела 67. *Ставови ученика према софтверском пакету GeoGebra у зависности од општег успеха*

Тврдња	Довољан		Добар		Врло добар		Одличан		ANOVA	
	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	F	Sig.
GeoGebra ми је помогла да лакше научим математику.	4,00	.	3,50	0,707	4,14	0,363	4,31	0,673	1,337	0,267
Уз *GeoGebr*-у лакше сам научио мерне јединице за површину.	4,00	.	3,50	0,707	4,15	0,375	4,23	0,572	1,261	0,292
GeoGebra је допринела да могу лакше да замислим геометријска тела.	4,00	.	4,00	0,000	4,00	0,392	4,33	0,670	1,287	0,283
Уз *GeoGebr*-у било ми је лакше да уочим делове геометријских тела (стране, ивице, темена).	4,00	.	4,00	0,000	4,28	0,468	4,45	0,501	1,228	0,304
Уз помоћ *GeoGebr*-е очигледније је како настају мреже геометријских тела.	4,00	.	4,50	0,707	3,92	0,474	4,41	0,697	2,232	0,089
Уз *GeoGebr*-у сам лакше научио да израчунам површину геометријског тела.	4,00	.	3,50	0,707	3,78	0,425	4,07	0,586	1,593	0,196
GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре.	4,00	.	3,50	0,707	3,23	1,092	4,33	0,498	12,985	0,000
Волео бих да учитељ користи *GeoGebr*-у чешће на часовима и у другим областима математике.	.	.	4,00	0,000	4,43	0,514	4,55	0,501	1,437	0,243
GeoGebra није од користи приликом учења математике.	4,00	.	4,00	0,000	4,00	0,408	4,30	0,639	1,146	0,335
Математика није занимљивија уз употребу *GeoGebr*-е.	4,00	.	4,50	0,707	3,85	0,864	4,20	0,487	1,780	0,156

Запажена је статистички значајна разлика у ставовима ученика испитиваним ајтемом *GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре* и у зависности од оцене коју ученици имају из математике (F = 10,877; p = 0,000) (Табела 68). Најпозитивније ставове изразили су ученици са највишом оценом, оценом одличан (M = 4,35; SD = 0,482), затим следе ученици са оценом врлодобар (M = 4,10; SD = 0,718), добар (M = 3,50; SD = 0,926), а ученици са довољном оценом просечно су изразили неутралан став (M = 3,00; SD = 1,225). Евидентно је да са опадањем оцене из математике опада и степен слагања са поменутом тврдњом, међутим важно је нагласити да ни ученици са најнижом оценом немају негативан став када је примена софтверског пакета у питању.

Поредак исказивања ставова делимично одступа од поретка који смо претходно уочили испитујући ставове ученика истим ајтемом у односу на постигнути општи успех. Посматрајући у односу на оцену из математике, ставови ученика са оценом врлодобар налазе се одмах иза ставова ученика са оценом одличан који имају најпозитивнији став код овог ајтема, док у односу на општи успех ученици са врлодобрим успехом исказују најнегативнији став. То показује да међу ученицима истог општег успеха има оних са различитим оценама из математике и обрнуто, те стога не можемо закључити да одређеној групи ученика користи, односно не користи примена *GeoGebra* пакета приликом савладавања садржаја геометрије.

Табела 68. *Ставови ученика према софтверском пакету* GeoGebra *у зависности од оцене из математике*

Тврдња	Довољан (2)		Добар (3)		Врло добар (4)		Одличан (5)		ANOVA	
	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	M	*SD*	F	Sig.
GeoGebra ми је помогла да лакше научим математику.	3,80	0,447	4,11	0,333	4,36	0,581	4,29	0,696	1,277	0,287
Уз *GeoGebr*-у лакше сам научио мерне јединице за површину.	3,75	0,500	4,00	0,000	4,36	0,492	4,21	0,599	1,959	0,125
GeoGebra је допринела да могу лакше да замислим геометријска тела.	4,00	0,000	3,88	0,333	4,38	0,497	4,31	0,714	1,729	0,166
Уз *GeoGebr*-у било ми је лакше да уочим делове геометријских тела (стране, ивице, темена).	4,20	0,447	4,11	0,333	4,45	0,509	4,46	0,502	1,773	0,157
Уз помоћ *GeoGebr*-е очигледније је како настају мреже геометријских тела.	4,00	0,707	3,88	0,333	4,54	0,509	4,36	0,740	2,520	0,062
Уз *GeoGebr*-у сам лакше научио да израчунам површину геометријског тела.	3,80	0,447	3,66	0,500	4,05	0,394	4,07	0,625	1,651	0,183
GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре.	3,00	1,225	3,50	0,926	4,10	0,718	4,35	0,482	10,877	0,000
Волео бих да учитељ користи *GeoGebr*-у чешће на часовима и у другим областима математике.	4,00	0,000	4,56	0,527	4,55	0,510	4,54	0,502	1,513	0,216
GeoGebra није од користи приликом учења математике.	4,00	0,000	3,88	0,333	4,38	0,497	4,29	0,678	1,771	0,158
Математика није занимљивија уз употребу *GeoGebr*-е.	3,80	1,095	3,77	0,666	4,30	0,470	4,19	0,503	2,643	0,054

Анализа ставова ученика добијених скалирањем наводи на закључак да су ученици експерименталне групе позитивно оценили употребу *GeoGebra* софтвера на садржајима обухваћеним експериментом. Резултати имплицирају да је примена пакета омогућила да сви ученици, а посебно они са слабијим успехом и лошијим оценама из математике, лакше визуелизују појмове чинећи их очигледним и представљајући их динамичним моделима. У таквом окружењу које подстицајно делује, и ученици са слабијим способностима позитивно оцењују свој напредак.

На основу добијених резултата можемо да закључимо да примена софтвера *GeoGebra* у настави утиче на формирање позитивног става према софтверу и да код ученика буди мотивацију за учење математичких садржаја. Високе оцене тврдње *Волео бих да учитељ користи GeoGebr-у чешће на часовима и у другим областима математике* показују спремност ученика, независно од постигнутог општег успеха и оцене из математике, да путем коришћења модела креираних у софтверском пакету усвајају и друге садржаје почетне наставе математике. На основу свега изнетог, можемо прихватити почетну хипотезу да *примена софтверског пакета GeoGebra доприноси формирању позитивних ставова ученика према учењу геометрије*.

До резултата сличних нашим дошли су у свом истраживању Шадан и Еу (Shadaan, Eu, 2013). Они наводе да су ученици, након примене у настави и учењу, генерално исказали позитивне ставове према софтверу *GeoGebra*. Чак 93% испитаника оценило је да су много научили уз помоћ *GeoGebra* пакета, док је 82% посебно истакло могућност визуелизације као бенефита који софтвер пружа. Три четвртине испитаника навело је да су коришћењем пакета много више уживали учећи математичке садржаје, односно да су извршили боље повезивање претходних са новим знањима. Слично, Бу и Еу (Boo, Eu, 2016), испитујући на који начин је могуће применити *GeoGebra* пакет приликом овладавања појмом угла, открили су да се 90% ученика обухваћених истраживањем сложило да су боље разумели појам захваљујући подстицајном окружењу које софтвер пружа. Наводе да ученици исказују висок ниво заинтересованости за рад уз софтвер *GeoGebra*, постајући тако свесни предности које нуди примена образовних софтвера у настави.

За време рада на решавању математичких проблема коришћењем *GeoGebra* пакета међу ученицима преовладавају позитивна осећања, задовољство, чиме се јача поверење у сам софтвер (Arbain, Shukor, 2015; Tolić, Jukić, Josipović, 2015). Будући да се могућности софтвера не односе само и искључиво на садржаје геометрије, већ се са успехом може користити и у другим областима математике, можемо закључити да овакви позитивни ставови ученика могу представљати полазну основу за промену процеса наставе и учења. У таквој промени мења се и положај самих ученика, који од пасивних посматрача добијају улогу активних истраживача. Испитујући предности учења путем открића уз помоћ софтвера *GeoGebra* у односу на класичну наставу, Тран и сарадници (Tran et al., 2014) откривају да већина ученика користи могућности овог софтвера у процесу учења како би побољшали разумевање приказаног садржаја, док такав вид учења представља задовољство ученицима и подстиче интересовање за учење математике.

5. Мишљења учитеља о софтверском пакету *GeoGebra*

Како бисмо испитали мишљења учитеља који изводе наставу у одељењима у којима је реализован експериментални програм применили смо дескриптивну анализу квалитативног интервјуа. Током трајања експеримента учитељи нису изводили наставу математике, али су били присутни на часовима у улози посматрача како би током интервјуа могли изнети своја мишљења у вези са применом образовног софтвера *GeoGebra*. Разлог наше одлуке да испитамо ставове учитеља јесте њихово познавање карактеристика мишљења ученика. Будући да су учитељи добро упознати са начином на који ученици размишљају и приступају решавању проблема, сматрали смо да је од великог значаја да као објективни посматрачи сагледају процес учења и искажу своје мишљење о њему.

Индивидуални интервјуи обављени су са сваком од четири учитељице након обављеног експеримента, а анализом добијених одговора желели смо да утврдимо каква су њихова мишљења о предностима, ограничењима и могућностима имплементације *GeoGebra* софтвера на садржајима почетне наставе математике. У том циљу, као почетну хипотезу узели смо да су *учитељи мишљења да примена софтверског пакета GeoGebra доприноси повећању образовних постигнућа ученика и позитивно делује на трајност усвојених садржаја у почетној настави математике*.

Група од дванаест питања која смо поставили учитељицама током вођења интервјуа односила се на упознатост са постојањем образовних софтвера намењених поучавању математичких садржаја и ставове учитељица о вишеструким могућностима примене *GeoGebra* софтвера креираног у те сврхе. На питање *Да ли је GeoGebra први образовни софтвер са којим се сусрећете?* две учитељице су дале потврдан одговор, док су две навеле да су претходно имале прилику да користе поменути софтвер. Као пример софтвера који су користиле приликом извођења наставе математике учитељице су рекле да су употребљавале *Cabri 3D* и то како би ученицима представиле моделе тродимензионих геометријских тела и њихове елементе. До резултата сличних нашим у једном претходном истраживању дошли су Миликић, Вуловић и Михајловић (Миликић, Вуловић и Михајловић, 2020). Наиме, међу анкетираних 108 учитеља са територије Републике Србије свега 13,89% испитаника одговорило је да су претходно користили образовни софтвер на часовима математике. Међутим, аутори наводе да је до велике промене у проценту испитаника који су потврдно одговорили на питање да ли су раније користили софтвер дошло након појмовног разјашњења образовног софтвера (и то 54,63%).

Све четири учитељице сагласиле су се да *GeoGebra* софтвер нуди многобројне могућности примене у припреми и током реализације часова математике. Као неке од предности које су током трајања експерименталног програма уочиле наводе: *Могућност визуелног представљања геометријских тела*; *Уштеду на времену потребном за креирање скица, мрежа површи и модела геометријских тела и више времена посветити решавању математичких задатака*; *Могућност да се геометријска тела боље сагледају и тиме у свести ученика створи боља представа о математичком појму.* Може се рећи да су овакви одговори учитељица донекле и очекивани, имајући на уму више пута истицану визуелизацију математичких садржаја којој *GeoGebra* несумњиво доприноси (Diković, 2009; Kllogjeri, 2015).

Упоредо са предностима, учитељице су изнеле и своје ставове о евентуалним недостацима и ограничењима примене *GeoGebra* пакета. Том приликом су навеле: *За* *неке садржаје је потребно више од једног школског часа како би их ученици савладали*; *У раду се не би требало ослонити само и искључиво на представљање геометријских појмова употребом софтвера GeoGebra*; *Поред уштеде на времену представљањем готових модела геометријских тела, у појединим сегментима неопходно је извршити поступно извођење одређених конструкција и нацртати геометријска тела и мреже њихових површи*. Једна учитељица сматра да је *захтев успешно остварен тек након цртања на табли уз давање инструкција корак по корак*. Заједнички именитељ изнетих ставова учитељица односио се на недостатак поступности приликом цртања геометријских тела, а оне сматрају да је то могуће извести искључиво цртањем на табли уз употребу прибора за геометрију. Не желећи да умањимо значај који манипулисање лењиром и шестаром има на развој моторичких способности ученика, сматрамо да су овакви одговори учитеља делимично неосновани будући да *GeoGebra* поседује могућност приказивања конструкције корак по корак, што је најприближније цртању лењиром и шестаром на табли.

На питање *Мислите ли да часови математике уз употребу софтвера GeoGebra буде интересовање ученика за предмет?* учитељице су одговориле потврдно: *Да, ученицима су занимљиви очигледност којој GeoGebra доприноси и демонстрација елементарних геометријских појмова*; *Да, динамичан приказ садржаја држи пажњу ученицима*; две учитељице сматрају да *Свака новина и одступање од класичног начина извођења наставе занимљиви су ученицима*. Питањем *Сматрате ли да коришћење GeoGebra пакета током извођења часова доприноси бољем разумевању математичких садржаја?* желели смо да испитамо ставове учитељица о дидактичкој вредности пакета и у којој мери његово коришћење представља додатну подршку примени физичких дидактичких средстава. Три учитељице су одговориле да *GeoGebra доприноси бољем разумевању и доношењу исправнијих закључака о ономе што виде*, док је једна изјавила *То зависи од индивидуалних способности и интересовања ученика, будући да има ученика који додатна појашњења траже у манипулисању дидактичким средствима*. Можемо закључити да преовладава став да *GeoGebra* има позитиван ефекат на развој способности просторне визуелизације ученика, те се као софтвер за динамичку геометрију може успешно користити као алат за учење путем визуелизације које унапређује разумевање појмова (Bhagat, Chang, 2014; Saha, Ayub, Tarmizi, 2010). Такође, осим својих наставних предности, софтвер ефикасно повећава и интересовање ученика за наставу математике чинећи да ученици заволе математику (Doruk, Aktümen, Aytekin, 2013).

Одговори учитељица на питање *Може ли коришћење GeoGebra пакета у потпуности да замени употребу очигледних наставних средстава (модела геометријских фигура и тела)?* били су подељени. За разлику од две испитанице које су сматрале да их треба комбиновати и чији су одговори били: *Не може у потпуности. Важно је да ученици користе нешто опипљиво, конкретно, видљиво и препознатљиво*; *Не могу у потпуности, треба их комбиновати*, две учитељице дале су предност софтверу над манипулацијом физичким наставним средствима. Аргументе за овакве процене учитељица можемо пронаћи и у Пијажеовој теорији когнитивног развоја. Према овој теорији, ученици четвртог разреда (који су чинили узорак нашег експеримента) још увек се налазе на стадијуму конкретних интелектуалних операција што указује да је неизоставно користити физичка дидактичка средства са циљем приближавања садржаја ученицима. Други аргумент, који оправдава став друге две учитељице, односи се на стадијум формалних интелектуалних операција који наступа након стадијума конкретних операција. Дакле, ученике овог узраста требало би постепено ослобађати од реалних објеката, док расуђивање треба да се одвија по законима формалне логике. Ученици се све мање ослањају на опажање, почињу да манипулишу апстракцијама, појмовима и симболима, при чему графички приказ у *GeoGebra* окружењу може представљати прелазни облик.

На питање *Може ли коришћење GeoGebra пакета да замени извођење конструкција на табли маркером и лењиром?* добили смо прилично различите одговоре: *Велике су могућности, мислим да нисам све видела*; *Сматрам да никако не може заменити конструкције лењиром*; *Рекла бих да може*; *Може, али нисам сигурна колико то може да помогне ученицима.* Исмаил и Рахман (Ismail, Rahman, 2017) наводе процену ефикасности као уобичајен аргумент који ствара отпор учитеља према ИКТ у настави. Имајући у виду да се оцена остварености програмских садржаја и даље изводи путем папира и оловке, учитељи сумњају да ће примена образовних софтвера помоћи ученицима да добро ураде тест у папирној форми. Резултати истраживања поменутих аутора показали су да је уверење учитеља погрешно, будући да је геометријско резоновање које су ученици показали било на високом нивоу, иако су процену вршили путем теста.

Осмо питање у интервјуу гласило је: *Доприноси ли динамичка структура GeoGebra пакета бољем разумевању трансформације геометријских тела (развијању мреже површи тела у раван)?* Њиме смо желели да испитамо мишљење учитељица у вези са могућностима репрезентације тродимензионалних објеката које нуди *GeoGebra*, а са којима су се током трајања експерименталног програма ближе упознале. Одговори учитељица: *То им је било занимљиво и очигледно*; *Добро су упознали мреже*; *Томе да, и лакши је начин демонстрирања*; *Да, када је у питању мрежа квадра и коцке* сагласни су да *GeoGebra* олакшава поступак креирања и презентације мреже геометријских тела. Захваљујући опцијама које постоје, мрежу је могуће вратити у првобитан положај и поново саставити геометријско тело, на очигледан начин приказујући и реверзибилан поступак. Тиме је ученицима дата прилика да се најпре визуелно а затим и мисаоно врате уназад и целину упореде са деловима (Triwahyuningtyas, Rahayu, Agustin, 2019). Са друге стране, не треба изоставити ни питање колико су школе опремљене адекватним очигледним наставним средствима која би на одговарајући начин ученицима приближила поступак „развијања” мреже површи геометријских тела.

Посматрајући кроз призму Ван Хилеових нивоа геометријског мишљења, употреба *GeoGebra* софтвера у раду са геометријским телима у великој мери доприноси позитивним променама управо на нивоима визуелизације и анализе (нивои 1 и 2) тродимензионалних тела (Adelabu, Makgato, Ramaligela, 2019; Ismail, Rahman, 2017; Kim, Md-ali, 2017). Из тог разлога, међу бројним другим *DGS* софтверима, најчешћи избор учитеља јесте *GeoGebra* (İbili, 2019).

Када је у питању квалитет знања стеченог уз употребу *GeoGebra* софтвера, поставили смо учитељицама питање *Сматрате ли да је квалитет знања ученика бољи када се у раду примењује GeoGebra?* Њихови одговори кретали су се од умерених до изразито позитивних, и то: *Донекле да*; *Вероватно јесте*; *Требало би извршити проверу знања ученика како би се утврдили ефекти примене GeoGebre*; *Сигурно, све што се користи има предности од самог показивања геометријских тела.* Будући да учитељице нису имале претходних искустава у употреби софтвера, то је и разумљив њихов умерени став по питању позитивног ефекта који *GeoGebra* остварује на квалитет знања ученика. Насупрот томе, бројна истраживања потврђују да су постигнућа ученика који на часовима користе *GeoGebra* софтвер изнад постигнућа ученика који садржаје савладавају класично организованом наставом (Божић, 2019; Mukiri, 2016; Saha, Ayub, Tarmizi, 2010; Tutkun, Ozturk, 2013; Zdráhal, Dofková, Nocar, 2019; Zulnaidi, Zakaria, 2012). Боља постигнућа ученици не остварују само на пољу геометрије, већ и у оквиру других области математике. С тим у вези, током интервјуа поставили смо учитељицама питање *Мислите ли да коришћење GeoGebra пакета на часовима може да побољша искључиво разумевање садржаја геометрије? У оквиру којих још области математике видите могућности потенцијалне примене?* Учитељице су одговориле да се *GeoGebra* може применити: *На Мерење и мере и Разломке*; *Свуда где су геометријска тела и јединице мере*; *Мислим да би могућност примене могла бити у решавању једначина и неједначина*; *Могла би се користити за разломке.* Свакако да могућност примене *GeoGebra* пакета није ограничена само и искључиво на садржаје геометрије, већ се успешно може применити и на бројне друге области математике. Булут са сарадницима (Bulut et al., 2016) и Тхамби и Еу (Thambi, Eu, 2013) својим истраживањима показали су да софтвер доприноси бољем разумевању појма разломка. Увурукундо, Манирао и Тушиме (Uwurukundo, Maniraho, Tusiime, 2020) у прегледу спроведених студија наводе бројна истраживања у којима је испитивана примена софтверског пакета *GeoGebra* на различитим садржајима математике (аналитичкој геометрији, функцијама, аритметици, тригонометрији). У сваком од њих ученици који су учили уз помоћ софтвера остварили су боље резултате у поређењу са ученицима који су исте садржаје савладавали класичним моделом наставе.

На питање *На основу искуства стеченог током трајања програма, да ли бисте у будућности користили GeoGebra пакет на часовима математике?* све четири учитељице дале су потврдне одговоре: *Све што побољшава разумевање, обогаћује ученичко сазнавање бих користила*; *Бих*; *Врло радо*; *Да, ако бих имала већ направљене моделе.* Из одговора се да закључити да су учитељице стекле позитивна искуства током трајања експерименталног програма и да су препознале бенефите које са собом носи коришћење софтвера у раду са математичким садржајима. Оно што може представљати препреку имплементацији *GeoGebra* софтвера у настави јесте неприпремљеност за коришћење овог пакета, те смо поставили учитељицама питање *Да ли бисте похађали програм стручног усавршавања у вези са употребом GeoGebra пакета у настави?* Учитељице су дале следеће одговоре: *Да, увек сам спремна за новине, за доживотно учење и обогаћивање свог и искуства ученика*; *Радо бих похађала такав семинар*; *Врло радо*; *Да, мислим да би један такав семинар много значио ширењу употребе GeoGebre међу учитељима.* Чињеница је да учитељи не поседују или у малој мери поседују компетенције потребне за примену овог софтвера и потребно је обучити их за његову правилну употребу (Ljajko, Pavličić, Radulović, 2010). Учитељи који су имали прилике да присуствују таквим радионицама, у оквиру којих су упознати са алатима и карактеристикама *GeoGebra*-е, испољили су позитиван став према софтверу и сматрају га једноставним за употребу (Belgheis, Kamalludeen, 2018; Mainali, Key, 2012; Zakaria, Lee, 2012).

Студије спроведене са студентима, будућим учитељима, указују да већина њих сматра *GeoGebra*-у корисним алатом за математичко образовање, који им пружа могућност да прошире сопствено разумевање математичких појмова и знање о стратегијама поучавања (Agyei, Benning, 2015; Doruk, Aktümen, Aytekin, 2013). Будући да поседују позитивне ставове према софтверу, потребно је да будући учитељи стекну компетенције за коришћење ИКТ у настави математике, како би са успехом примењивали софтвере који подстичу више нивое мишљења ученика. Већа заступљеност и виши степен примене образовних софтвера у иницијалном математичком и методичком образовању учитеља свакако би допринели да се ове баријере успешно превазиђу.

ЗАКЉУЧАК И МЕТОДИЧКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ

Под утицајем различитих друштвених околности, потреба за иновирањем наставног процеса јавља се континуирано и неизоставно. У том смислу, неопходно је да промене наставних метода, облика рада, поступака до којих у том процесу долази прате развој технологија и прилагођавају се потребама савременог друштва. Узимајући у обзир да је протеклих деценија дошло до убрзаног развоја информационо-комуникационих технологија, њихова примена није изостала ни када је образовање у питању. Премда је учињено много на имплементацији ИКТ у образовним системима, ипак је остало доста простора како би његова употреба било још ефикаснија. Могућност дубље имплементације, пре свега, односи се на основношколско образовање, у којем, бар кад је реч о настави математике од првог до четвртог разреда, чини се да нису у пуној мери исцрпљени ресурси које ИКТ нуди.

Дигиталне технологије не би требало примењивати по сваку цену, већ њихово коришћење треба унапред планирати, тако да доприноси повећању квалитета наставе. Поједини садржаји почетне наставе математике, због специфичности које их одликују, посебно су погодни за обраду уз коришћење дигиталних технологија. Тако, геометрија представља једну од погоднијих области математике у млађим разредима основне школе чијем бољем и дубљем разумевању примена дигиталних технологија може у знатној мери допринети. Заменом статичних приказа геометријских садржаја динамичним, уз изразиту очигледност коју омогућава употреба образовних софтвера, с правом се намеће као незаобилазни аспект осавремењивања почетне наставе математике. У прилог томе говоре и бројне потешкоће које ученици имају приликом учења поменутих садржаја (апстрактна природа геометријских појмова, неадекватан графички приказ, немогућност представљања тродимензионалних објеката у равни), а које се реализацијом софтверски потпомогнуте наставе могу превазићи.

Пажњу смо усмерили на сагледавање доступних сазнања о могућностима примене софтверског пакета *GeoGebra* у настави математике и емпиријску проверу ефеката његове примене на повећање образовних постигнућа ученика, промену њихових ставова према математици и ставова ученика и учитеља о поменутом софтверу. У теоријским оквирима бавили смо се суштином геометрије и геометријског мишљења и сагледавањем положаја, улоге и везе геометријских садржаја са другим областима почетне наставе математике. Циљ је био утврђивање специфичности које утичу на јављање потешкоћа у учењу садржаја геометрије и узрокују слабија постигнућа ученика при решавању математичких проблема са овим садржајем. Упоредо са тим, представљене су основне карактеристике софтвера, изглед корисничког интерфејса и радног окружења, уз детаљан приказ могућности које *GeoGebra* пружа у раду са геометријским објектима.

Емпиријску проверу модела наставе уз употребу софтвера обавили смо спровођењем експерименталног истраживања са паралелним групама, у чијој реализацији су учествовали ученици четвртог разреда основне школе. Намера нам је била да, осмишљавањем одговарајућег модела наставе заснованог на примени *GeoGebra* софтвера, утврдимо да ли позитивно утиче на раст нивоа образовних постигнућа ученика и трајност усвојених знања о садржајима геометрије. Ефекте примене софтверског пакета разматрали смо у оквиру експерименталног истраживања са три различита аспекта: 1) непосредан рад са одабраном, сталном групом ученика четвртог разреда основне школе, уз примену горепоменутог модела и упоређивање резултата таквог рада са класичним начином извођења наставе; 2) промене у мишљењима и ставовима ученика, под утицајем експерименталног модела наставе, израженим кроз оцену сопственог напретка по завршетку експерименталног програма; 3) ставова учитеља одељења која су чинила експерименталну групу у истраживању о предностима и ограничењима примене софтвера и могућностима његове дубље имплементације у почетној настави математике.

Резултати добијени експерименталним истраживањем имплицирају следеће закључке:

- Софтверски пакет *GeoGebra* примењен на садржајима геометрије позитивно утиче на повећање нивоа образовних постигнућа ученика у односу на класичан начин извођења наставе математике у четвртом разреду основне школе.
- *GeoGebra* софтвер на позитиван начин утиче на побољшање резултата ученика у раду са садржајима геометрије на свим нивоима образовних постигнућа. Посматрано појединачно, најбоље ефекте остварује на резултате ученика који се налазе на напредном нивоу постигнућа.
- Примена *GeoGebra* пакета има позитивне ефекте на укупна постигнућа ученика без обзира на пол. Иако су постигнућа девојчица виша у односу на дечаке, она немају карактер статистичке значајности, те можемо закључити да се софтвер може примењивати у настави без бојазни да ће довести до појаве значајнијих разлика у зависности од пола.
- Употреба софтвера приликом поучавања и учења остварује позитивне ефекте и подстиче раст образовних постигнућа свих ученика, независно од оцене коју имају из математике. Ученицима са просечним и исподпросечним оценама софтверски пакет олакшао је визуелизацију проблема и поједноставио поступак решавања задатка, а то се одразило на постизање знатно бољих резултата.
- Сви ученици, без обзира на остварени општи успех на крају претходног разреда, под утицајем примене софтверског пакета *GeoGebra* приликом реализације садржаја геометрије постижу евидентан напредак када су образовна постигнућа у питању. Учењем уз употребу софтвера, ученици са најслабијим општим успехом остварују видно боље резултате, док се изразито позитиван ефекат уочава и код ученика са врло добрим и одличним успехом.
- Модел наставе заснован на употреби *GeoGebra* пакета позитивно утиче на повећање трајности усвојених знања ученика. Посматрано према нивоима образовних постигнућа, примена софтвера доприноси да знања на основном нивоу постигнућа буду најтрајнија.

Добијени резултати потврдили су исправност хипотеза да *Примена софтверског пакета GeoGebra у учењу садржаја геометрије доприноси повећању нивоа постигнућа ученика у почетној настави математике* и да *Примена софтвера GeoGebra у учењу садржаја геометрије доприноси повећању трајности знања ученика у почетној настави математике.* Резултати су у сагласности са резултатима бројних истраживања која недвосмислено указују на позитивне ефекте софтверски потпомогнуте наставе математике (Akanmu, 2016; Bhagat, Chang, 2015; Љајко, 2014; Kaya, Akçakin, Bulut, 2013; Martinovski, Martinovski, 2013, Mukiri, 2016; Прентовић, 2014; Shadaan, Eu, 2013; Triwahyuningtyas, Rahayu, Agustin, 2019; Tutkun, Ozturk, 2013; Zdráhal, Dofková, Nocar, 2019; Zulnaidi, Zakaria, 2012).

Испитивањем ставова и мишљења ученика, учесника експерименталног програма, дошли смо до следећих закључака.

- Под утицајем примене софтверског пакета *GeoGebra* код свих ученика дошло је до формирања позитивнијих ставова према математици, без обзира на оцену из математике и општи успех.
- Не постоје разлике међу ученицима у односу на пол када је формирање позитивних ставова према математици у питању. Ученици оба пола сматрају да између дечака и девојчица не постоје разлике када су образовна постигнућа из математике у питању.
- Код ученика са оценом довољан и добар из математике дошло је до позитивних промена у ставовима према математици, што указује да им рад уз употребу софтверског пакета одговара. Будући да су им уз *GeoGebra* пакет математички појмови очигледнији и визуелно доступнији, учење математике доживљавају као пријатну активност.
- Учењем уз наставу потпомогнуту *GeoGebra* софтвером код ученика преовлађују позитивна осећања. Ученици се осећају опуштено, срећно, мотивисано, док су страх од неуспеха и несигурност у сопствене математичке способности сведени на минимум.

На основу добијених резултата и изнетих закључака, можемо потврдити и трећу хипотезу да *Софтверски пакет GeoGebra доприноси формирању позитивних ставова и мишљења ученика према математици*. До закључака сличних нашим дошли су у својим истраживањима Аканму (Akanmu, 2016) и Мурни са сарадницима (Murni et al., 2017). Они су у одвојеним истраживањима закључили да имплементација софтвера *GeoGebra* у настави математике даје позитивне ефекте на постигнућа, али позитивно делује и на формирање позитивних ставова ученика према математици. То је још једна у низу потврда методичке оправданости примене софтвера, јер њен утицај није ограничен само и искључиво на јачање предметних компетенција ученика у смислу побољшавања образовних постигнућа, већ делује на ученике и са психолошког аспекта. Јача самопоуздање ученика, упорност, чини да се осећају математички оспособљенијим, заинтересованим и спремним за решавање и оних задатака који им на први поглед делују сложено и захтевно.

Поред ставова према математици, испитивали смо и ставове ученика према учењу геометрије применом софтверског пакета *GeoGebra* и донели следеће закључке.

- Ученици позитивно оцењују свој напредак у савладавању садржаја захваљујући примени софтвера, независно од општег успеха и оцене коју имају из математике. Предности софтвера и подстицајно окружење уз употребу динамичних модела препознали су и ученици са слабијим постигнућима, односно нижим оценама и слабијим општим успехом, те су и сами изразили позитиван став према учењу геометрије уз помоћ софтвера.
- Ученицима са нижим оценама и слабијим општим успехом *GeoGebra* је омогућила да лакше визуелизују дводимензионалне и тродимензионалне геометријске објекте, чинећи их додатно мотивисаним и самоуверенијим у раду са садржајима геометрије.
- Примена софтвера остварује позитивне ефекте на мотивацију ученика за учење других математичких садржаја софтверски потпомогнутом наставом. Сви ученици, без разлике у односу на оцену и општи успех из математике, исказују заинтересованост да учитељи учесталије на часовима и у другим областима математике у раду примењују софтвер *GeoGebra*.

На основу резултата можемо закључити да смо потврдили четврту хипотезу: *Примена софтверског пакета GeoGebra доприноси формирању позитивних ставова ученика о учењу геометрије применом софтвера.* Упоређујући резултате до којих смо дошли са резултатима претходних истраживања (Shadaan, Eu, 2013; Tolić, Jukić, Josipović, 2015; Tran et al., 2014), закључили смо да, независно од узраста, приликом реализације наставе математике уз употребу *GeoGebra* софтвера ученици исказују висок ниво заинтересованости, радо се активно укључују у рад, постајући тако од пасивних посматрача активни истраживачи. Овакви позитивни ставови ученика могу посредно довести до даљих промена у процесу наставе и учења, могу подстаћи ученике да више међусобно сарађују при решавању математичких проблема, те тако отворити пут и неким новим моделима наставе.

Испитивањем ставова учитеља ученика који су учествовали у експерименталном програму дошли смо до следећих закључака.

- Учитељи нису у довољној мери информисани о могућностима које пружа *GeoGebra* пакет и немају претходних искустава у раду са њим.
- Учитељи препознају предности извођења наставе уз употребу софтвера, али истовремено наглашавају и потребу за коришћењем манипулативних дидактичких средстава.
- Највећу методичку вредност рада са софтвером учитељи препознају у раду са тродимензионалним геометријским телима, сматрајући да прикази које пружа софтвер превазилазе могућности употребе модела геометријских тела.
- Учитељи поседују позитивне ставове у вези са квалитетом знања ученика стеченим у раду са *GeoGebra* пакетом. Сматрају да се успешно може применити и на друге области математике доприносећи бољем разумевању и већој трајности математичких знања.
- Под утицајем стечених искустава током трајања експерименталног програма, учитељи имају позитиван став када је коришћење софтвера у питању и исказују интересовање у вези са стицањем потребних компетенција за његову примену у настави.

Закључујемо да смо потврдили и пету хипотезу: *Учитељи су мишљења да примена софтверског пакета GeoGebra доприноси повећању образовних постигнућа ученика и позитивно утиче на трајност усвојених садржаја у почетној настави математике.* Ако узмемо у обзир специфичности извођења наставе математике на свим нивоима, на основу бројних истраживања у којима су испитивани ставови и мишљења учитеља и наставника математике (Bhagat, Chang, 2014; Doruk, Aktümen, Aytekin, 2013; İbili, 2019; Mukiri, 2016; Ismail, Rahman, 2017; Kllogjeri, 2015; Molnár, Lukáč, 2015; Saha, Ayub, Tarmizi, 2010; Triwahyuningtyas, Rahayu, Agustin, 2019), можемо закључити да овако конципирана настава уз употребу *GeoGebra* софтвера представља искорак напред у учењу математичких садржаја.

Бенефити овакве наставе не могу се посматрати само уз угла образовних постигнућа, јер она додатно продубљује и начин резоновања, утиче на подизање нивоа мишљења ученика и у функцији је њихове мисаоне активације. Већа очигледност и боља визуелизација математичких садржаја, којима *GeoGebra* софтвер доприноси, представљају својеврсни мост при преласку од конкретног ка ономе што је физички и просторно удаљено од ученика. Додатно, софтвер спречава појаву логичких скокова при процесима вертикалне и хоризонталне математизације, поједностављујући апстрактност којом обилују математички садржаји и прилагођавајући их тренутном нивоу когнитивног развоја ученика.

Имајући на уму ниво конкретних интелектуалних операција на којем се тренутно налазе, уз софтвер ученици млађег школског узраста лакше достижу зону наредног развоја и, напослетку, прелазе на стадијум формалних интелектуалних операција. Почев од конкретних операција везаних за манипулацију физичким дидактичким средствима и извођење закључака индуктивним путем, захваљујући моделима креираним у софтверу ученици се постепено ослобађају перцептуализације и почињу математичке појмове схватати оперативно. Динамичним моделима *GeoGebra* омогућава ученицима постепени прелазак са препознавања и перцепције на апстрактни ниво, односно ниво неформалне дедукције.

Једном речју, *GeoGebra* обједињује постулате различитих теорија когнитивног и геометријског мишљења. Уважавајући ниво когнитивног развоја ученика, представља додатну потпору примени широко распрострањених дидактичких средстава у виду модела геометријских фигура и тела које најчешће можемо срести у нашим школама. Будући да овакви, материјализовани прикази, понекад садрже и информације које нису од значаја за формирање појма (материјал од којих су направљени, боја, дебљина), то *GeoGebra* тежи стварању модела код којег појмовни карактер геометријских објеката доминира над фигуралним.

Истичући позитивне аспекте примене софтвера, не можемо а да не укажемо на потенцијалне ризике до којих може довести недовољно добро организована и реализована настава уз употребу рачунара. Наиме, до побољшања резултата наставе није могуће доћи непланским и пуким увођењем образовних софтвера. Да би ефекти софтверски потпомогнуте наставе били жељени, потребна је добра припрема свих учесника процеса поучавања и учења. Неопходно је да учитељ изврши добру селекцију наставних материјала и изабере адекватне моделе који ће пружити прилику ученицима да у таквом подстицајном окружењу снагом сопствене мисли открију непознато.

Љајко (Љајко, 2014) наводи проблеме повезане са употребом *GeoGebra* софтвера приликом извођења наставе. Аутор сматра да велика опасност лежи у изградњи става код ученика и код наставника да се коришћење софтвера своди само на брже и прецизније цртање скица геометријских објеката. У случају овакве, једностране примене, може доћи до занемаривања симболичког приступа математици и свођења на пуку очигледност. У том смислу Првановић истиче „не очигледност ради очигледности, не очигледност по сваку цену или било каква очигледност, већ искључиво очигледност која омогућује формирање одговарајућег појма” (Првановић, 1974: 17), односно очигледност не треба схватити као циљ, већ средство добре наставе.

Љајко, Павличић и Радуловић (Ljajko, Pavličić, Radulović, 2010) као значајан проблем препознају појаву техноцентризма – ситуације у којој ученик врши повезивање разумевања геометријског појма искључиво са применом рачунара. Углавном га узрокује другачији приказ геометријског објекта од оног на табли, због чега се дешава да ученици објекту доделе особину другачију од оне коју заиста поседује. Како би се овакве ситуације избегле, аутори предлажу комбиновање приказа у *GeoGebra* софтверу и рада на табли или у свескама.

Премда постоји опасност од појаве техноцентризма, имајући у виду узраст ученика у првом циклусу основног образовања, посебна пажња у настави математике потпомогнутој софтвером мора се посветити и изналажењу начина за њену реализацију. Пуни ефекти овакве наставе нису могући уколико не постоје технички предуслови за њено извођење. Тако, неопремљеност учионица, мали број пројектора, интерактивних табли којима би приказали садржаје креиране у *GeoGebra* пакету представљају препреку увођењу дигиталних технологија у наставу и ограничавају учитеље. Услед тога, учитељи прибегавају класично организованој настави, лишавајући ученике прилике да истражују и активно учествују у раду.

Класичан модел наставе заснива се првенствено на рецептивној настави у којој ученици информације добијају у готовом облику, не подстичући их довољно да самостално откривају везе и односе међу математичким појмовима и тако конструишу своја знања. Такође, уџбенички комплети за математику у млађим разредима основне школе не обухватају садржаје који подразумевају коришћење пакета *GeoGebra* и зато израда садржаја намењених учитељима и базе модела имају посебан допринос повећању ефикасности наставе. На тај начин, имали би подршку да специфичним активностима својим ученицима омогуће интересантније и једноставније усвајање садржаја са циљем побољшања постигнућа ученика и обезбеђивања трајности знања.

Генералне препоруке учитељима биле би да:

- примењујући иновативне приступе, активно се укључе у процес осавремењивања наставе математике, јер тиме унапређују математичко образовање и образовање уопште;
- раде на личном усавршавању и стицању компетенција за извођење наставе уз употребу дигиталних технологија;
- самостално креирају моделе у *GeoGebra* пакету у складу са сопственим потребама и интересовањима својих ученика;
- информишу се о најновијим верзијама софтверског пакета, могућностима које нуде и начинима њихове примене у настави;
- размењују информације и позитивна искуства о раду са *GeoGebra* пакетом са другим учесницима наставног процеса.

Неопходну подршку учитељима у тој намери требало би да пружи држава кроз одговарајуће институције и њихове активности (центре за стручно усавршавање, семинаре), стручне скупове на којима би учитељи размењивали примере добре праксе рада са *GeoGebra* софтвером и слично. Како је у каталогу програма сталног стручног усавршавања наставника, васпитача и стручних сарадника Завода за унапређивање образовања и васпитања Републике Србије у протеклих неколико година уочен тренд опадања броја програма који се односе на повећање компетенција учитеља и наставника за извођење наставе уз коришћење софтвера *GeoGebra*, то је потреба за оваквим системским видом подршке утолико већа. У поређењу са препорукама *Стратегије развоја образовања у Републици Србији до 2030. године* које као фундаменталну потребу наводе неопходност прилогођавања наставника новим тенденцијама у образовању и усавршавање у складу са новинама које ће бити неопходне у будућности, рад на подизању спремности учитеља да се активно укључе у превазилажење тренутне ситуације јавља се као неопходност.

Неке од првих потешкоћа са којима смо се сусрели приликом планирања, организације и саме реализације истраживања указују да би обезбеђивање техничких услова, набавка опреме и просторних услова, оспособљавање учитеља, обезбеђивање образовних ресурса, техничке подршке требало да представљају приоритете при отклањању препрека за увођење образовних софтвера у наставу математике. Пре почетка експеримента требало је одабрати школе које ће учествовати у експерименту а у којима постоје сви просторно-технични услови за његову реализацију. Након тога обезбедити од руководства школа, педагошко-психолошких служби, учитеља и родитеља ученика одобрење за реализацију истраживања. Додатно оптерећење представљала је неспремност учитеља да узму активно учешће у реализацији истраживања, да користе софтверски пакет *GeoGebra* при поучавању, што је захтевало висок степен ангажовања аутора за реализацију часова у одељењима експерименталне групе (укупно 84 часа). Додатни напор представљало је обезбеђивање услова да сва три тестирања буду реализована истовремено у свим одељењима из узорка, како би се смањио могући утицај паразитарних фактора.

Теоријски значај нашег истраживања огледа се у спроведеној упоредној анализи различитих педагошких истраживања чији су резултати представљени у научној литератури, а који се првенствено односе на допринос образовних софтвера визуелизацији математичких појмова, њиховом дубљем разумевању и могућностима вишеструке репрезентације. Практични значај истраживања налазимо у представљеним методичким приступима заснованим првенствено на трансформацији и визуелизацији садржаја геометрије предвиђеног планом и програмом наставе и учења математике у млађим разредима основне школе уз коришћење софтверског пакета *GeoGebra*. Бројни наставни материјали, динамични модели креирани уз помоћ софтвера који се могу користити у настави математике представљају још један аспект у којем се огледа практични значај резултата истраживања. Ови лако доступни материјали у готовом облику могу подстаћи учитеље за већу употребу образовног софтвера са циљем унапређења наставног процеса путем обезбеђења веће очигледности и кроз даље развијање способности визуелизације ученика.

Поред бројних импликација и препорука до којих смо дошли на основу резултата истраживања, нека од ограничења наших налаза делом проистичу и из величине узорка испитаника чија смо постигнућа пратили током и након трајања експеримента. Да би се добијени резултати могли генерализовати, неопходно је одабрати велики узорак ученика који би били укључени у истраживање. Једно од ограничења представља и узраст самих ученика. Због развојних карактеристика ученика четвртог разреда који су учествовали у истраживању, није могуће вршити уопштавање налаза на читаву популацију ученика основне школе. Ученици учесници истраживања нису оспособљени за самостално коришћење софтвера, па и отуда проистичу одређена ограничења. Такође, бавили смо се ефектима примене једног образовног софтвера на једном математичком садржају, па на основу тога није могуће изводити опште закључке када је ефикасност коришћења образовних софтвера на поучавање и учење математике у питању. У прилог томе иде истраживање Ђокић, Дабић Боричић и Јелић који су поредили ефекте примене ИКТ и манипулативних дидактичких средстава на просторно резоновање ученика четвртог разреда и резултати до којих су дошли (Đokić, Dabić Boričić, Jelić, 2022). Наиме, резултати су показали да нема разлике у постигнућима ученика у раду са просторном геометријом у зависности од тога да ли су користили ИКТ или манипулативна дидактичка средства, те аутори сугеришу употребу оба приступа у зависности од доступних ресурса.

Како на нашим просторима нема истраживања која су као предмет имала подручје примене софтверског пакета *GeoGebra* на приказани начин, на узорку ученика овог узраста и у настави геометрије, надамо се да ће ова дисертација иницирати даља истраживања у овом пољу али и подстаћи учитеље да више практично примењују овакав вид рада. Дисертација може пружити основ будућим истраживачима да открију ефекте примене софтверског пакета из других углова, у другим областима почетне наставе математике, да испитају ставове ученика и учитеља о његовој примени у тим областима итд. Да их охрабри и инспирише да испитају какве ефекте на постигнућа ученика може имати коришћење софтвера *GeoGebra* рецимо у пројектној настави, „изокренутој учионици” или при кооперативном учењу.

На крају, не можемо запоставити чињеницу да XXI век представља век дигитализације. Данашње генерације ученика постепено напуштају моделе рада применом физичких наставних средстава и усавршавају своје вештине радом уз употребу ИКТ. Такође, различите околности у којима се одвија наставни процес, изазване епидемијом вируса *SARS-CoV2*, потреба за одвијањем наставе на даљину, чине да постанемо свесни неопходности примене образовних софтвера у процесу поучавања и учења. С тим у вези, једноставно генерисање динамичних цртежа на веб-страници, модели погодни за пренос у друге презентације и програме чине пакет *GeoGebra* потребом за данашњицу и основом за сутрашњицу.

ЛИТЕРАТУРА

Abdul Majid, M., Huneiti, Z. A., Balachandran, W., Belarabe, Y. (2013). MATLAB as a Teaching and Learning Tool for Mathematics: a literature review. *International Journal of Arts & Sciences*, *6*(3), 23–44.

Abdullah, A. H., Zakaria, E. (2013). The Geometer's Sketchpad (GSP): Its Advantages and Effectiveness in Teaching and Learning Geometry. *Selected Issues in Science & Mathematics Education – Part 1*, 81–101.

Abdullah, A. H., Tahir, L. M., Surif, J., Ibrahim, N. H., Zakaria, E. (2015). Enhancing Students' Geometrical Thinking Levels through Van Hiele's Phase-Based Geometer's Sketchpad-Aided Learning. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Engineering Education (ICEED)*, 106–111.

Abu Bakar, K., Mohd Ayub, A. F., Tarmizi, R. A. (2010). Utilization of Computer Technology in Learning Transformation. *International Journal of Education and Information Technologies*, *2*(4), 91–99.

Agyei, D., Benning, I. (2015). Pre-service Teachers' Use and Perceptions of GeoGebra Software as an Instuctional Tool in Teaching Mathematics. *Journal of Educational Development and Practice*, *5*(1), 14–30.

Adelabu, F. M., Makgato, M., Ramaligela, M. S. (2019). Enhancing Learners' Geometric Thinking Using Dynamic Geometry Computer Software. *Journal of Technical Education and Training*, *11*(1), 44–53.

Akanmu, I. A. (2016). Effect of GeoGebra Package on Learning Outcomes of Mathematics (Secondary School) Students in Ogbomoso North Local Government Area of Oyo State. *GeoGebra International Journal of Romania*, *4*(2).

Alkhateeb, M. A., Al-Duwairi, A. M. (2019). The Effect of Using Mobile Applications (GeoGebra and Sketchpad) on the Students' Achievement. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(3), 523–533.

Ansah, S., Asiedu-Addo, S. K., Kabutey, D. T. (2022). Investigating the Effect of Using GeoGebra as an Instructional Tool on Van Hieles Geometric Thinking Levels of Senior High Technical School Students. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, *10*(1), 31–39.

Antonijević, R. (2005). Očiglednost u nastavi i proces otkrivanja suštine predmeta saznavanja. *Pedagogija*, *LX*(4), 537–543.

Ancsin, G., Hohenwarter, M., Kovács, Z. (2013). GeoGebra goes Web. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, *7*(6), 412–418.

Arbain, H., Shukor, H. A. (2015). The effects of GeoGebra on students achievement. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *172*, 208–214.

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Aulakh, M., Khan, Z. M., Sana, A. (2018). Learning styles and their impact on the nursing students' percertion: across-sectional descriptive research. *Indo American Journal Of Pharmaceutical Sciences*, *5*(8), 8129–8134.

Awofala, A. O. A. (2014). Examining Personalisation of Instruction, Attitudes toward and Achievement in Mathematics Word Problems among Nigerian Senior Secondary School Students. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 2*(4), 273–288.

Bakovljev, M. (1994). Zalaganje Komenskog za misaono aktiviranje učenika. *Nastava i vaspitanje, 43*(1–2), 61−64.

Baltaci, S., Yildiz, A. (2015). GeoGebra 3D from the perspectives of elementary pre-service mathematics teachers who are familiar with a number of software programs. *Cypriot Journal of Educational Sciences, 10*(1), 12−17.

Bantchev, B. B. (2010). *A Brief Tour to Dynamic Geometry Software*. Retrieved January, 2021 from the World Wide Web http://www.math.bas.bg/bantchev/misc/dgs.pdf.

Barnea, N. (2000). Teaching and Learning about Chemistry and Modelling with a Computer managed Modelling System. In: J. K. Gilbert and C. J. Boulter (Eds.), *Developing Models in Science Education,* 307−323.

Bauch, M. J. (2003). Multimedia Teaching and Learning Environment. In: *Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Thirty Second Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, 27−33. Sunny Beach, Bulgaria, April, 2003.

Bauch, M. J., Miller, C. (2003). *GEONExT Dynamic Mathematics Software*. Retrieved January, 2021 from the World Wide Web http://did.mat.uni-bayreuth.de/~manfred/lv/Artikel%20ceskebudejovice.pdf

Bauch, M. J., Pikalova, V. (2007). Exploring Linear Functions – Representational Relationship, *International Journal "Information Technologies and Knowledge", 1*, 67−71.

Belgheis, S., Kamalludeen, R. (2018). The Intention to Use GeoGebra in the Teaching of Mathematics Among Malaysian Teachers. *Malaysian Online Journal of Educational Technology, 6*(1), 109−115.

Божић, М. (2010). *Преглед историје и филозофије математике*. Београд: Завод за уџбенике.

Божић, М. (2012). PISA тестови и шта нам је чинити?. *Настава математике*, *LVII*(1–2), 1−11.

Божић, Р. (2019). *Методичка обрада функција са параметрима уз помоћ рачунара* (докторска дисертација). Нови Сад: Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет.

Božić, R., Takači, Đ., Stankov, G. (2019). Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters. *Interactive Learning Environments, 29*(4), 655−669.

Boo, J. Y., Eu, L. K. (2016). Teaching and Learning of Geometry in Primary School Using GeoGebra. In: *Proceedings of the 21st Asian Technology Conference in Mathematics,* Pattaya, Thailand. Retrieved September, 2018 from the World Wide Web http://atcm.mathandtech.org/ EP2016/contributed/4052016_21227.pdf.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bu, L., Spector, J. M., Haciomeroglu, E. S. (2011). Toward model-centered mathematics learning and instruction using GeoGebra: A theoretical framework for learning mathematics with understanding. In: L. Bu and R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*, *6,* 13–40.

Budinski, N. (2013). A survey on use of computers in mathematical education in Serbia. *The teaching of mathematics*, *16*(1), 42–46.

Budinski, N., Lavicza, Z., Fenyvesi, K., Milinkovic, D. (2020). Developing Primary School Students' Formal Geometric Definitions Knowledge by Connecting Origami and Technology. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2), 1–10.

Bulut, M., Ünlütürk Akçakın, H., Kaya, G., Akçakın, V. (2016). The Effects of GeoGebra on Third Grade Primary Students' Academic Achievement in Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *11*(2), 347–355.

Burgiel, H. (2000). The Interactive Geometry Software Cinderella by J. Richter-Gebert and U. H. Kortenkamp. *The American Mathematical Monthly*, *107*(8), 760–763.

Buckleitner, W. (1999). The State of Children's Software Evaluation – Yesterday, Today, and in the 21st Century. *Information Technology in Childhood Education Annual*, *1999*(1), 211–220.

Bhagat, K. K., Chang, C.-Y. (2015). Incorporating GeoGebra into Geometry learning – A lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(1), 77–86.

Bwalya, D. (2019). Influence of Geogebra on Students' Achievement in Geometric Transformations and Attitude towards Learning Mathematics with Technology. *Journal of Education and Practice*, *10*(13), 25–36.

Vágová, R. (2021). Designing Combinations of Physical and Digital Manipulatives to Develop Students' Visualisation. *Open Education Studies*, *3,* 56–75.

Vágová, R., Kmetová, M. (2019). GeoGebra, a Tool to Improve Students' Visual Imaging. *Acta Didactica Napocensia*, *12*(2), 225–237.

Valentine, K. D. (2018). Tinkering with Logo in an Elementary Mathematics Methods Course. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, *12*(2).

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

Verstraelen, L. (2014). A Concise Mini History of Geometry. *Kragujevac Journal of Mathematics, 38*(1), 5–21.

Vighi, P., Marchini, C. (2011). A gap between learning and teaching geometry. Paper presented at the *CERME7 Conference*, Rzeszow, Poland. Retrieved August, 2021 from the World Wide Web https://kipdf.com/a-gap-between-learning-and-teaching-geometry-1_5acd8a4d7f8b9a86478b4638.html.

Виденовић, М., Чапрић, Г. (2020). *ПИСА 2018 извештај за Републику Србију*. Београд: Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Vojkuvkova, I. (2012). The van Hiele Model of Geometric Thinking. In: *WDS'12 Proceedings of Contributed Papers*, *Part I*, 72–75.

Voogt, J., Fisser, P., Pareja Roblin, N., Tondeur, J., Van Braak, J. (2013). Technological pedagogical content knowledge – a review of the literature. *Journal of Computer Assisted Learning*, *29*(2), 109–121.

Вуловић, Н. (2011). *Примена метода активног учења на диференцираним садржајима геометрије у почетној настави математике* (докторска дисертација). Јагодина: Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет у Јагодини.

Gal, H., Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, *74*, 163–183.

Гашић-Павишић, С., Станковић, Д. (2012). Образовна постигнућа ученика из Србије у истраживању TIMSS 2011. *Зборник Института за педагошка истраживања*, *44*(2), 243–265.

Gehrs, K., Postel, F. (2003). MuPAD – A practical Guide. *Mathematics Made Anew: Tools and Texts for Computer Aided Learning*, *1*.

Glasnović Gracin, D. (2008). Računalo u nastavi matematike: Teorijska podloga i metodičke smjernice. *Matematika i škola*, *10*(46), 10–15.

Glasnović Gracin, D. (2010). Meranski nastavni plan iz 1905. godine. *Matematika i škola*, *12*(56), 8–12.

Глејзер, Г. Д. (1996). Геометрија у школи. Проблеми и расуђивања. *Настава математике*, *XLII*(1-2), 1–6.

Goldenberg, E., Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry?. In: R. Lehrer and D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, 351–367.

Gökçe, S., Güner, P. (2022). Dynamics of GeoGebra ecosystem in mathematics education. *Education and Information Technologies*, *27*, 5301–5323.

Guven, B. (2012). Using dynamic geometry software to improve eight grade students' understanding of transformation geometry. *Australasian Journal of Educational Technology*, *28*(2), 364–382.

Guzman, M. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).*

Gunčaga, J., Majherová, J. (2012). GeoGebra as a motivational tool for teaching and learning in Slovakia. *North American GeoGebra Journal*, *1*(1), 45–48.

Gunčaga, J., Tkačik, Š., Žilková, K. (2017). Understanding of Selected Geometric Concepts by Pupils of Pre-Primary and Primary Level Education. *European Journal of Contemporary Education*, *6*(3), 497–515.

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In: L. Puig and A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 3–19.

Gutiérrez, A. (2014). Geometry. In: P. Andrews and T. Rowland (Eds.), *MasterClass in Mathematics Education – International Perspectives on Teaching and Learning*, 151–164. London: Bloomsbury.

Davis, T. (2006). *Geometry with Computers: Computer-Based Techniques to Learn and Teach Euclidean Geometry*. Retrieved December, 2021 from the World Wide Web http://www.geometer.org/geometer/Geometry.pdf.

Дамјановић, Р. (2016). *Употреба манипулатива у развоју математичког мишљења* (докторска дисертација). Јагодина: Универзитет у Крагујевцу, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу.

Дејић, М., Егерић, М. (2003). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет.

Дејић, М., Егерић, М., Михајловић, А. (2015). *Методика математике у разредној настави*. Јагодина: Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу.

Дејић, М., Михајловић, А. (2015). Улога и значај историје математике у настави. *Годишњак Учитељског факултета у Врању*, *VI*, 67–82.

Denbel, D. G. (2015). Students' Learning Experiences When using a Dynamic Geometry Software Tool in a Geometry Lesson at Secondary School in Ethiopia. *Journal of Education and Practice*, *6*(1), 23–38.

Diković, Lj. (2009). Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. *Computer Science and Information Systems*, *6*(2), 191–203.

Dimitrijević, S., Popović, B., Stanić, M. (2012). Computer use in mathematics teaching – overview of the situation in Serbia. *Croatian Journal of Education*, *14*(2), 387–415.

Doğan, M., Içel, R. (2011). The role of dynamic geometry software in the process of learning GeoGebra example about triangles. *International Journal of Human Sciences*, *8*(1), 1441–1458.

Doruk, B. K., Aktümen, M., Aytekin, C. (2013). Pre-service elementary mathematics teachers' opinions about using GeoGebra in mathematics education with reference to 'teaching practices'. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *32*(3), 140–157.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213–234.

Dryden, G., Vos, J. (2001). *Revolucija u učenju*. Zagreb: Educa.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. In: R. Sutherland and J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In: *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for thePsychology of Mathematics Education*, 2–25.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131.

Ђерић, И., Гутвајн, Н., Јошић, С., Шева, Н. (ур.) (2020). Национални извештај: *TIMSS 2019 у Србији – преглед основних налаза*. Београд: Институт за педагошка истраживања.

Ђокић, О. (2013). *Реално окружење у почетној настави геометрије* (докторска дисертација). Београд: Универзитет у Београду, Учитељски факултет.

Ђокић, О. (2014). Реално окружење у почетној настави геометрије. *Иновације у настави, XXVII*(2), 7–21.

Ђокић, О., Зељић, М. (2017). Теорије развоја геометријског мишљења према Ван Хилу, Фишбајну и Удемон-Кузниаку. *TEME, 41*(3), 623–637.

Đokić, O., Dabić Boričić, M., Jelić, M (2022). Comparing ICT With Physical Manipulative Supported Learning of 3D Geometry in Elementary School. *Journal of Educational Computing*, *59*(8), 1623–1654.

Ђорђевић, Ј. (2010). Проблеми и улога педагошких циљева са освртом на таксономију образовања. *Педагошка стварност, LVI*(1–2), 5–18.

Ђукић, М., Ђерманов, Ј. (2012). Ка хуманој школи у савременом друштву знања: антички путокази. *Зборник Матице српске за друштвене науке*, *141*(4), 607–614.

Егерић, М. (2009). *Методика развијања почетних математичких појмова*. Јагодина: Педагошки факултет.

Живановић, М. (2016). Примена Геогебре у креирању математичко-логичких игара. *Иновације у настави*, *29*(1), 115–122.

Žilinskienė, I. (2014). Use of GeoGebra in primary math education: a theoretical approach. In: *Proceedings of the Lithuanian Mathematical Society*, *55*, 73–78.

Žilinskienė, I., Demirbilek, M. (2015). Use of GeoGebra in Primary Math Education in Lithuania: An Exploratory Study from Teachers’ Perspective. *Informatics in Education, 14*(1), 127–142.

Zakaria, E., Lee, L. S. (2012). Teachers’ Perceptions toward the use of GeoGebra in the Teaching and Learning Mathematics. *Journal of Mathematics and Statistics*, *8*(2), 253–257.

Закон о основном образовању и васпитању (2017). *Службени гласник Републике Србије*, бр. 101.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students’ failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 224–239.

Zdráhal, T., Dofková, R., Nocar, D. (2019). The Effects of ICT on Student Achievement in Mathematics. In: *Proceedings of ICERI2019*, 1166–1173. Seville, Spain.

Зељић, М. Ж., Иванчевић, М. Р. (2019). Алгоритамски и концептуални приступ мерењу површине фигура. *Иновације у настави, XXXII*(1), 64–74.

Zengin, Y., Furkan, H., Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software Geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 31*, 183–187.

Zimmermann W., Cunningham S. (1991). Editor’s introduction: What is mathematical visualization. In: W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1–8. Washington: Mathematical Association of America.

Zirojević, M. M., Jokanović, D. S., Baralić, Đ. (2015). Software ‘Cinderella’ and its application in visualisation of physic and mathematics. *MATHEMATICA MONTISNIGRI, XXXIV*, 86–93.

Zulnaidi, H., Zakaria, E. (2012). The Effect of Using GeoGebra on Conceptual and Procedural Knowledge of High School Mathematics Students. *Asian Social Science, 8*(11), 102–106.

İbili, E. (2019). The Use of Dynamic Geometry Software from a Pedagogical Perspective: Current Status and Future Prospects. *Journal of Computer and Education Research, 7*(14), 337–355.

Idowu, C. B. (2012). Nigerian College Students' Performance in Mathematical Biology. *Oyo State Journal of Mathematical Association of Nigeria*, *3*(2), 1–9.

Idris, N. (2006). *Teaching and Learning of Mathematics, Making Sense and Developing Cognitives Ability*, 2nd ed. Singapore: Utusan Publications & Distributors Sdn. Bhd.

Iordan, A. E., Panoiu, M. (2007). The Interactive Geometry Software Cinderella. *Journal of Engineering Annals*, *V*(3), 15–21.

Iranzo, N., Fortuny, J. M. (2011). Influence of GeoGebra on problem solving strategies. In: L. Bu and R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*, 91–103. Rotterdam: Sense Publishers.

Ismail, Z., Rahman, S. N. A. (2017). Learning 2-Dimensional and 3-Dimensional Geometry with Geogebra: Which Would Students Do Better?. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, *1*(2), 121–134.

Janetzko, H.-D. (2016). The GUI CATO – how natural usage of CAS with CATO modified the mathematical lectures and the interface itself. In: *Proceedings of the 22th Conference on Applications of Computer Algebra*, 64–68. Kassel, Germany.

Janković, A. (2015). Evolucija pedagoških shvatanja o očiglednoj nastavi – od tradicionalnih shvatanja do savremenih teorija učenja i nastave. *Норма: часопис за теорију и праксу васпитања и образовања*, *1*.

Јелић, М. С., Ђокић, О. Ј. (2017). Ка кохерентној структури уџбеника математике – анализа уџбеника према структурним блоковима ТИМСС истраживања. *Иновације у настави*, *XXX*(1), 67–81.

Jeon, K. (2009). Mathematics Hiding in the Nets for a CUBE. *Teaching Children Mathematics*, *15*(7), 394–399.

Jovičić, S. (2015a). Geometrijske paradigme Katherine Houdement i Alaina Kuzniaka. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, *VII*(12), 17–23.

Jovičić, S. (2015b). Duvalov kognitivni model geometrijskog mišljenja. *Бијељински методички часопис*, *2*, 7–13.

Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. In: *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18*(1–2), 29–34.

Juandi, D., Priatna, N. (2018). Discovery learning model with Geogebra assisted for improvement mathematical visual thinking ability. *Journal of Physics: Conference Series*, *1013*, 1–8.

Kadijevich, Dj. M., Žakelj, A., Gutvajn, N. (2015). Explaining Differences for Serbia and Slovenia in Mathematics Achievement in Fourth Grade. *Настава и васпитање*, *LXIV*(1), 21–38.

Kazimovich, Z. M., Guvercin, S. (2012). Applications of Symbolic computation in MATLAB. *International Journal of Computer Applications*, *41*(8), 1–5.

Kamariah, A. B., Rohani, A. T., Ahmad Fauzi, M. A., Aida Suraya, M. Y. (2009). Effect of utilizing Geometer's Sketchpad on performance and mathematical thinking of secondary mathematics learners: An initial exploration. *International Journal of Education and Information Technologies*, *1*(3), 20–27.

Kamii, C., Kysh, J. (2006). The difficulty of "length x width": Is a square the unit of measurement?. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 105–115.

Karadag, Z., McDougall, D. (2009). Dynamic worksheets: visual learning with the guidance of Polya. *MSOR Connections*, *9*(2), 13–16.

Karlsson, A. (2006). Scientific WorkPlace 5.5. *Journal of Statistical Software*, *17*(1), 1–11.

Kay, R., Kwak, J. Y. (2018). Comparing types of mathematics apps used in primary school classrooms: an exploratory analysis. *Journal of Computers in Education*, *5*(3), 349–371.

Kaya, G., Akçakin, V., Bulut, M. (2013). The effects of interactive whiteboards on teaching transformational geometry with dynamic mathematics software. In: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Antalya, Türkiye, 2594–2603.

Kepceoğlu, İ. (2018). Strategies of Constructing Shapes in Cabri. *Higher Education Studies*, *8*(4), 1–8.

Kim, K. M., Md-Ali, R. (2017). GeoGebra: Towards Realizing 21st Century Learning in Mathematics Education. *Malaysian Journal of Learning and Instruction: Special Issues*, 93–115.

Klemer, A., Rapoport, S. (2020). Origami and GeoGebra Activities Contribute to Geometric Thinking in Second Graders. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(11), 1–12.

Kllogjeri, P. (2015). *GeoGebra in Teaching and Learning Mathematics in Albanian Secondary Schools* (PhD Thesis). Debrecen: The Doctoral School in Mathematics and Computer Science, The University of Debrecen.

Knežević Florić, O., Ninković, S. (2012). *Horizonti istraživanja u obrazovanju*. Novi Sad: Filozofski fakultet.

Kozhevnikov, M., Kosslyn, S., Shephard, J. (2005). Spatial versus object visualizers: A new characterization of visual cognitive style. *Memory & Cognition*, *33*(4), 710–726.

Kordaki, M., Balomenou, A. (2006). Challenging Students to View the Concept of Area in Triangles in a Broad Context: Exploiting the Features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 99–135.

Kortenkamp, U. H., Richter-Gebert, J. (2003). *Shrink-Wrapped Java in Education: Deploying The Interactive Geometry Software Cinderella*. Retrieved January, 2021 from the World Wide Web https://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehrstuhl/PublikationenJRG/29_ShrinkWrapedJava.pdf.

Kortenkamp, U., Fest, A. (2008). From CAS/DGS Integration to Algorithms in Educational Math Software. In: *Proceedings of ATCM 08*. Retrieved November, 2020 from the World Wide Web https://atcm.mathandtech.org/EP2008/papers_full/2412008_15283.pdf

Kostić Kovačević, I., Gavrilović, J. (2011). Inkorporiranje obrazovnih softvera za dinamičku matematiku u sistem za učenje na daljinu. U: *X međunarodni naučno-stručni simpozijum INFOTEH – JAHORINA 2011*, Bosna i Hercegovina. Preuzeto septembra 2020 sa internet adrese https://www.researchgate.net/publication/256426293_Inkorporiranje_obrazovnih_softvera_za_dinamicku_matematiku_u_sisteme_za_ucenje_na_daljinu.

Kösa, T., Karakuş, F. (2010). Using dynamic geometry software Cabri 3D for teaching analytic geometry. *Procedia – Social and Behavioral Sciences 2*, 1385‒1389.

Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2 (2019). *Narodne novine*, br. 7/2019.

Kutluca, T. (2013). The effect of geometry instruction with dynamic geometry software; GeoGebra on Van Hiele geometry understanding levels of students. *Educational Research and Reviews, 8*(17), 1509‒1518.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: The University of Chicago Press.

Larios-Osorio, V. (2007). Geometrical ridigity and the use of dragging in a dynamic geometry environment. In: *Proceedings of CERME 5, Working group 7*, 1012‒1021.

Lee, H. J., Boyadzhiev, I. (2013). Challenging Common Misconceptions of Fractions through GeoGebra. In: R. McBride and M. Searson (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2013*, 2893–2898.

Little, C. (2009). Interactive Geometry in the Classroom: Old Barriers & New Opportunities. *Mathematics in School, 38*(2), 9–11.

Lopandić, D. (1979). *Geometrija za III razred usmerenog obrazovanja matematičko-tehničke struke*. Beograd: Naučna knjiga.

Lučić, Z. (2009). *Ogledi iz istorije antičke geometrije*. Beograd: Službeni glasnik.

Љајко, Е. (2014). *Утицај GeoGebra-е на предавање и учење аналитичке геометрије у средњој школи* (докторска дисертација). Нови Сад: Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет.

Ljajko, E., Pavličić, Z., Radulović, I. (2010). Some Tehnical Difficulties With GeoGebra in High-school Mathematics Instruction. In: D. Aćimović (ed.), *Zbornik radova konferencije MIT 2009*, 206–209. Kopaonik–Budva.

Ma, H.-L., Lee, D.-C., Lin, S.-H., Wu, D.-B. (2015). A study of Van Hiele of Geometric Thinking among 1st through 6th Graders. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(5), 1181–1196.

Maarif, S., Wahyudin, Raditya, A., Perbowo, K. S. (2018). Introducing geometry concept based on history of Islamic geometry. *Journal of Physics: Conference Series, 948,* 1–11.

Mainali, B. R. (2014). *GeoGebra from Students' Perspectives*. Retrieved September, 2018 from the World Wide Web https://ggijro1.files.wordpress.com/ 2014/01/art47141.pdf.

Mainali, B. R., Key, M. B. (2012). Using dynamic geometry software GeoGebra in developing countries: A case study of impressions of mathematics teachers in Nepal, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1–16.

Majewski, M. (2007). *MuPAD for the Classroom – a Discussion on Using Computer Algebra Systems in Teaching Mathematics*. Retrieved December, 2020 from the World Wide Web https://atcm.mathandtech.org/EP2007/Invited/Majewski.pdf.

Majherová, J., Palásthy, H., Gunčaga, J. (2014). Educational Software and Visualization in Teaching. In: *5th International Future-Learning Conference on Innovations in Learning for the Future 2014: e-Learning,* May, 2014, İstanbul, TURKEY. Retrieved September, 2020 from the World Wide Web https://www.researchgate.net/publication/264547434_Educational_Software_and_Visualization_in_Teaching.

Максимовић, Ј., Османовић, Ј. (2020). *Статистички тестови у педагошким истраживањима*. Ниш: Филозофски факултет Универзитета у Нишу.

Manganyana, C., Van Putten, S. Rauscher, W. (2020). The Use of GeoGebra in Disadvantaged Rural Geometry Classrooms. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, *15*(14), 97−108.

Manju Gera, Vijaylakshmi (2015). Effect of Duval Cognitive Model on Geometric Reasoning. *International Journal of Research in Economics and Social Sciences*, *5*(9), 172−182.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and Proving in the Cabri Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 257−281.

Marjanović, M. (2002). Didactical Analysis of Primary Geometric Concepts. *The Teaching of Mathematics, V*(2), 99−110.

Марјановић, М. (2004). Метричка, еуклидска, пројективна и тополошка својства. *Настава математике*, *XLIX*(3–4), 1−29.

Marjanović, M. (2007). Didactical Analysis of Primary Geometric Concepts II. *The Teaching of Mathematics*, *X*(1), 11−36.

Maričić, S., Stamatović, J. (2017). The Effect of Preschool Mathematics Education in Development of Geometry Concepts in Children. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(9), 6175–6187.

Маричић, С., Стојкановић, Ј. (2021). Тачкаста и квадратна мрежа у настави геометрије у млађим разредима основне школе. *Зборник радова Педагошког факултета у Ужицу*, *24*(23), 111–126.

Marković, O., Pikula, M., Zubac, M. (2019). A Critical Analysis of the PISA Mathematics Tasks. *Croatian Journal of Education*, *21*(1), 233−274.

Martin, W. G., Strutchens, M. E. (2000). Geometry & measurement. In: E. A. Silver and P. A. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress,* 193−234.

Martinovski, J., Martinovski, S. (2013). Using Geogebra in Primary Schools. *Horizons*, 63–68.

Martín-Caraballo, A. M., Tenorio-Villalón, Á. F. (2015). Teaching Numerical Methods for Non-linear Equations with GeoGebra-Based Activities. *Mathematics Education, 10*(2), 53−65.

Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н., Јакшић, И. (ур.) (2017). TIMSS 2015 у Србији – резултати међународног истраживања постигнућа ученика 4. разреда основне школе из математике и природних наука. *Зборник Института за педагошка истраживања*, *50*(2).

Mackrell, K. (2011). Integrating Number, Algebra, and Geometry with Interactive Geometry Software. In: *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME7*, Rzeszów, Poland.

MdYunus, A. S., Mohd Ayub, A. F., Hock, T. T. (2019). Geometric Thinking of Malaysian Elementary School Students. *International Journal of Instruction*, *12*(1), 1095–1112.

Милановић, И., Такачи, Ђ. (2012). Примена образовног софтвера GeoGebra у одређивању геометријског места тачака. *Настава и васпитање*, *LXI*(4), 709–723.

Миликић, М. (2018). Трајност математичких знања ученика средњих школа стечених у првом циклусу обавезног образовања. *Узданица*, *15*(1), 221–231.

Миликић, М., Вуловић, Н., Михајловић, А. (2020). Геометријска интерпретација разломака применом образовног софтвера ГеоГебра. *Узданица*, *17*(1), 307–317.

Миликић, М., Маричић, С., Вуловић, Н. (2022). Примена софтвера GeoGebra при формирању појма обима фигуре у млађим разредима основне школе. *Зборник радова*, Педагошки факултет у Ужицу, *25*(24), 127−140.

Милинковић, Ј., Лазић, Б. (2018). Постигнуће ученика на ТИМСС и ПИСА испитивању као смерница за измене у наставном програму математике. *Иновације у настави*, *XXXI*(3), 74–87.

Милинковић, Ј., Марушић Јаблановић, М., Дабић Боричић, М. (2017). Постигнуће ученика из математике: главни налази, трендови и наставни програм. *Библиотека „Педагошка теорија и пракса”*, *44*.

Милинковић, Ј., Мићић, В. (2008). Улога дидактичких средстава у основношколској геометрији. У: М. Егерић (ур.), *Методички аспекти наставе математике*, 38−43. Јагодина 23–24. јун 2008.

Миловановић, М. (2014). *Интерактивна мултимедија у настави математике* (докторска дисертација). Крагујевац: Природно-математички факултет.

Mittal, V. (2018). Use of GeoGebra as a Mathematical Tool in Schools. *Indian Journal Of Applied Research*, *8*(5), 40–41.

Mićanović, V. (2016). *Modeli primjene računara u početnoj nastavi matematike*. Podgorica: Univerzitet Crne Gore.

Mićanović, V. (2021). ICT kao izazov ili potreba u početnoj nastavi matematike. У: S. Lawrence, Н. Вуловић и А. Михајловић (ур.), *Методички аспекти наставе математике IV: зборник радова са четвртог међународног научног скупа*,131−145, 2–3. новембар 2017, Јагодина: Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу.

Мићић, В. Каделбург, З. (2019). У: В. Мићић (ур.), *Заснивање наставе геометрије*. Београд: Друштво математичара Србије.

Мићић, В. (ур.) (2019). *Заснивање наставе геометрије*. Београд: Друштво математичара Србије.

Mihajlov Carević, M., Denić, N. (2017). GeoGebra to help in the understanding and memorizing mathematical formulas. In: *Proceedings of 10th International Scientific Conference "Science and Higher Education in Function of Sustainable Development"*, 13–19. Mećavnik, Užice, Serbia.

Мишчевић-Кадијевић, Г. (2009). Кооперативни приступ у настави и трајност ученичких знања. *Настава и васпитање*, *LVIII*(4), 499–508.

Moler, C., Little, J. (2020). A History of MATLAB. In: *Proc. ACM Program. Lang*. 4, HOPL.

Molnár, P., Lukáč, S. (2015). Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education: Attitudes of Teachers. *International Journal of Information and Communication Technologies in Education*, 4(4), 19–33.

Moyer-Packenham, P. S., Ulmer, L. A., Anderson, K. L. (2012). Examining Pictorial Models and Virtual Manipulatives for Third-Grade Fraction Instruction. *Journal of Interactive Online Learning*, *11*(3), 103–120.

Mthethwa, M., Bayaga, A., Bossé, M. J., Williams, D. (2020). GeoGebra for learning and teaching: A parallel investigation. *South African Journal of Education, 40*(2), 1–12.

Mudaly, V., Fletcher, T. (2019). The Effectiveness of GeoGebra When Teaching Linear Functions Using the IPad. *Problems of Education in the 21st Century*, *77*(1), 55–81.

Mukiri, M. I. (2016). *Feasibility of Using GeoGebra in the Teaching and Learning of Geometry Concepts in Secondary Schools in Kajiado County, Kenya* (PhD Thesis). School of Education of Kenyatta University.

Mulligan, J., Prescott, A., Mitchelmore, M., Outhred, L. (2005). Taking a closer look at young students' images of area measurement. *Australian primary mathematics classroom*, *10*(2), 4–8.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Boston: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

Murni, V., Sariyasa, S., Ardana, I. M. (2017). *GeoGebra* Assist Discovery Learning Model for Problem Solving Ability and Attitude toward Mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, *895*, 1–6.

Mushipe, M., Ogbonnaya, U. I. (2019). Geogebra and Grade 9 Learners' Achievement in Linear Functions. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, *14*(8), 206–219.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: Council for Exceptional Children.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Национални просветни савет Републике Србије. (2013). *Смернице за унапређивање улоге информационо-комуникационих технологија у образовању*. Београд.

Nadrljanski, Đ. (2000). *Obrazovni softver – hipermedijalni sistemi*. Novi Sad: Univerzitet u Novom Sadu.

Namestovski, Ž. (2013). *Analiza efekata primene obrazovnih softvera na motivisanost nastavnika i učenika u nižim razredima osnovne škole* (doktorska disertacija). Zrenjanin: Univerzitet u Novom Sadu, Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin”.

Наход, С. (1997). *Ставови ученика према настави предмета природних наука*. Београд: Министарство просвете Републике Србије.

Ng Lee, Y., Kamariah, A. B., Samsilah, R., Wong, S. L., Petri, Z. M. A. R. (2005). Predictors of self-regulated learning in Malaysian smart schools. *International Education Journal*, *6*(3), 343–353.

Nzaramyimana, E., Mukandayambaje, E., Iyamuremye, L., Hakizumuremyi, V., Ukobizaba, F. (2021). Effectiveness of GeoGebra towards Students' Active Learning, Performance and Interest to learn Mathematics. *International Journal of Mathematics and Computer Research*, *9*(10), 2423–2430.

Olsson, J. (2019). Relations Between Task Design and Students' Utilization of GeoGebra. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *5*, 223–251.

Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања, Математика (2011). Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

Or, A. C. M. (2013). Designing tasks to foster operation apprehension for visualization and reasoning in dynamic geometry environment. In: C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education: Proceedings of ICMI Study 22*, 89–98. Oxford, UK.

Павловић Бабић, Д., Бауцал, А. (2009). *Математичка писменост: PISA 2003 и PISA 2006*. Београд: Министарство просвете Републике Србије, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Институт за психологију Филозофског факултета Универзитета у Београду.

Pallant, J. (2011). *SPSS: priručnik za preživljavanje: postupni vodič kroz analizu podataka pomoću SPSS-a*. Beograd: Mikro knjiga.

Panaoura, G., Gagatsis, A. (2010). The Geometrical Reasoning of Primary and Secondary School Students. In: *Proceedings of CERME 6, Working group 5*, 746–755. Lyon, France.

Patsiomitou, S., Emvalotis, A. (2010). Students movement through Van Hiele levels in a Dynamic geometry guided reinvention process. *Journal of Mathematics and Technology*, *3*, 18–48.

Петровић, Н., Трнинић, М. (1996). Мерење фигура у разредној настави. *Норма: часопис за теорију и праксу васпитања и образовања*, *1–2*, 55–63.

Pech, P. (2012). *How integration of DGS and CAS helps to solve problems in geometry*. Retrieved November, 2020 from the World Wide Web https://atcm.mathandtech.org/ep2012/invited_papers/3472012_19796.pdf.

Piaget, J., Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. New York: Norton.

Pittalis, M., Christou, C. (2013). Coding and decoding representations of 3D shapes. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 673–689.

Potkonjak, N., Šimleša, P. (ur.) (1989). *Pedagoška enciklopedija 1*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

Правилник о плану и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања (2017). *Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије*, бр. 10/2017.

Правилник о плану и програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018). *Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије,* бр. 16/2018.

Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019). *Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије*, бр. 5/2019.

Правилник о плану и програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019). *Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије*, бр. 11/2019.

Првановић, С. (1974). *Методика наставе математике: уџбеник за VI разред педагошке академије*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Preiner, J. (2008). *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra* (PhD Thesis). Slazburg: University of Salzburg, Faculty of Natural Sciences.

Прентовић, Б. (2014). *Рачунар у настави аналитичке геометрије у гимназији* (докторска дисертација). Нови Сад: Природно-математички факултет.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42–46.

Presmeg N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: A. Gutiérrez and P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 205–235.

Prodromou, T. (2014). GeoGebra in Teaching and Learning Introductory Statistics. *The Research Journal of Mathematics and Technology, 3*(2), 17‒30.

Pfeiffer, C. (2017). *A study of the development of mathematical knowledge in a GeoGebra-focused learning environment* (PhD Thesis). Stellenbosch: Stellenbosch University, Faculty of Education.

Phan-Yamada, T., Man, S. W. (2018). Teaching Statistics with GeoGebra. *North American GeoGebra Journal*, *7*(1), 14‒24.

Radović, S. (2013). Teaching Materials “Surface Area of Geometric Figures” Created Using the Software Package *GeoGebra*. *European Journal of Contemporary Education, 4*(2), 72‒80.

Radovanović, V., Karić, J. (2011). Stavovi nastavnika prema primeni informacionih i komunikacionih tehnologija u školama za gluve i nagluve. *Specijalna edukacija i rehabilitacija, 10*(1), 37‒48.

Rambe, I., Syahputra, M. R., Octariani, D., Matondang, A. (2020). Discovery Learning Model for Solving System of Linear Equations using GeoGebra. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Multidisciplinary Research*, 383‒386.

Ramlan, A. M., Cahyono, E., Fahinu, Hali, F. (2020). Geometric Reasoning Ability Based on Van Hiele Theory by Geogebra Software. In: *Proceeding of USN Kolaka – ADRI International Conference on Sustainable Coastal-Community Development*, *1*, 69–74.

Ratnasari, D. I. R., Mariani, S., Mulyono, M. (2020). Mathematics Creative Thinking Skills Reviewed from the Students' Self-Confidence by Implementing the Treffinger Learning Model Assisted by Geogebra. *Journal of Primary Education*, *9*(4), 377−386.

Romano, D. A. (2009a). Van Hiele-ova teorija o učenju geometrije. *Metodički obzori*, *4*(1–2), 95−103.

Романо, Д. А. (2009б). О геометријском мишљењу. *Настава математике*, *LIV*(2–3), 1−11.

Rosyid, A., Umbara, U. (2019). Analysis of students' attitudes towards implementation of geogebra-assisted missouri mathematics project. *Journal of Physics: Conference Series*, *1265*, 1−10.

Sarama, J., Clements, D. (2002). Building blocks for young children's mathematical development. *Journal of Educational Computing Research*, *27*(1–2), 93–110.

Sarama, J., Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Saha, R. A., Ayub, A. F. M., Tarmizi, R. A. (2010). The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, *8*, 686–693.

Serin, H. (2018). Perspectives on the Teaching of Geometry: Teaching and Learning Methods. *Journal of Education and Training*, *5*(1), 131−137.

Simbolon, A. K. A. P., Siahaan, L. M. (2021). The Use of Geogebra Software in Improving Student's Mathematical Abilities in Learning Geometry. In: *Proceedings of the International Conference on Culture Heritage, Education, Sustainable Tourism, and Innovation Technologies (CESIT 2020)*, 352–360.

Simmons, M., Cope, P. (1997). Working with a round turtle: the development of angle/rotation concepts under restricted feedback conditions. *Computers & Education*, *28*(1), 23–33.

Sinclair, N., Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM – Mathematics Education*, *47*, 319–329.

Sinclair, M., De Bruyn, Y., Hanna, G., Harrison, P. (2004). Cinderella and The Geometer's Sketchpad. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *4*(3), 423−437.

Sousa, R. T., Alves, F. R. V., Azevedo, I. F. (2021). Categories of intuitive reasoning and GeoGebra 3D: an experience with Brazilian students. *LUMAT General Issue*, *9*(1), 622−642.

Stanimirović, P. S., Milovanović, G. V. (2002). *Programski paket Mathematica i primene*. Niš: Elektronski fakultet.

Stanković, M. (2006). *Osnovi geometrije*. Niš: Prirodno-matematički fakultet.

Станковић, М., Јордановић, М., Јанковић, С. (2015). Примена програмског пакета GeoGebra у циљу осавремењивања наставе математике. У: Ј. Арсенијевић (ур.), *Компетенције васпитача за друштво знања*, 547−554. Кикинда.

Станојевић, Д. (2014). Постигнућа ученика из Србије на међународном истраживању TIMSS 2011 у областима које ученици нису изучавали у настави. *Настава математике*, *LIX*(4), 31–40.

Станојевић, Д., Милинковић, Ј. (2013). *ТИМСС 2011 математика: преглед наставног програма и збирка задатака за 4. разред*. Београд: Институт за педагошка истраживања.

Стевановић, Д. (2013). Кратка историја геометрије кроз проблем трисекције угла. *Математика и информатика*, *2*(1), 7−18.

Stephan, M., Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. Retrieved January, 2020 from the World Wide Web https://www.researchgate.net/profile/Douglas-Clements-2/publication/258933218_Linear_and_area_measurement_in_prekindergarten_to_grade_2/links/55cb3f4f08aebc967dfce792/Linear-and-area-measurement-in-prekindergarten-to-grade-2.pdf.

Стратегија развоја образовања и васпитања у Републици Србији до 2030. године (2021). *Службени гласник Републике Србије*, *63*.

Shadaan, P., Eu, L. K. (2013). Effectiveness of Using Geogebra on Students' Understanding in Learning Circles. *The Malaysian Online Journal of Educational Technology, 1*(4), 1−11.

Tabak, J. (2011). *Geometry: The language of space and form, Revised edition*. Facts On File, Inc.

Taber, K. S. (2018). The Use of Cronbach's Alpha When Developing and Reporting Research Instruments in Science Education. *Research in Science Education*, *48,* 1273–1296.

Takači, Đ., Pešić, D., Tatar, J. (2003). An Introduction to the Continuity of Functions Using Scientific WorkPlace. *The Teaching of Mathematics*, *VI*(2), 105–112.

Takači, Đ., Takači, A. (2008). Uticaj programskih paketa na usvajanje pojmova više matematike. In: *School of Intensive Courses: Development of computer-aided methods in teaching mathematics and science,* 242–249. Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet.

Takači, Đ., Herceg, D., Stojković, R. (2005). Possibilities and Limitations of Scientific WorkPlace in Studying Trigonometric Functions. *The Teaching of Mathematics*, *VIII*(2), 61−72.

Tamam, B., Dasari, D. (2021). The use of Geogebra software in teaching mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, *1882*, 1−7.

Tiwari, S., Obradovic, D., Rathour, L., Narayan Mishra, L., Narayan Mishra, V. (2021). Visualization In Mathematics Teaching. *Journal of Advances in Mathematics*, *21.*

Tolić, M., Jukić, R., Josipović, V. (2015). Multimedijsko učenje i vrednovanje matematičkih panoa na primjeru GeoGebre. *Medijska istraživanja*, *21*(2), 125–153.

Tomić, M. K. (2013). Mathematical Software in Croatian Mathematics Classrooms – A Review of Geogebra and Sketchpad. *Croatian Journal of Education*, *15*(1), 197–208.

Tomčić, L. (2020). Princip očiglednosti kroz delo "Orbis Sensualium pictus". *Pedagoška stvarnost, LXVI,* 44–58.

Тончева, Н. (2011). *Софтуерни технологии за създаване на дидактически материали за обучението по математика*. Шумен: Шуменски университет „Епископ Константин Преславски".

Tran, T., Nguyen, N.-G., Bui, M.-D., Phan, A.-H. (2014). Discovery Learning with the Help of the GeoGebra Dynamic Geometry Software. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, *7*(1), 44–57.

Triwahyuningtyas, D., Rahayu, S., Agustin W. D. (2019). The impact of Geogebra classic application on learning geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, *1381*(1), 1–4.

Tuan Anh, L. (2015). Geogebra as an aid tool for discovering mathematical solutions in teaching and learning of mathematics in Vietnamese schools. *GeoGebra International Journal of Romania*, *4*(1), 51–58.

Tutkun, O. F., Ozturk, B. (2013). The Effect of Geogebra Mathematical Software to the Academic Success and the Level of Van Hiele Geometrical Thinking. *International Journal of Academic Research*, *5*(4), 22–28.

Thambi, N., Eu, L. K. (2013). Effect of students' achievement in fractions using GeoGebra. *SAINSAB, 16*, 97–106.

The International Commission on Mathematical Instruction (1995). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. *Educational Studies in Mathematics*, *28*, 91–98.

Urban, M., Murauyova, H., Gadzaova, S. (2017). Didactic Principles of Visualization of Mathematical Concepts in Primary Education. *Pedagogy*, *127*(3), 70–86.

Uwurukundo, M. S., Maniraho, J. F., Tusiime, M. (2020). GeoGebra integration and effectiveness in the teaching and learning of mathematics in secondary schools: A review of literature. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, *16*(1), 1–13.

Fauzan, A., Slettenhaar, D., Plomp, T. (2002). Traditional Mathematics Education vs. Realistic Mathematics Education: Hoping for Changes. In: *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference*, 1–4.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 60–72.

Furner, J. M., Marinas, C. A. (2012). Geoboards to Geogebra: Moving from the Concrete to the Abstract in Geometry. In: *Electronic Proceedings of the Twenty-third Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 111–118.

Haahr, J. H., Nielsen, T. K., Hansen, M. E., Jakobsen, S. T. (2005). *Explaining Student Performance – Evidence from the international PISA, TIMSS and PIRLS surveys*. Taastrup: Danish Tecnological Institute.

Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R. (2013). When visual and verbal representations meet – The case of geometrical figures. In: *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 409–416.

Hall, J., Lingefjärd, T. (2016). *Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra*. Hoboken: John Wiley & Sons.

Hardy, D. W., Walker, C. L. (2005) *Doing Mathematics with Scientific WorkPlace and Scientific Notebook*. Washington: MacKichan Software, Inc.

Harper, D., Wooff, C., Hodgkinson, D. (1991). *Computer Algebra Support Project: A guide to Computer Algebra Systems*. New York: John Wiley & Sons.

Hershkowitz, R., Arcavi, A., Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning – the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(2), 255–265.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., Vinner, S. (1989). Psychological aspects of learning geometry. In: P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition (ICMI Study Series)*, 70–95. Cambridge: University Press.

Herceg, D. (2008). Dynamical geometry. In: *School of Intensive Courses: Development of computer-aided methods in teaching mathematics and science*, 141–214. Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet.

Herceg, Đ., Herceg Mandić, V. (2013). GeoGebra in a geography class, *Acta Didactica Napocensia*, *6*(1), 61–67.

Heck, A. (1993). *Introduction to Maple*. New York: Springer.

Hinostroza, E., Rehbein, L. E., Mellar, H., Preston, C. (2000). Developing Educational Software: a professional tool perspective. *Education and Information Technologies*, *5*(2), 103–117.

Horzum, T., Ünlü, M. (2017). Pre-service mathematics teachers views about GeoGebra and its use. *Acta Didactica Napocensia, 10*(3), 77–89.

Hohenwarter, M., Lavicza, Z. (2011). *Gaining momentum: GeoGebra inspires educators and students around the world.* Retrieved September, 2018 from the World Wide Web https://ggijro.files.wordpress.com/2011/07/article1.pdf.

Hohenwarter, M., Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference*, 1–6. Pecs, Hungary.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., Lavicza, Z. (2008). Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. In: *11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Nuevo Leon, Mexico. Retrieved June, 2018 from the World Wide Web https://www.researchgate.net/publication/228869636_Teaching_and_calculus_with_free_dynamic_mathematics_software_GeoGebra.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In: M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3, Working group 7*, 1–9. Bellaria: Italy.

Huang, H.-M. E. (2017). Curriculum Interventions for Area Measurement Instruction to Enhance Children's Conceptual Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*, 1323–1341.

Clements, D. H., Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 420–464.

Cohen, J. S. (2003). *Computer algebra and symbolic computation: Mathematical Methods*. Natick, Massachusetts: A K Peters.

Choi, S. K. (2010). Motivating students in learning mathematics with GeoGebra. In: S. Gülseçen, Z. Ayvaz Reis and T. Kabaca (Eds.), *Proceedings of the First Euroasia Meeting of GeoGebra*, 36–45. Istanbul, May, 2010. Istanbul: Istanbul Kültür University.

Chua, G. L. L., Tengah, K. A., Shahrill, M., Tan, A., Eu, L. (2017). Analysing Students' Perspectives on Geometry Learning from the Combination of Van Hiele Phase-based Instructions and GeoGebra. In: *Proceeding of the 3rd International Conference on Education*, *3*, 205–213.

Чапрић, Г. (ур.) (2007). *Национално тестирање ученика IV разреда*. Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

Škrbec, M., Hodnik Čadež, T. (2015). Identifying and Fostering Higher Levels of Geometric Thinking. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(3), 601–617.

Шпијуновић, К., Маричић, С. (2016). *Методика почетне наставе математике.* Ужице: Учитељски факултет.

Šuljić, Š. (2005). GeoGebra – Prvi softver dinamične geometrije na hrvatskom jeziku. *Matematika i škola*, *6*(28), 123–130.

Wassie, Y., A., Zergaw, G., A. (2019). Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(8), 1–11.

Wolfram, S. (2003). *The Mathematica book.* USA: Wolfram Media.

Xistouri, X., Pitta-Pantazi, D. (2013). Using GeoGebra to develop primary school students' understanding of reflection. *North American GeoGebra Journal*, *2*(1), 19–23.

Yazlik, D. O., Ardahan, H. (2012). Teaching transformation geometry with cabri geometry plus II. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 46*, 5187–5191.

Yeo, K. K. J. (2008). Teaching Area and Perimeter: Mathematics-Pedagogical-Content Knowledge-in-Action. In: M. Goos, R. Brown and K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 621–627.

Yu, P. W. D., Tawfeeq, D. A. (2011). Can a kite be a triangle? Bidirectional discourse and student inquiry in a middle school interactive geometric lesson. *New England Mathematics Journal, 43*, 7–20.

ПРИЛОЗИ

ПРИЛОГ 1. ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ ЗНАЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Име и презиме: ______________________________________

Разред и одељење: ____________

Геометријске фигуре и тела

Упутство за рад

На овом тесту решаваћеш задатке о геометријским фигурама и телима, њиховим особинама, међусобним односима, мерним јединицама за дужину, израчунавању обима фигура.

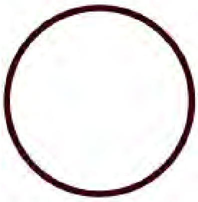
Сваки задатак најпре пажљиво прочитај, размисли а затим покушај да даш одговор на постављено питање. Код појединих задатака треба да одговориш тако што ћеш заокружити слово испред тачног одговора, а у неким да решиш задатак. Буди упоран, прво размисли пре него што даш одговор – понекад постоји један, а понекад више одговора који су тачни. Ако неки задатак не знаш да решиш пређи на следећи задатак. На крају се врати на задатке које ниси решио и још једном пробај да их урадиш. Труди се да одговоре напишеш читко. Време за решавање задатака износи 45 минута (1 школски час).

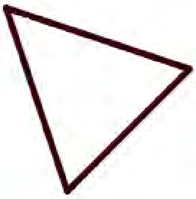
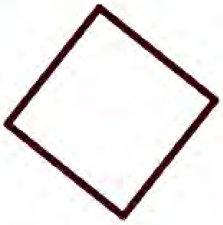
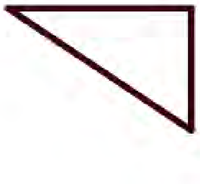
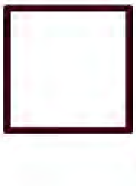
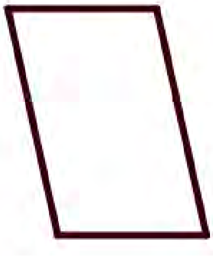
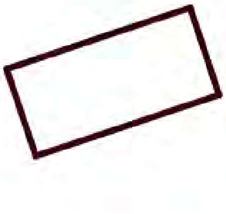
Желимо ти много успеха у раду!

Задаци

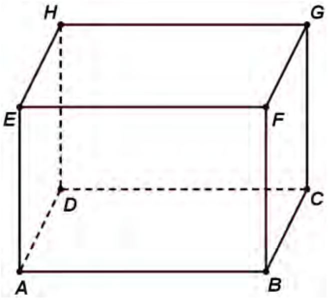
1. Линијом споји назив геометријске фигуре са одговарајућим обликом.

Троугао	Круг	Квадрат	Правоугаоник



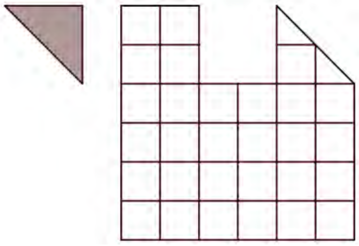
2. Напиши све ивице које уочаваш на датом квадру.



Ивице су: ____________________________

____

3. Колико је сивих фигура потребно да би се прекрила дата мрежа?



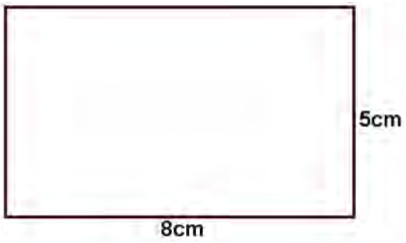
Потребно је _______ фигура.

4. Заокружи слово испред вредности која је мања од једног метра:

а) 12 dm, б) 104 mm, в) 68 cm, г) 9 dm, д) 1 240 mm, ђ) 100 cm.

5. На слици је дат правоугаоник ширине 5 cm и дужине 8 cm. По ком од понуђених израза се рачуна обим датог правоугаоника? Заокружи слово испред тачног одговора.

а) 2 + (5 cm + 8 cm),
б) 5 cm + 8 cm,
в) 5 cm + 8 cm + 8 cm + 5 cm,
г) 2 · (5 cm · 8 cm).



6. Израчунај:

а) обим троугла чије су странице дужине 12 cm, 15 cm, 21 cm;

____

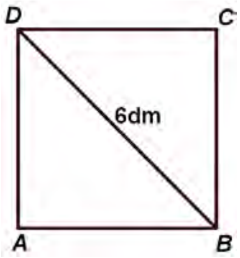
б) дужину странице квадрата чији је обим једнак обиму троугла;

____

в) дужину странице правоугаоника чији је обим једнак обиму троугла, а једна страница је 14 cm.

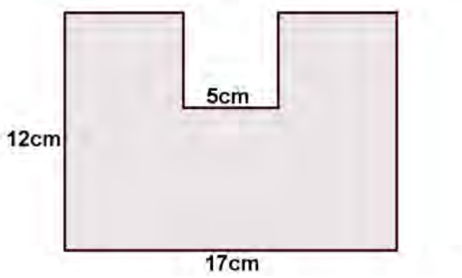
____

7. Нацртан је квадрат *ABCD*. Дуж *BD* дели квадрат на два једнака троугла. Колики је обим квадрата ако је обим једног троугла 16 dm?



Обим квадрата је ______ dm.

8. Из правоугаоника је „одсечен” квадрат. Колики је обим тако добијене фигуре?



Обим фигуре је ______ cm.

ПРИЛОГ 2. ФИНАЛНИ ТЕСТ ЗНАЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Разред и одељење: ________________

Име и презиме: ____

Израчунавање површине. Јединице мере за површину

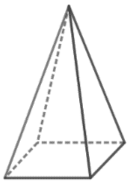
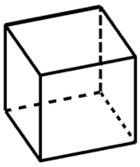
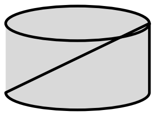
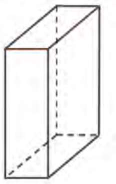
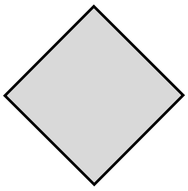
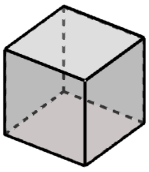
Упутство за рад

На овом тесту решаваћеш задатке о геометријским фигурама и телима, њиховим особинама, међусобним односима, мерним јединицама за површину, израчунавању површине фигура и тела.

Сваки задатак најпре пажљиво прочитај, размисли а затим покушај да даш одговор на постављено питање. У неким задацима треба да одговориш тако што ћеш заокружити слово испред тачног одговора, а у неким да решиш задатак. Буди упоран, прво размисли пре него што даш одговор – понекад постоји један, а понекад више одговора који су тачни. Ако неки задатак не знаш да решиш пређи на следећи задатак. На крају се врати на задатке које ниси решио и још једном пробај да их урадиш. Труди се да одговоре напишеш читко. Време за решавање задатака износи 45 минута (један школски час).

Желимо ти много успеха у раду!

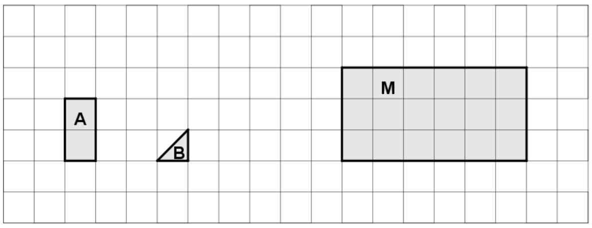
1. Заокружи цртеже геометријских тела који представљају моделе коцке.


2. Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А? ____________________

б) Троугао В? ____________________

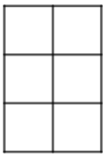


3. Сваки од датих појмова повежи линијом са мерном јединицом којом би измерио његову површину.

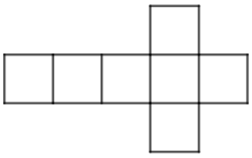
Коверта за писмо	m^2
Квадратић у свесци	cm^2
Под стана	mm^2
Терен за фудбал	a
Србија	km^2
	dm^2

4. Које од датих мрежа јесу мреже површи коцке? Заокружи слова испред тачних одговора.

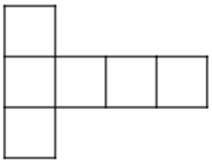
а)



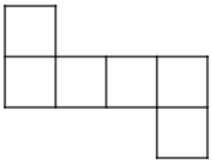
б)



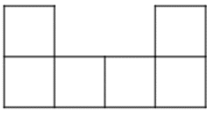
в)



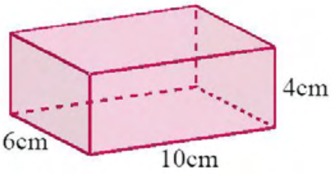
г)



д)



5. Којим изразом можеш израчунати површину квадра чије су ивице дужине 10 cm, 6 cm и 4 cm? Заокружи слово испред тачног одговора.

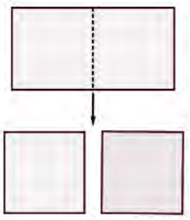


а) $10 \cdot 6 \cdot 4\ cm^2$

б) $10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4\ cm^2$

в) $2 \cdot (10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4)\ cm^2$

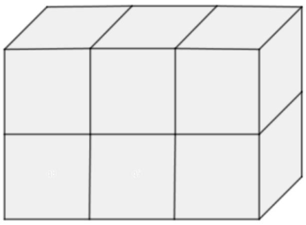
6. Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 5 dm 6 cm. Одреди површину тог правоугаоника.



____

____

7. Милета је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 2 dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.



____

____

8. Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3 m. За кречење 1 m^2 утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2 m и широка 5 dm?

____

____

Одговор: ____

ПРИЛОГ 3. РЕТЕСТ ЗНАЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Разред и одељење: ________________

Име и презиме: ____

Израчунавање површине. Јединице мере за површину

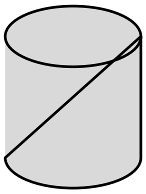
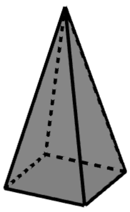
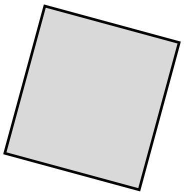
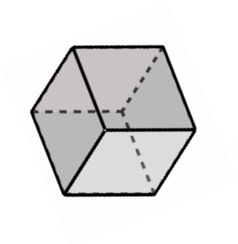
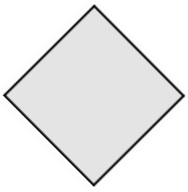
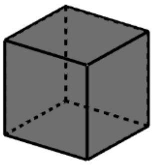
Упутство за рад

На овом тесту решаваћеш задатке о геометријским фигурама и телима: њиховим особинама, међусобним односима, мерним јединицама за површину, израчунавању површине фигура и тела.

Сваки задатак најпре пажљиво прочитај, размисли а затим покушај да даш одговор на постављено питање. У неким задацима треба да одговориш тако што ћеш заокружити слово испред тачног одговора, а у неким да решиш задатак. Буди упоран, прво размисли пре него што даш одговор – понекад постоји један, а понекад више одговора који су тачни. Ако неки задатак не знаш да решиш пређи на следећи задатак. На крају се врати на задатке које ниси решио и још једном пробај да их урадиш. Труди се да одговоре напишеш читко. Време за решавање задатака износи 45 минута (један школски час).

Желимо ти много успеха у раду!

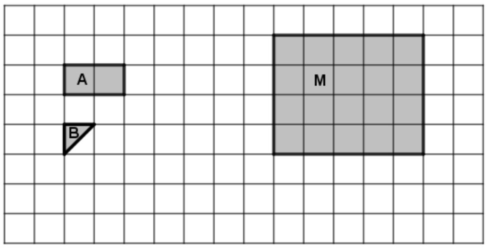
1. Заокружи цртеже геометријских тела који представљају моделе коцке.

2. Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А? ____________________

б) Троугао В? ____________________

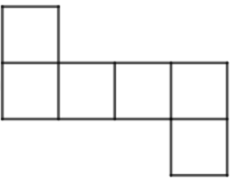


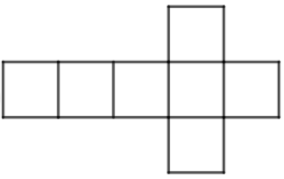
3. Сваки од датих појмова повежи линијом са мерном јединицом којом би измерио његову површину.

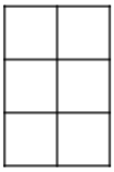
Уџбеник
Квадратић у свесци
Под собе
Њива
Србија

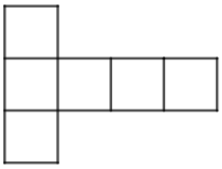
mm^2
km^2
m^2
dm^2
cm^2
ha

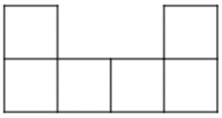
4. Које од датих мрежа јесу мреже површи коцке? Заокружи слова испред тачних одговора.

а)


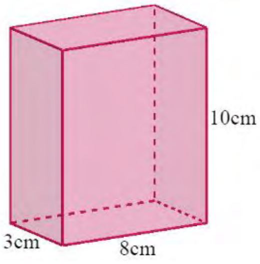
б)


в)


г)


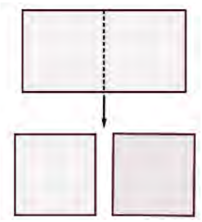
д)


5. Којим изразом можеш израчунати површину квадра чије су ивице дужине 8 cm, 3 cm и 10 cm? Заокружи слово испред тачног одговора.



а) $8 \cdot 3 \cdot 10\ cm^2$
б) $8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10\ cm^2$
в) $2 \cdot (8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10)\ cm^2$

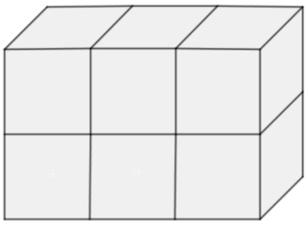
6. Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 4 dm 8 cm. Одреди површину тог правоугаоника.



____

____

7. Драгутин је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 3 dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.



8. Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3 m. За кречење 1 m^2 утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2 m и широка 5 dm?

Одговор: ____

ПРИЛОГ 4. СКАЛА СТАВОВА УЧЕНИКА ПРЕМА МАТЕМАТИЦИ КАО НАСТАВНОМ ПРЕДМЕТУ

Разред и одељење: ____________

*Име и презиме:*____

Упутство за рад

Пред тобом се налази осам тврдњи у вези са математиком. Твој задатак је да пажљиво прочиташ сваку тврдњу, размислиш, и на скали од један до пет даш своју оцену о томе колико сматраш да су истинити (1 – *уопште се не слажем*, 2 – *углавном се не слажем*, 3 – *нити се слажем нити се не слажем*, 4 – *углавном се слажем*, 5 – *потпуно се слажем*). Не постоје тачни и нетачни одговори, сви одговори су добри ако су у сразмери са оним што мислиш.

Желимо ти много успеха у раду!

Тврдње	уопште се не слажем	углавном се не слажем	нити се слажем нити се не слажем	углавном се слажем	потпуно се слажем
Волим да учим нове ствари из математике.	1	2	3	4	5
Математика је један од најважнијих школских предмета.	1	2	3	4	5
Девојчице су подједнако добре из математике као и дечаци.	1	2	3	4	5
Нисам добар/добра у математици.	1	2	3	4	5
Редовно радим домаће задатке из математике.	1	2	3	4	5
Волим да решавам задатке из геометрије.	1	2	3	4	5
Волим да решавам изразе са бројевима.	1	2	3	4	5
Решавање математичких задатака ми није интересантно.	1	2	3	4	5

ПРИЛОГ 5. СКАЛА СТАВОВА УЧЕНИКА О УЧЕЊУ ГЕОМЕТРИЈЕ ПРИМЕНОМ СОФТВЕРСКОГ ПАКЕТА *GEOGEBRA*

Разред и одељење: ____________

*Име и презиме:*____

Упутство за рад

Пред тобом се налази десет тврдњи у вези са учењем геометрије уз примену *GeoGebra* пакета. Твој задатак је да пажљиво прочиташ сваку тврдњу, размислиш, и на скали од један до пет даш своју оцену о томе колико сматраш да су истинити (1 – *уопште се не слажем*, 2 – *углавном се не слажем*, 3 – *нити се слажем нити се не слажем*, 4 – *углавном се слажем*, 5 – *потпуно се слажем*). Не постоје тачни и нетачни одговори, сви одговори су добри ако су у сразмери са оним што мислиш.

Желимо ти много успеха у раду!

Тврдње	уопште се не слажем	углавном се не слажем	нити се слажем нити се не слажем	углавном се слажем	потпуно се слажем
GeoGebra ми је помогла да лакше научим математику.	1	2	3	4	5
Уз *GeoGebr*-у лакше сам научио мерне јединице за површину.	1	2	3	4	5
GeoGebra је допринела да могу лакше да замислим геометријска тела.	1	2	3	4	5
Уз *GeoGebr*-у било ми је лакше да уочим делове геометријских тела (стране, ивице, темена).	1	2	3	4	5
Уз помоћ *GeoGebr*-е очигледније је како настају мреже геометријских тела.	1	2	3	4	5
Уз *GeoGebr*-у сам лакше научио да израчунам површину геометријског тела.	1	2	3	4	5
GeoGebra ми је помогла да лакше научим да израчунам површину геометријске фигуре.	1	2	3	4	5
Волео бих да учитељ користи *GeoGebr*-у чешће на часовима и у другим областима математике.	1	2	3	4	5
GeoGebra није од користи приликом учења математике.	1	2	3	4	5
Математика није занимљивија уз употребу *GeoGebr*-е.	1	2	3	4	5

ПРИЛОГ 6. АНКЕТНИ УПИТНИК ЗА УЧЕНИКЕ

Разред и одељење: _____________
*Име и презиме:*____

Упутство за рад

Пред тобом се налази десет тврдњи у вези са учењем математике. Твој задатак је да пажљиво прочиташ сваку тврдњу и понуђене одговоре, размислиш, и одлучиш се за један од понуђених одговора. Не постоје тачни и нетачни одговори, сви одговори су добри ако су у сразмери са оним што мислиш.

Желимо ти много успеха у раду!

1. На часу математике осећам се
   а) опуштено
   б) уплашено
   в) срећно
   г) несигурно
   д) ништа од понуђеног

2. Математику боље разумем када
   а) редовно пратим у школи
   б) идем на приватне часове
   в) вежбам са другом
   г) вежбам са укућанима
   д) ништа од понуђеног

3. Област математике коју најбоље разумем је
   а) Бројеви и операције са њима
   б) Геометрија
   в) Разломци
   г) Мерење и мере
   д) Ништа од понуђеног

4. Задатке из математике вежбам
   а) свакога дана
   б) једном недељно
   в) пред контролну вежбу
   г) не вежбам задатке

5. Када наиђем на задатак који не могу одмах да решим
   а) наставим да покушавам
   б) питам за помоћ учитељицу
   в) питам за помоћ друга
   г) одустанем

6. Најбоље разумем математику када учитељ
   а) објашњава само речима

б) користи реалне предмете
в) прикаже задатак на пројектору
г) пише на табли
д) ништа од понуђеног

7. На часовима математике
   а) јављам се само кад ми нешто није јасно
   б) јављам се само када знам одговор на питање
   в) не јављам се

8. На часовима математике учимо како да
   а) решимо задатке
   б) применимо математику на решавање проблема

9. Област математике коју најслабије разумем је
   а) Бројеви и операције са њима
   б) Геометрија
   в) Разломци
   г) Мерење и мере
   д) Ништа од понуђеног

10. Математику учим
    а) да бих добио добру оцену
    б) зато што волим
    в) да бих добио похвалу
    г) зато што морам
    д) не учим је

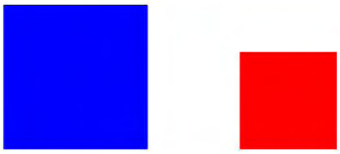
ПРИЛОГ 7. КВАЛИТАТИВНИ ИНТЕРВЈУ ЗА УЧИТЕЉЕ

1. Да ли је *GeoGebra* први образовни софтвер са којим се сусрећете?
2. Које су, по Вашем мишљењу, предности коришћења пакета *GeoGebra* у наставном процесу?
3. Који су, по Вашем мишљењу, недостаци коришћења пакета *GeoGebra* у наставном процесу?
4. Мислите ли да часови математике уз употребу софтвера *GeoGebra* буде интересовање ученика за предмет?
5. Да ли сматрате да коришћење *GeoGebra*-е током извођења наставе математике доприноси бољем разумевању садржаја?
6. Може ли коришћење *GeoGebra* пакета у потпуности да замени употребу очигледних наставних средстава (модела геометријских фигура и тела)?
7. Може ли коришћење *GeoGebra* пакета да замени извођење конструкција на табли маркером и лењиром?
8. Доприноси ли динамичка структура *GeoGebra* пакета бољем разумевању трансформације геометријских тела (развијању мреже површи тела у раван)?
9. Сматрате ли да је квалитет знања ученика бољи када се у раду примењује *GeoGebra*?
10. Мислите ли да коришћење *GeoGebra* пакета на часовима може да побољша искључиво разумевање садржаја геометрије? У оквиру којих још области математике видите могућности потенцијалне примене?
11. На основу искуства стеченог током трајања програма да ли бисте у будућности користили *GeoGebra* пакет на часовима математике?
12. Да ли бисте похађали програм стручног усавршавања у вези са употребом *GeoGebra* пакета у настави?

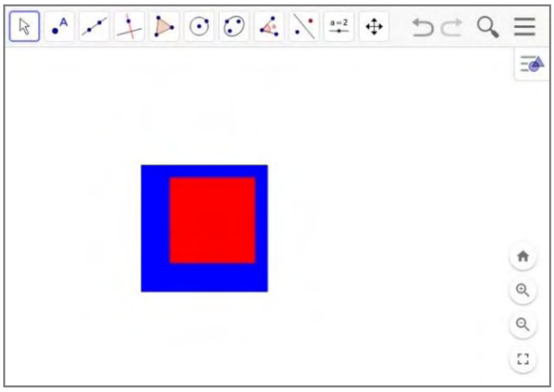
ВЕЖБА 1.	
Наставна јединица	Површина фигуре. Мерење површине
Тип часа	Обрада

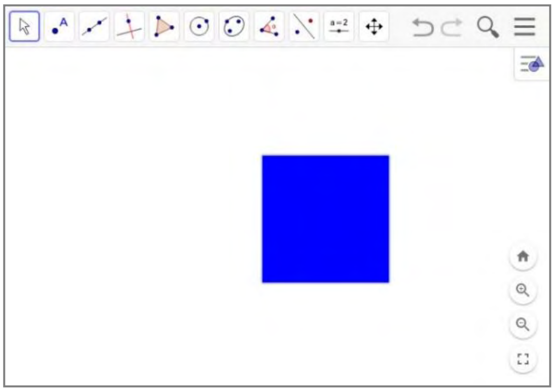
1. Упореди површи датих фигура и одреди у каквом су односу њихове површине:

а)

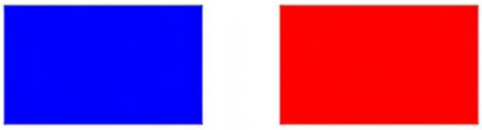


На основу искуства ученици могу да закључе да је површ плавог квадрата већа од површи црвеног квадрата. Додатно, захваљујући динамичном окружењу пакета GeoGebra *превлачењем црвеног квадрата преко плавог и обратно ученици се могу уверити да површ плавог квадрата заиста има већу површину од црвеног (линк).*

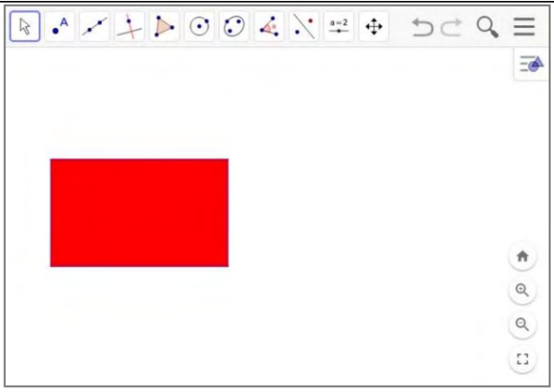


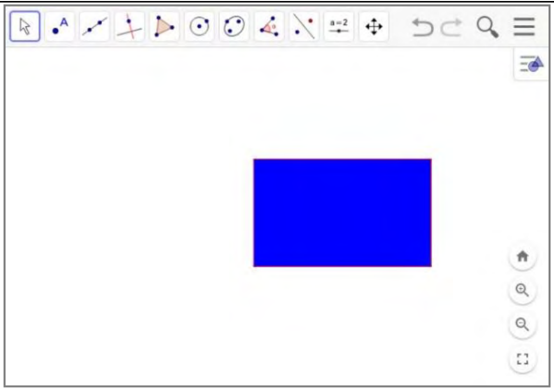


б)

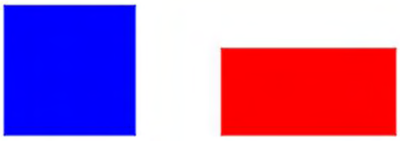


У примеру под б) разлике у димензијама датих правоугаоника нису тако очигледне. За утврђивање односа површи датих фигура довољно је црвеним правоугаоником прекрити плави, односно плавим правоугаоником прекрити црвени како би ученици закључили да су површине оба правоугаоника једнаке (линк). У случају статичног приказа у уџбенику ученици нису у прилици да предузимају овакве активности над датим објектима, али динамично окружење софтвера пружа такву могућност.

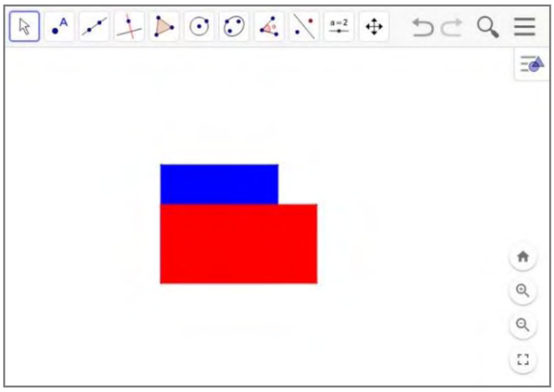


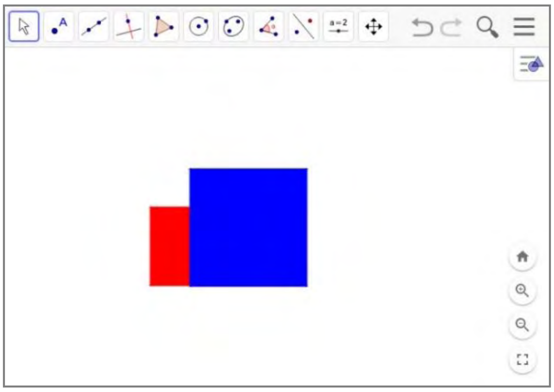


в)

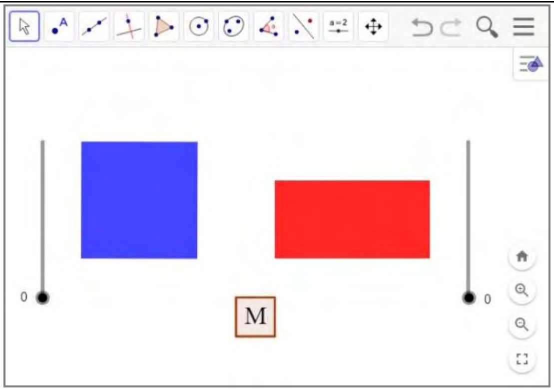


У примеру под в) није могуће превлачењем површ једне фигуре у потпуности прекрити другом, на основу чега ученици закључују да на тај начин није могуће утврдити у каквом су односу површине датих фигура (линк).

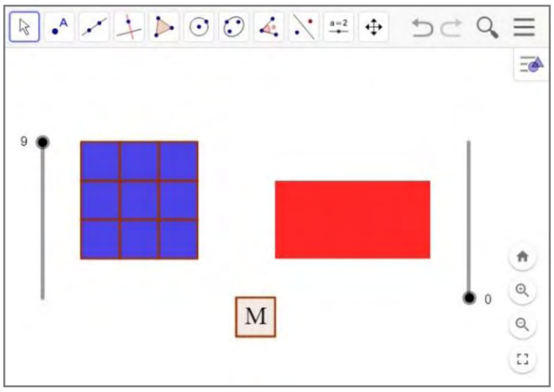




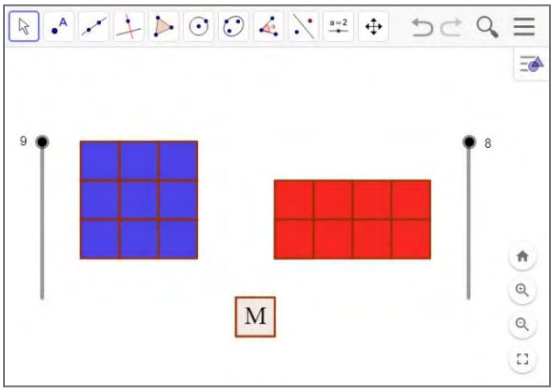
Кроз хеуристички разговор ученици се присећају поступка мерења површине геометријских фигура поплочавањем са којим су се сусрели у трећем разреду и како га могу искористити за упоређивање површина датих фигура. Закључују да је потребно одабрати фигуру која ће представљати јединицу мере којом ће поплочати и квадрат и правоугаоник а затим упоредити добијене мерне бројеве њихових површина. У оквиру класично организоване наставе мерење површине изводили би физичким манипулисањем моделом мерне јединице М којом би поплочавали површи фигура. У динамичном окружењу GeoGebra софтвера померањем креираних клизача ученици на очигледан начин прате процес поплочавања површи квадрата и правоугаоника датом јединицом мере М (линк).



Померањем клизача који се налази лево од квадрата долази до поплочавања квадрата јединицом мере М, при чему је сам клизач подешен тако да пребројава колико је јединица мере потребно како би се прекрила површ квадрата.

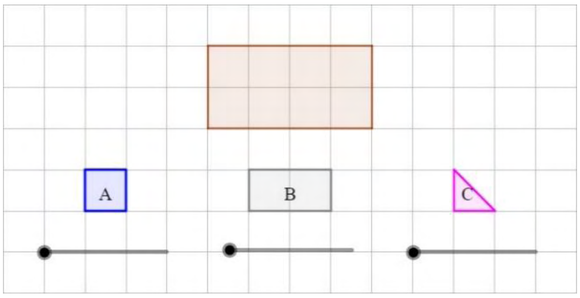


Аналогно, померањем клизача који се налази са десне стране правоугаоника врши се поплочавање правоугаоника јединицом мере М.



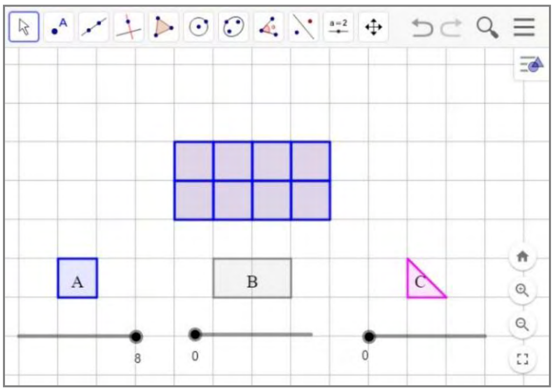
Као резултат процеса мерења површина квадрата и правоугаоника добијени су мерни бројеви површина, а њиховим поређењем ученици закључују да површ квадрата има већу површину, јер је 9 > 8.

2. Колика је површина великог правоугаоника ако је јединица мере:
   а) квадрат А
   б) правоугаоник В
   в) троугао С

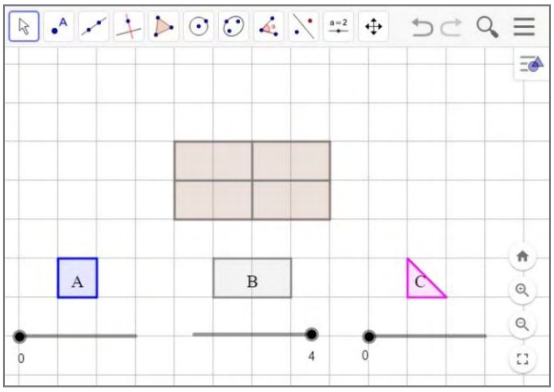


Користећи клизаче креиране за сваку од датих фигура А, В и С које представљају јединице мере ученици на очигледан начин могу пратити процес поплочавања површи правоугаоника датим површима (квадратну мрежу која може користити ученицима као помоћ приликом мерења површине могуће је уклонити деактивацијом одговарајуће опције) (линк).

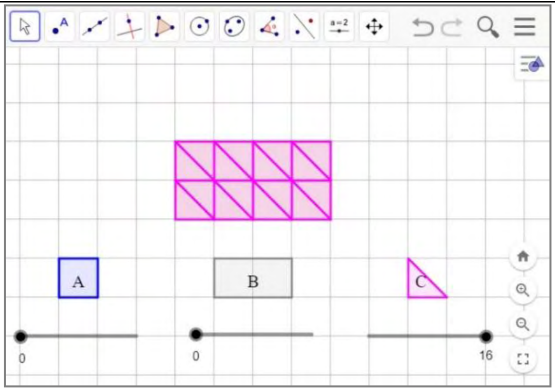
Приликом поплочавања квадратом А померањем одговарајућег клизача добијен је мерни број 8.



Када је поплочавање вршено правоугаоником В мерни број површине великог правоугаоника износи 4.

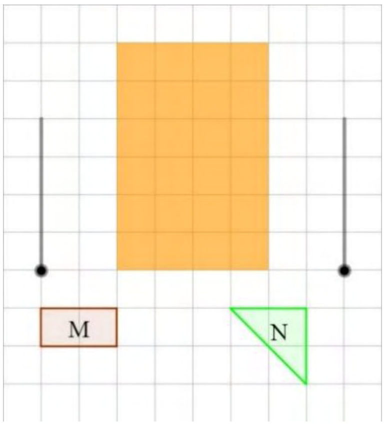


У случају поплочавања површи правоугаоника троуглом С мерни број износи 16.

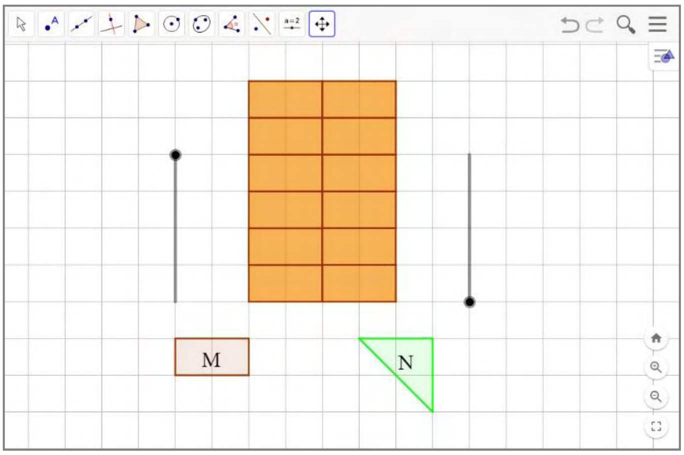


Све време, ученици су у ситуацији да посматрају графичку репрезентацију проблема и закључују да се као резултат поплочавања исте површи различитим јединицама мере добијају различити мерни бројеви.

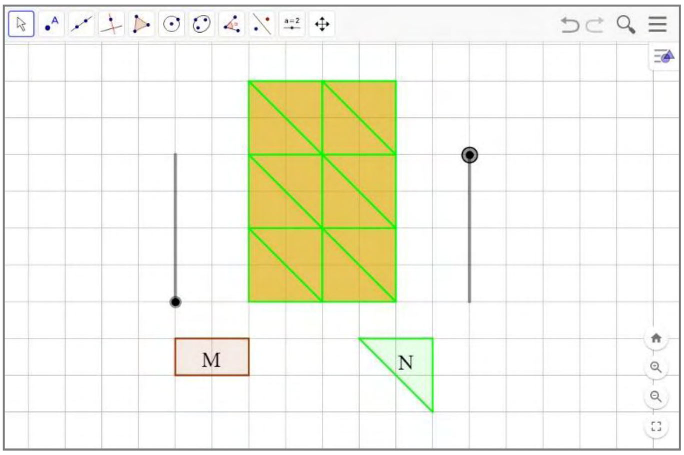
3. Упореди мерне бројеве површине великог правоугаоника ако је јединица мере:
   а) правоугаоник M
   б) троугао N



Користећи креиране клизаче за фигуре M и N које представљају јединице мере ученици могу пратити процес поплочавања површи правоугаоника датим површима (квадратну мрежу која може користити ученицима као помоћ приликом мерења површине могуће је уклонити деактивацијом одговарајуће опције) (линк).
Приликом поплочавања правоугаоником M померањем одговарајућег клизача добијен је мерни број 12.

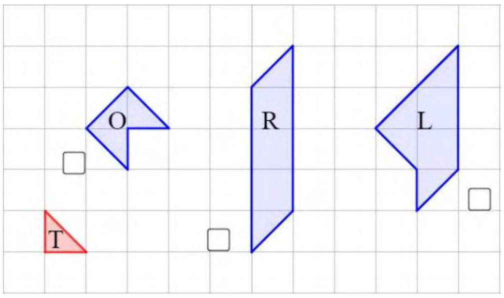


У случају поплочавања троуглом N мерни број износи такође 12.



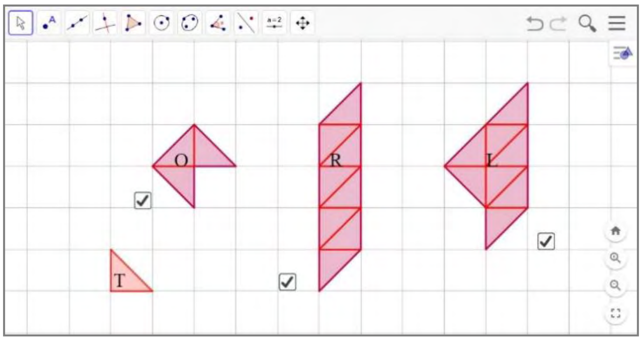
На основу поплочавања површи правоугаоника датим јединицама мере ученици закључују да су мерни бројеви једнаки иако су јединице мере различитог облика.

4. Површине фигура O, R и L изрази бројем јединица мере T, а затим резултате упиши у табелу.

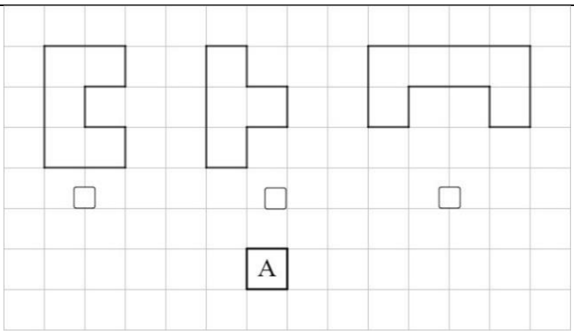


Фигура	Површина
O	
R	
L	

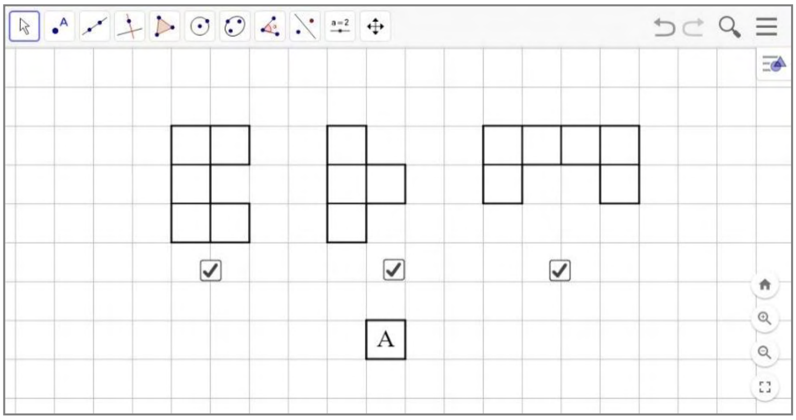
Поплочавањем површи датих фигура троуглом T (кликом на поље за потврду поред сваке фигуре) (линк) ученици утврђују колике су њихове површине и уписују у одговарајућа поља у табели.



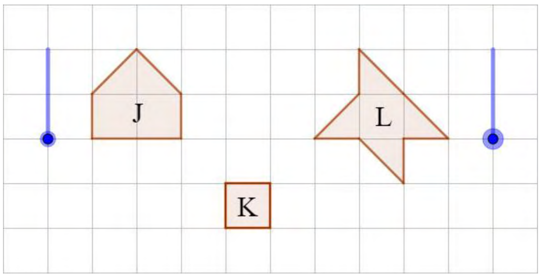
5. Упореди површине датих фигура. Фигуру са највећом површином обоји црвеном, а са најмањом површином обоји зеленом бојом. Јединица мере је квадрат A.



Поплочавањем површи датих фигура квадратом А (кликом на поље за потврду испод сваке фигуре) (линк) и упоређивањем добијених мерних бројева ученици утврђују која од њих има највећу односно најмању површину и којом бојом их треба обојити.

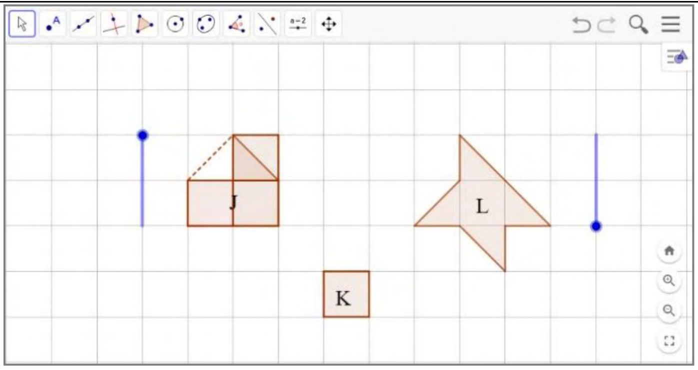


6. Фигура J састоји се из три цела квадрата K. Из колико целих квадрата K се састоји фигура L?

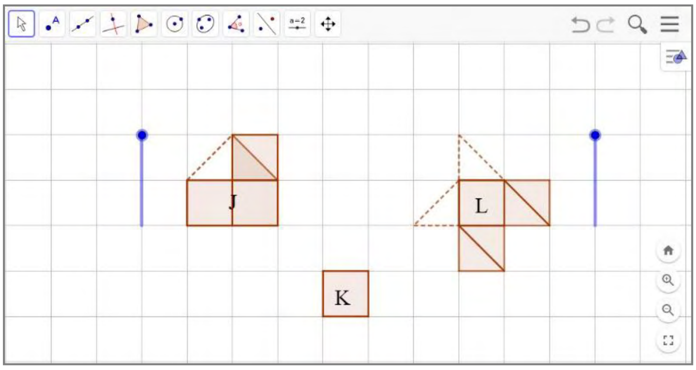


Декомпозицијом датих фигура коришћењем клизача формирају се фигуре чију је површину могуће изразити у датој јединици мере K (линк).

Најпре уз помоћ клизача са леве стране ученици могу пратити декомпозицију фигуре J.

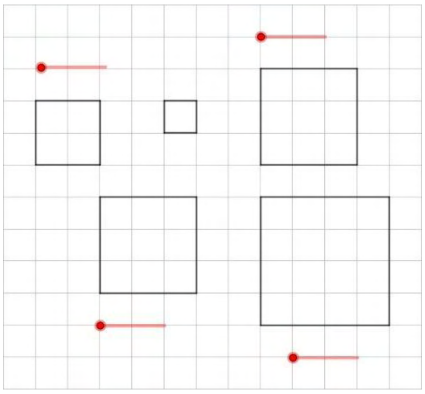


Након тога померањем клизача са десне стране могу пратити процес декомпозиције фигуре L.

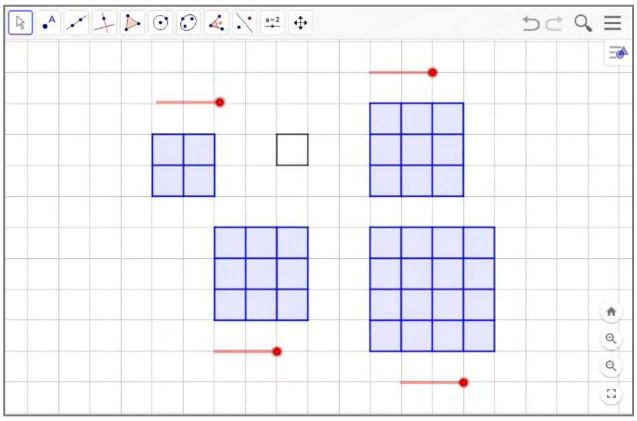


ВЕЖБА 2.	
Наставна јединица	Површина фигуре. Мерење површине
Тип часа	Утврђивање

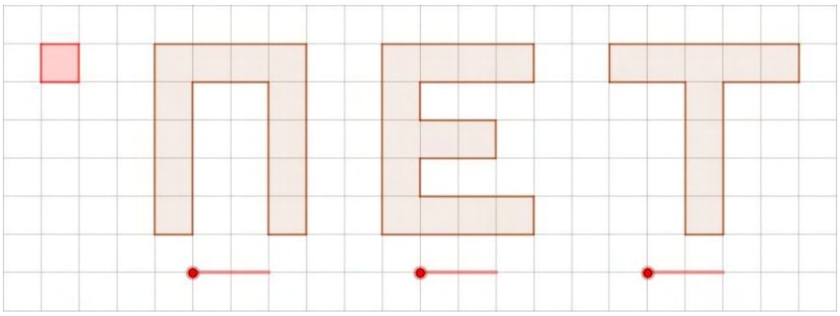
1. Пронађи међу датим квадратима два који су састављени од истог броја квадратића и обоји их плавом бојом.



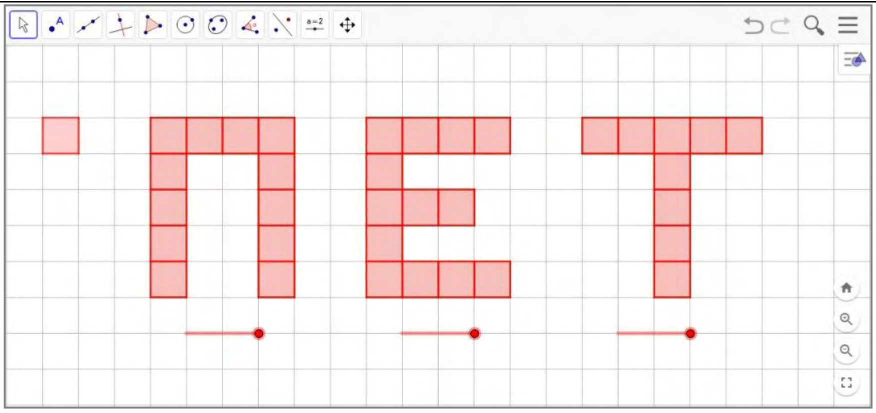
Коришћењем креираних клизача ученици могу пратити процес поплочавања површи квадрата јединичним квадратићима (линк) и на основу тога одредити која два су састављена од истог броја квадратића.



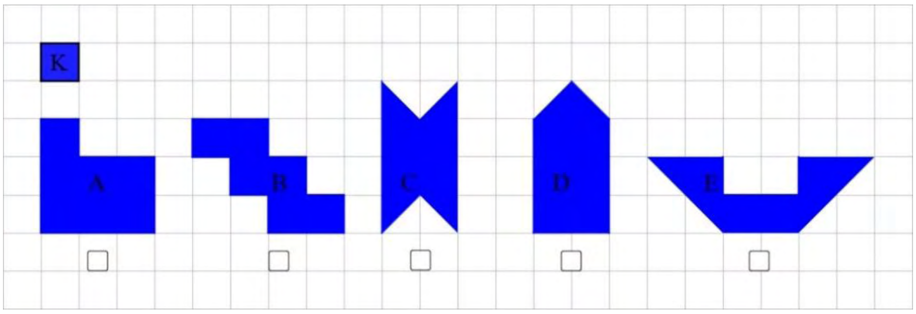
2. Одреди површине следећих фигура ако је јединица мере црвени квадратић и одговори на следећа питања:
а) Највећу површину има слово ____, јер се састоји од ____ јединица мере.
б) Најмању површину има слово ____, јер се састоји од ____ јединица мере.



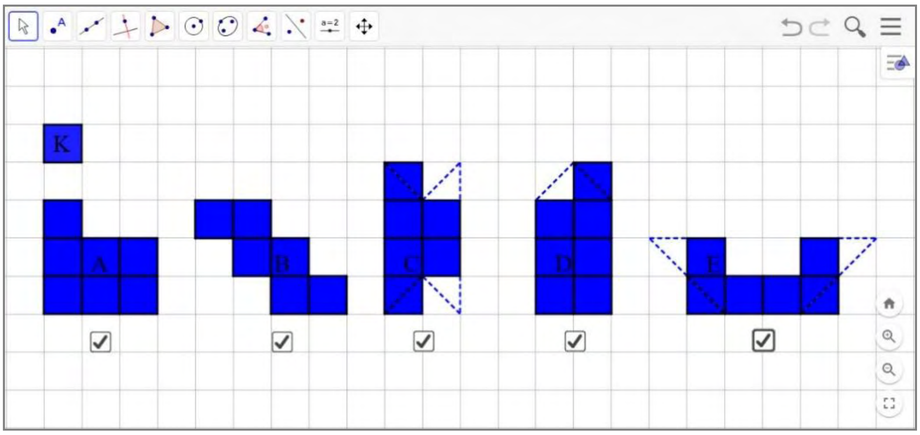
Поплочавањем површи датих фигура црвеним квадратићем (користећи клизаче испод сваке фигуре) (линк) и упоређивањем добијених мерних бројева ученици утврђују која од њих има највећу односно најмању површину.



3. Ако је површина квадрата K јединица мере, одреди површине датих фигура. Које фигуре имају једнаке површине?

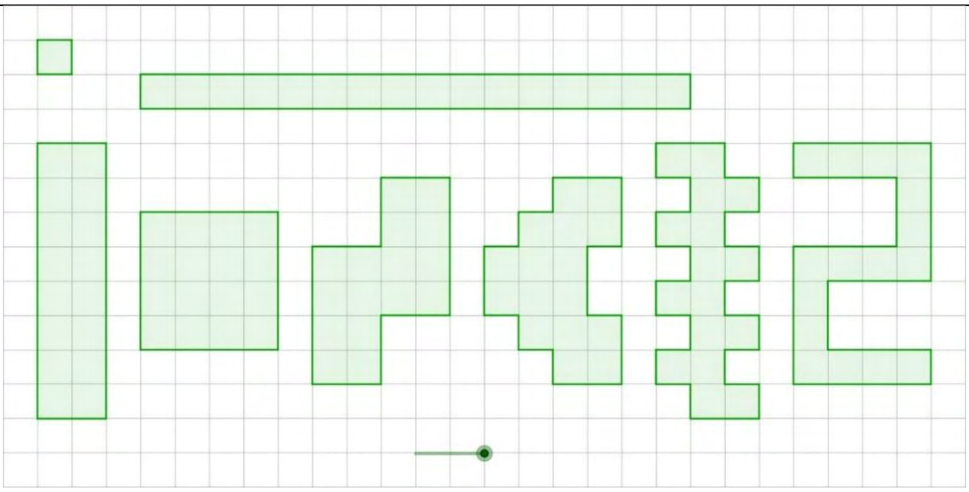


Кликом на поље за потврду испод сваке фигуре добија се визуелни приказ поплочавања површи фигуре јединицом мере K (линк). Пребројавањем квадрата K ученици могу закључити које фигуре имају једнаке површине.



4. Нацртај на квадратној мрежи пет различитих фигура чија је површина 16 јединица мере 🟩 .

Померањем клизача појављују се фигуре различитог облика а исте површине, 16 јединица мере 🟩 *(линк). Тако ученици могу да закључе да површи различитог облика могу имати исту површину.*
Поред датих, могуће је креирати велики број других фигура дате површине.

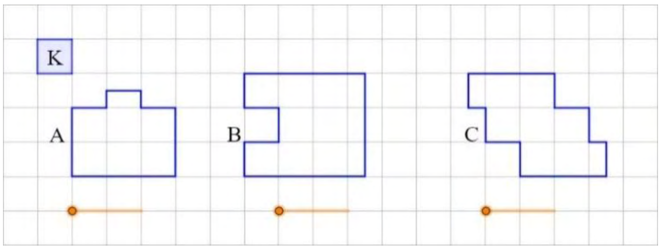


5. Процени површине следећих фигура као што је започето.

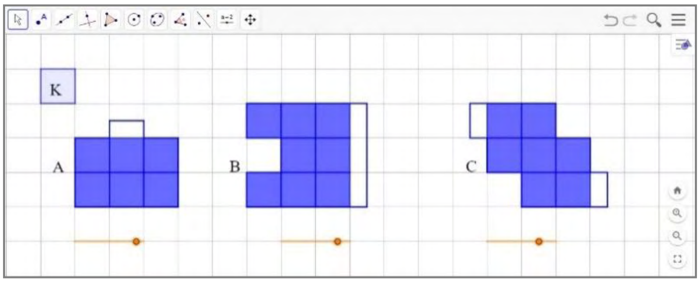
   $6\ \mathrm{K} < P_{\mathrm{A}} < 7\ \mathrm{K}$

   ___ $< P_{\mathrm{B}} <$ ___

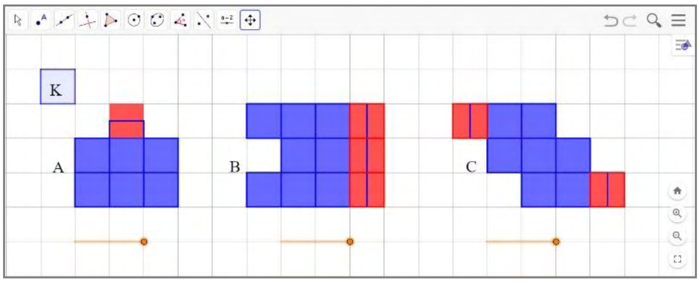
   ___ $< P_{\mathrm{C}} <$ ___



Користећи клизаче ученици могу увидети колико се целих квадрата K налази у фигурама (плави квадрати), као и број целих квадрата потребних да би се преостали делови површи фигура поплочали (црвени квадрати) ([*линк*]*).*

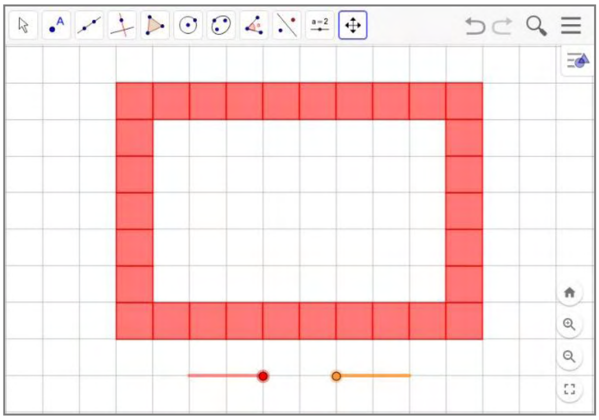


Померањем клизача фигуре се најпре поплочавају плавим, а затим црвеним квадратима.

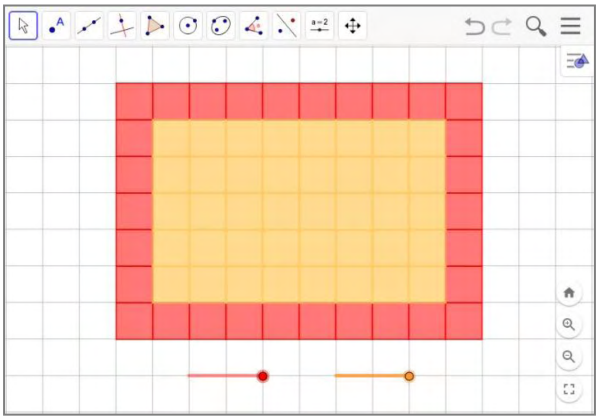


6. Под правоугаоног облика треба прекрити плочицама квадратног облика тако да дуж ивица пода буде по један ред црвених плочица, а у средини наранџасте. Колико треба црвених, а колико наранџастих плочица, ако уз дужу ивицу пода стаје 10, а уз краћу 7 плочица?

Захваљујући динамичном окружењу пакета GeoGebra померањем црвеног клизача ученици имају прилику да посматрају ређање црвених плочица дуж ивица пода (линк).



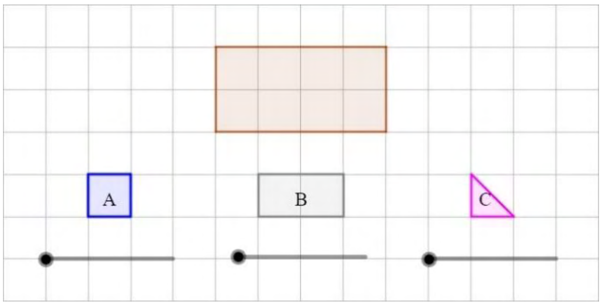
Померањем наранџастог клизача врши се попуњавање преосталог дела пода наранџастим плочицама.



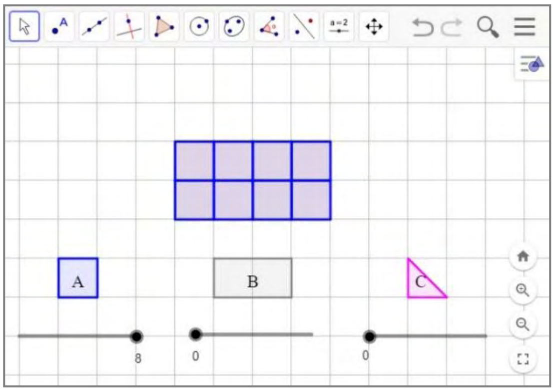
Пребројавањем употребљених плочица ученици долазе до решења задатка.

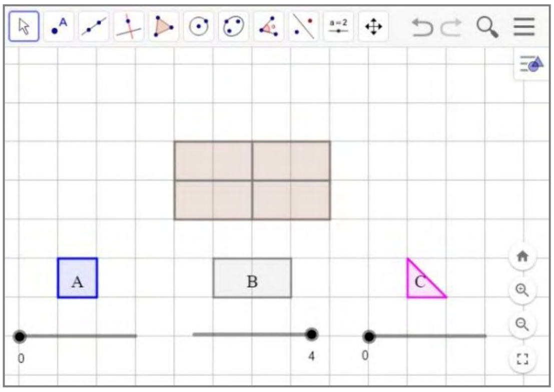
ВЕЖБА 3.	
Наставна јединица	Јединице мере за површину m^2, dm^2, cm^2, mm^2
Тип часа	Обрада

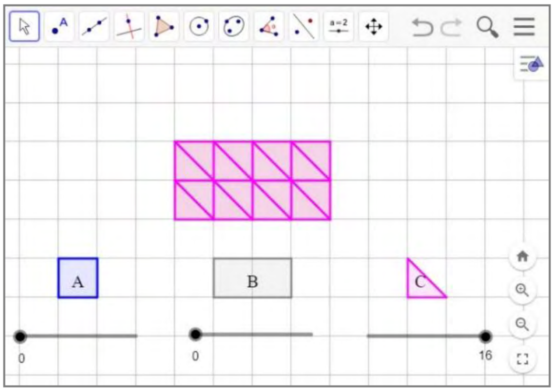
1. Одреди површину великог правоугаоника ако је јединица мере:
   а) квадрат A
   б) правоугаоник B
   в) троугао C



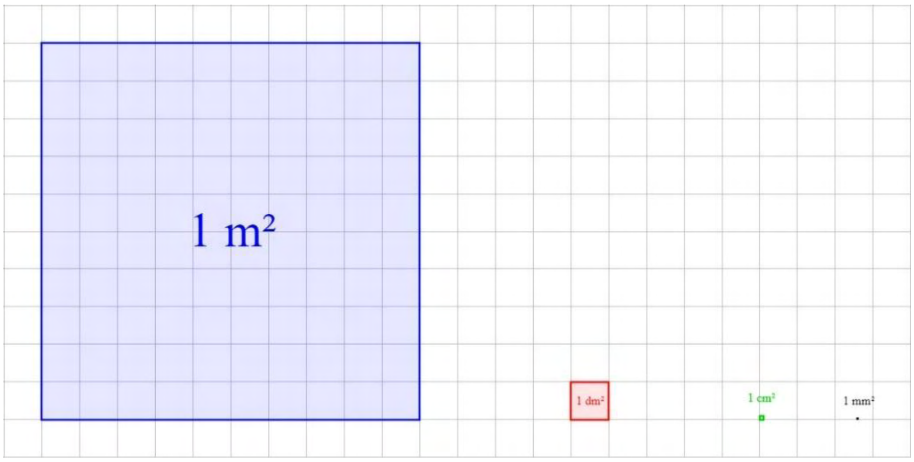
Путем анимација доступних коришћењем креираних клизача, ученици могу закључити да мерењем површине исте површи различитим јединицама мере могу добити различите мерне бројеве (линк). Приликом поплочавања квадратом A померањем одговарајућег клизача добијен је мерни број 8. Када се поплочавање врши правоугаоником B мерни број површине великог правоугаоника износи 4, а у случају поплочавања површи правоугаоника троуглом C мерни број износи 16.







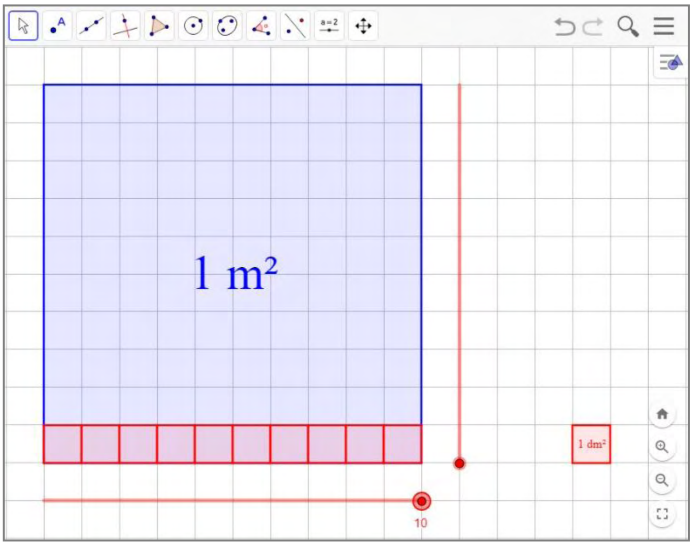
С обзиром да се површина мерене површи није променила већ да су промењене јединице мере којима су вршена мерења, ученици закључују да разлог добијања различитих мерних бројева јесу коришћене јединице мере. По аналогији са увођењем стандардних мерних јединица за мерење дужине, ученици закључују да *је као решење проблема потребно увести једну сталну и непромењиву јединицу мере како би се при сваком мерењу површине исте површи добио исти мерни број.*



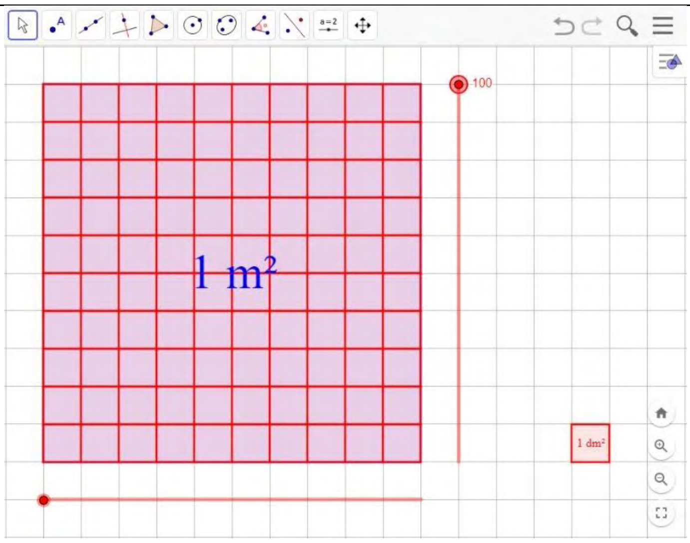
Претходни приказ омогућава ученицима да уоче односе који владају међу јединицама мере за површину. Захваљујући могућности увеличавања и пројекције садржаја на таблу или зид, ученици могу да стекну представу о томе колику површину представљају квадратни метар, квадратни дециметар, квадратни центиметар и квадратни милиметар у реалном окружењу.

Употребом клизача на динамичан начин могу закључити колико пута је квадратни дециметар мањи од квадратног метра (линк).

Мењањем вредности хоризонталног клизача могу уочити да се у једном реду налази десет квадратних дециметара.



Употребом вертикалног клизача уочавају да се са десет редова од по десет дециметара може поплочати површ квадратног метра, односно да је квадратни дециметар јединица мере за површину сто пута мања од квадратног метра.



Аналогно закључују о односима осталих јединица мере за површину.

2. Следеће величине изрази у наведеним јединицама мере:

12 m^2 = _____dm^2

6 m^2 = ______cm^2

49 dm^2 = _____cm^2

4 000 000 mm^2 = _______cm^2

78 000 cm^2 = _______dm^2

22 000 dm^2 = ________m^2

4 m^2 20 dm^2 = _______cm^2

5 dm^2 80 cm^2 = _______mm^2

3. У празна поља упиши знак >, < или =, тако да тврђења буду тачна.

5 m^2 ☐ 200 dm^2

350 dm^2 ☐ 30 000 cm^2

50 900 cm^2 ☐ 590 dm^2

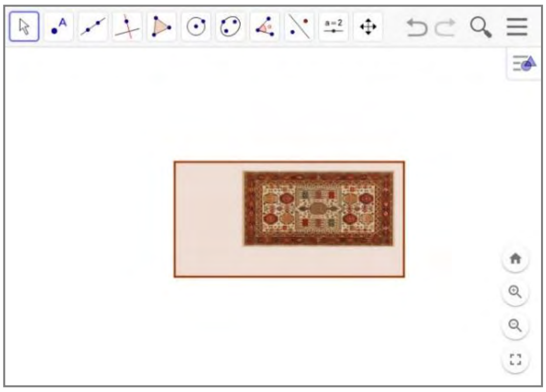
4 600 000 mm^2 ☐ 460 dm^2

4. Следеће величине поређај од најмање до највеће.

57 cm^2, 250 mm^2, 310 dm^2, 450 m^2, 602 cm^2, 55 000 mm^2

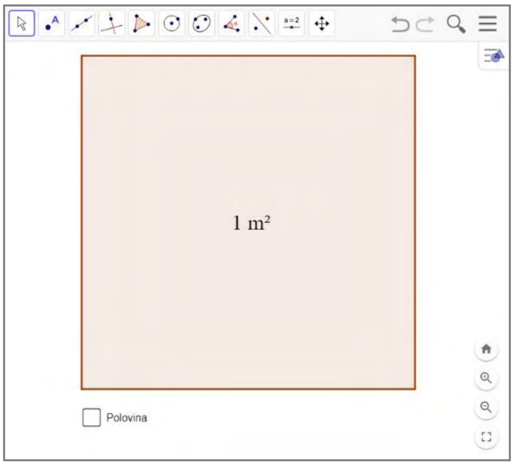
5. Површина пода собе је 18 m^2, а површина тепиха 800 dm^2. Колика површина пода није прекривена тепихом?

Модел креиран у софтверу GeoGebra приказује реалан однос димензија пода собе и тепиха, док захваљујући динамичном приказу и могућности померања тепиха ученици закључују да површина непокривеног дела пода не зависи од положаја тепиха (линк). Променом положаја превлачењем тепиха ученици уочавају да је површина непокривеног дела пода инваријантна и да се одређује одузимањем површине тепиха од укупне површине пода. Посматрањем мерних јединица у *којима су дате површине пода собе и тепиха, ученици закључују да их најпре треба превести у исте јединице мере, а затим извршити одузимање мерних бројева површине.*

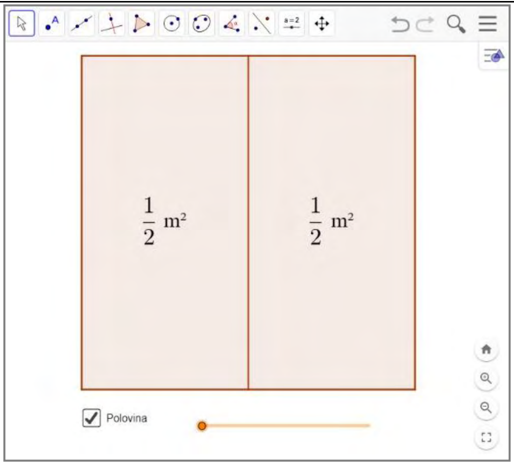


6. Са површине од 10 dm^2 уберу се 2 килограма пасуља. Колико килограма пасуља се убере са површине од $\frac{1}{2}$ m^2?

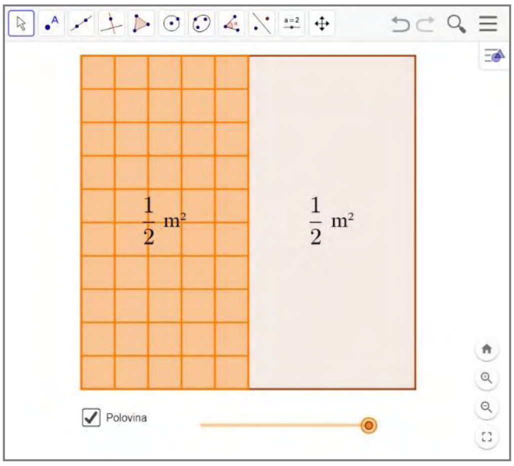
Уз помоћ креираног модела ученици најпре могу да уоче квадрат површине једног квадратног метра (линк).



Кликом на поље за потврду квадрат се дели на две половине.



Померањем клизача одређује се колико квадратних дециметара има у једној половини квадратног метра.



Након одређивања да једна половина квадратног метра садржи пет редова са по десет дециметара ученици закључују да укупну масу пасуља могу израчунати множењем броја редова са масом пасуља која се убере са једног реда.

ВЕЖБА 4.	
Наставна јединица	Јединице мере за површину m^2, dm^2, cm^2, mm^2
Тип часа	Утврђивање

1. Следеће величине изрази у што већим јединицама мере:

200 dm^2 = ________ 560 dm^2 = _________

4 900 cm^2 = ________ 4 020 000 mm^2 = __________

750 000 mm^2 = ________ 90 370 cm^2 = ___________

2. Израчунај колико квадратних милиметара има:

$\frac{1}{2}$ cm^2 = 100 mm^2 : 2 =

$\frac{1}{4}$ dm^2 =

$\frac{1}{10}$ m^2 =

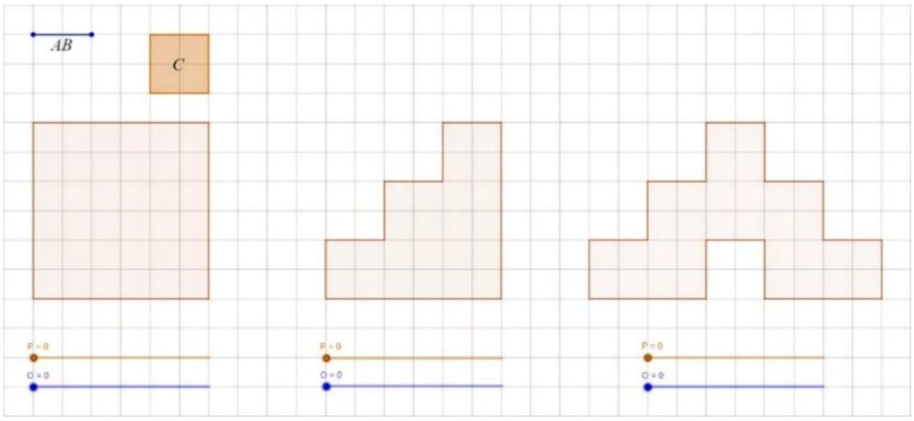
3. Израчунај:

230 cm^2 + 7 dm^2 = ________ 500 dm^2 + 5 m^2= _________

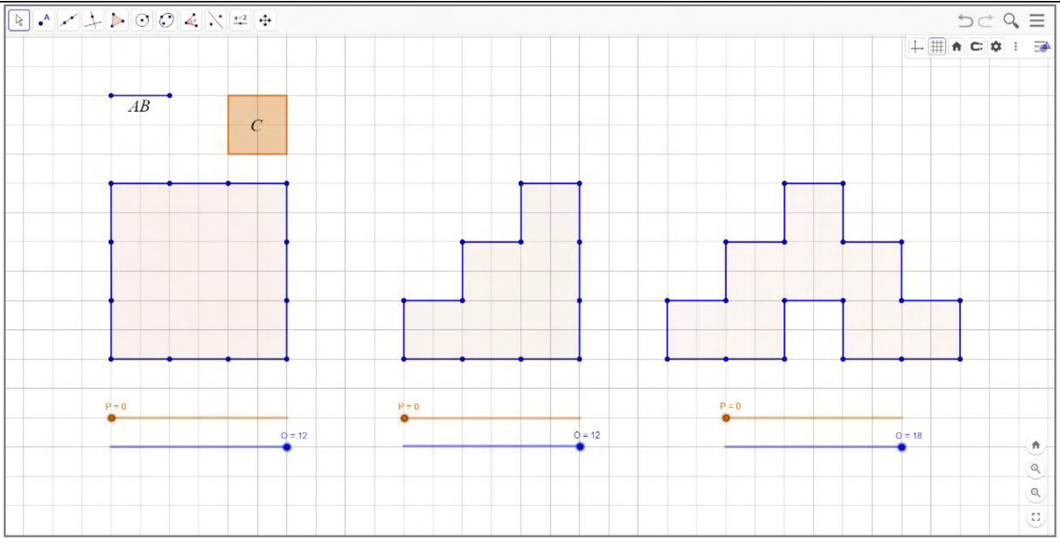
49 000 cm^2 + 75 000 mm^2= ________ 586 dm^2 – 234 dm^2 = __________

72 600 cm^2 – 3 m^2 15 dm^2= ________ 903 000 mm^2 – 34 dm^2 92 cm^2= __________

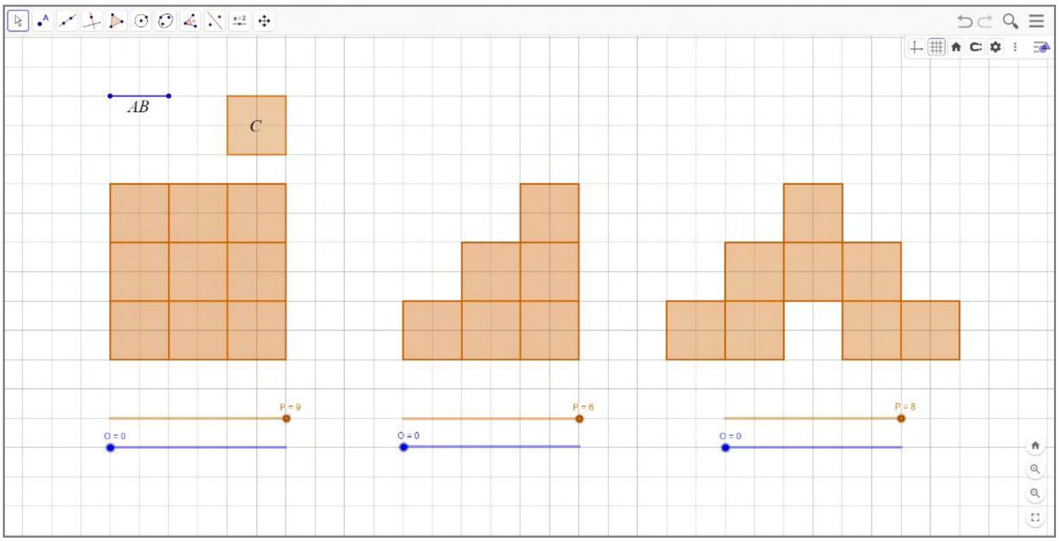
4. Ако је дужина дужи *AB* један центиметар, а површина квадрата *C* један квадратни центиметар одреди обиме и површине нацртаних фигура.



Захваљујући динамичном окружењу софтвера GeoGebra, решавање проблема овог типа може се поједноставити креирањем модела (линк). За сваку од датих фигура постављена су по два клизача који имају улогу да олакшају ученицима визуелизацију појмова обим и површина. Померањем плавих клизача врши се преношење дужи AB надовезивањем на изломљене линије које ограничавају површи датих фигура чиме ученици на очигледан начин прате мерење обима датих фигура.



Аналогно мерењу обима, померањем наранџастих клизача ученици на једноставан начин прате који број квадрата C је потребан да се поплочају површи датих фигура, односно који су мерни бројеви њихових површина.



5. На свакој црти напиши ознаку одговарајуће јединице мере: метар, центиметар, квадратни метар, килограм, минут, квадратни дециметар, грам.

   Димитрије је висок 86___.

   Тежак је 13___ 500___.

   Његова соба је дугачка 4___.

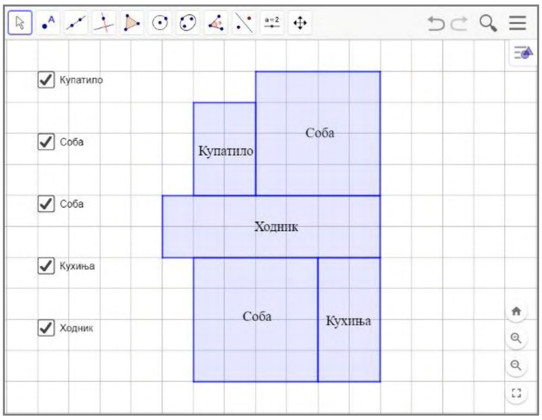
   Плафон његове собе има површину 16___.

   Површина тепиха у његовој соби је 240___.

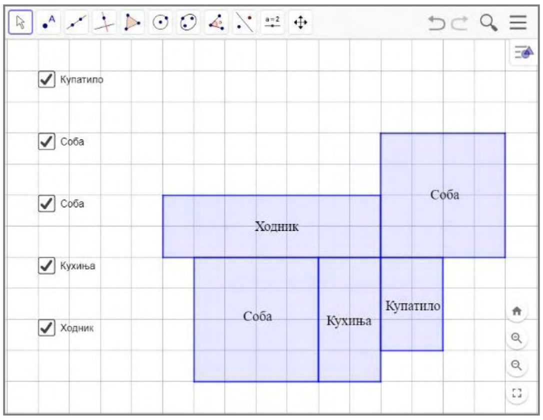
   Он се игра у својој соби већ 60___.

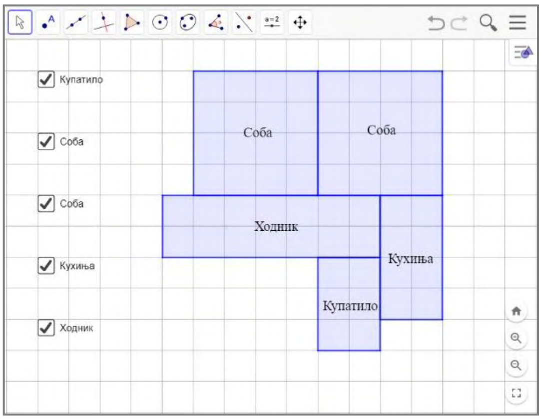
6. Стан има две собе, ходник, купатило и кухињу. Купатило има површину шест квадратних метара, док свака соба има површину за десет квадратних метара већу од купатила. Израчунај укупну површину стана ако је површина кухиње једнака половини површине собе, а површина ходника једнака укупној површини купатила и кухиње.

Захваљујући графичком приказу који омогућава софтвер GeoGebra ученицима је лакше да визуелизују проблем одређивања површине стана. Кликом на поља за потврду појављује се свака од просторија, при чему број квадратића одговара површини просторије у квадратним метрима (линк).



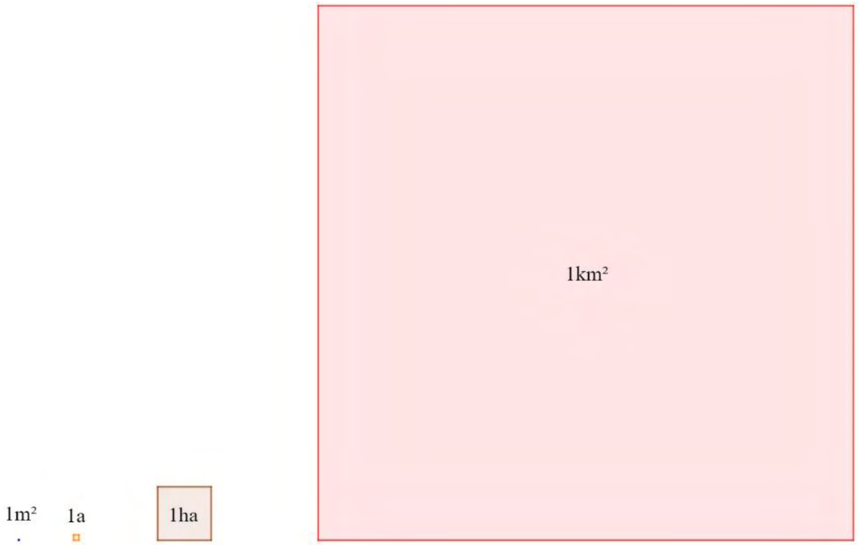
Фигурама које представљају просторије могуће је мењати положај како би ученици увидели да је површина стана инваријантна у односу на распоред просторија.





ВЕЖБА 5.	
Наставна јединица	Јединице мере за површину веће од m^2
Тип часа	Обрада

Када говоримо о површинама држава, континената, користимо јединице мере за површину које су веће од квадратног метра.



(линк)

Претходни приказ омогућава ученицима да уоче односе који владају међу јединицама мере за површину већим од квадратног метра. Захваљујући могућности умањења ученици стичу представу о томе да је квадратни метар најмања јединица мере, док је квадратни километар највећа јединица мере за површину.

1. Следеће величине изрази у арима:

$300\ m^2 =$ __________

$4\ km^2 =$ __________

$70\ 000\ dm^2 =$ __________

$75\ ha =$ _________

$4\ 200\ m^2 =$ _________

$320\ 000\ 000\ cm^2 =$ ___________

2. Сваки од датих појмова повежи линијом са мерном јединицом којом може најлакше да се измери његова површина.

Под учионице
Њива
Србија
Коверта за писмо

a
cm^2
m^2
km^2

3. У празна поља упиши знак >, < или =, тако да тврђења буду тачна.

500 m^2 ☐ 5 a

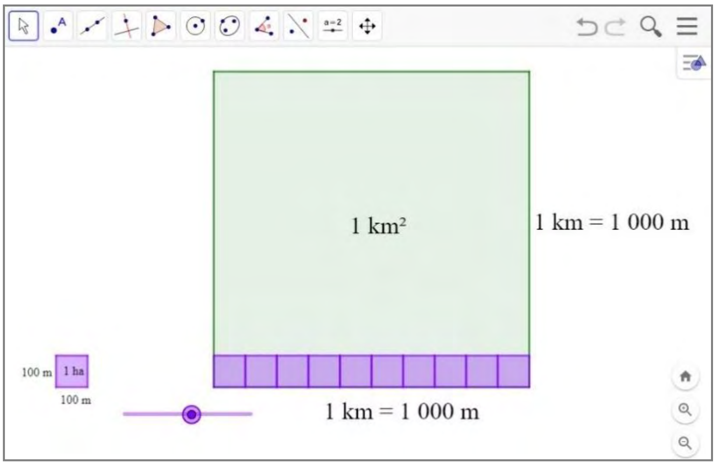
700 ha ☐ 70 000 m^2

80 a ☐ 8 ha

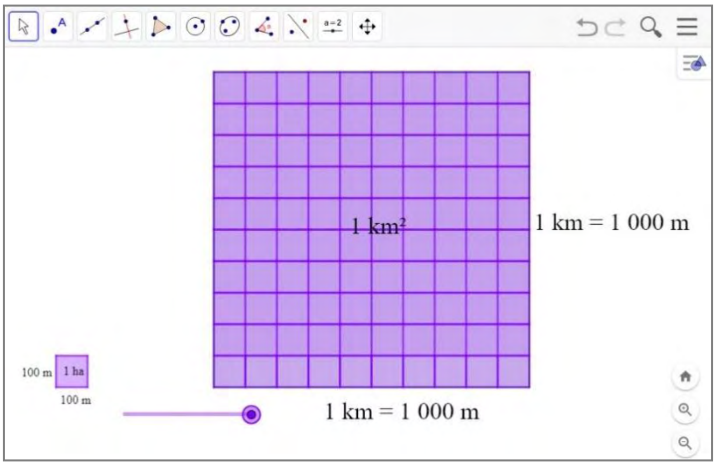
4 600 000 m^2 ☐ 460 km^2

4. Колико пута је површина квадрата од 1 km^2 већа од површине квадрата од 1 ha?

Графички приказ уз задатак је веома значајан и зато визуелизација проблема у GeoGebra софтверу помаже ученицима приликом његовог решавања (линк). Квадрат дужине странице 1 km има површину 1 km^2, док квадрат странице 100 m има површину 1 ha. Користећи клизач ученици могу закључити да се у једном реду квадрата површине 1 km^2 садржи десет квадрата површине 1 ha.

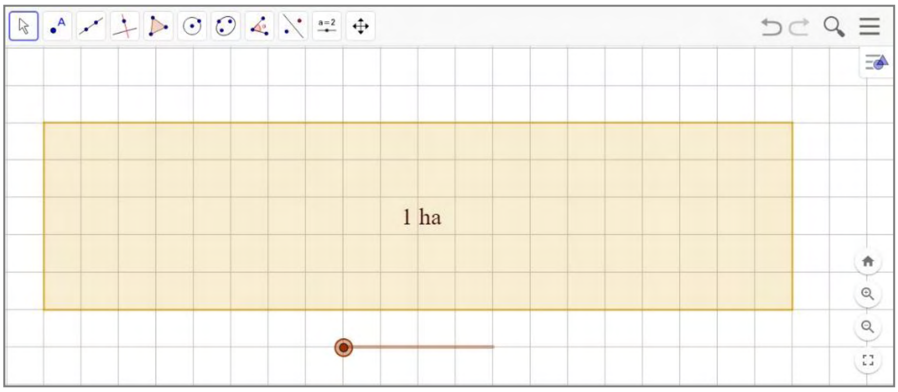


Даље, у целом квадрату површине 1 km^2 садржи се укупно десет редова са по десет квадрата површине 1 ha, односно сто квадрата површине 1 ha.

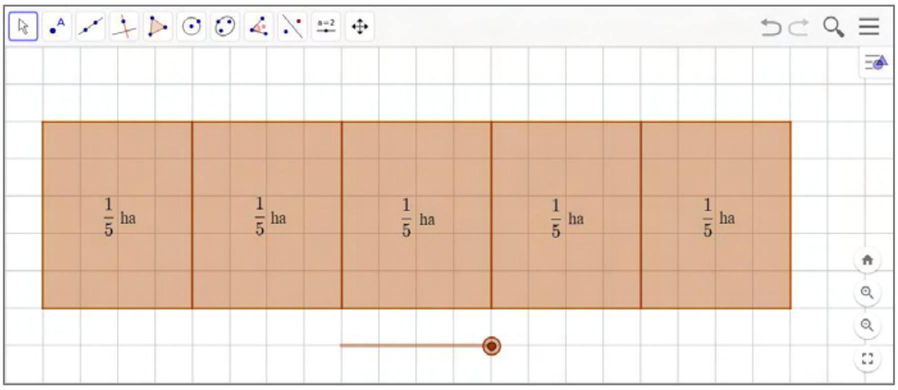


5. Ако је $\frac{1}{5}$ ha грађевинског земљишта плаћена 3 000 000 динара, колико кошта 1 а тог земљишта?

   Уз помоћ модела ученицима је једноставније да уоче односе између мерних јединица и тако лакше одреде цену једног ара земљишта (линк).

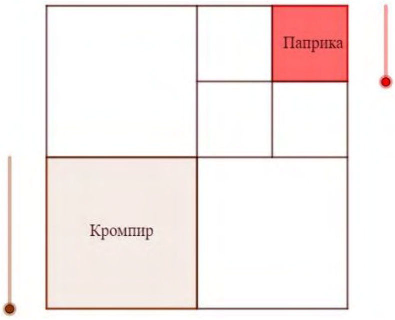


   Померањем клизача ученици могу закључити да се целина (један хектар) састоји од пет петина, док пребројавањем квадрата на квадратној мрежи закључују да једна петина хектара садржи 20 ари.

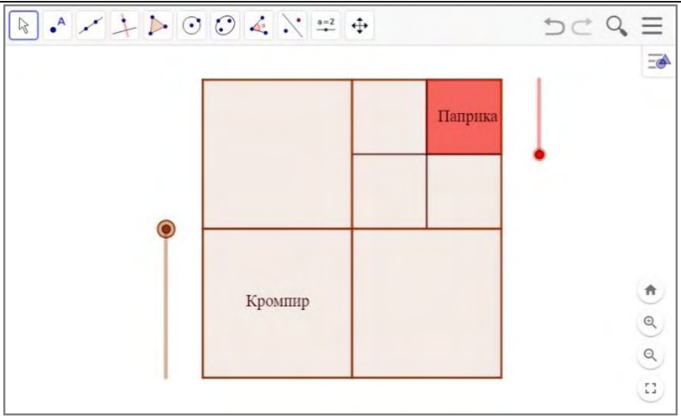


   На основу тога, дељењем 3 000 000 динара са 20 ученици одређују цену једног ара земљишта.

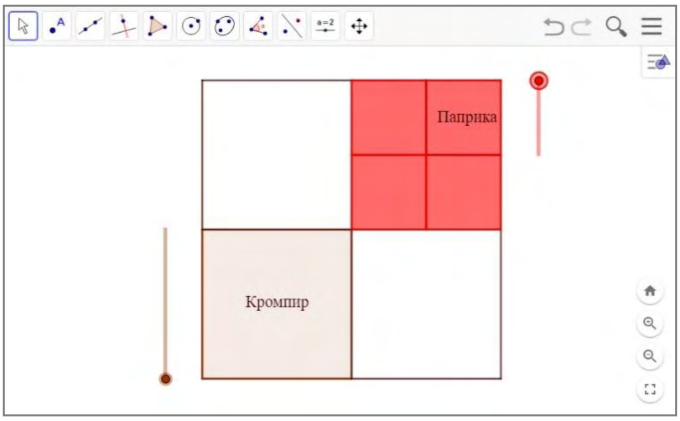
6. Површина њиве облика квадрата са слике је 144 а. Одреди површине делова њиве такође облика квадрата на којима су засејани кромпир и паприка.



   Анимацијом коју омогућава клизач са леве стране врши се поплочавање површи великог квадрата који представља њиву квадратом који представља део њиве на којем је засејан кромпир (линк). Тако ученици могу закључити да део на којем је засејан кромпир представља четвртину њиве, односно има површину 144 а : 4 = 36 а.



Аналогно се врши поплочавање квадратом који представља део на којем је засејана паприка. Ученици закључују да део под паприком представља четвртину дела који је засејан кромпиром, односно има површину 36 a : 4 = 9 a.



ВЕЖБА 6.

Наставна јединица	Јединице мере за површину веће од m^2
Тип часа	Утврђивање

1. Следеће величине изрази у одговарајућим јединицама мере:

3 ha 5 a = _____m^2

$\frac{1}{5}$ km^2 = __________dm^2

80 200 a = _____km^2 _____ha

1 400 000 000 mm^2 = _____a

39 000 000 dm^2 = _____ha

$\frac{1}{10}$ ha = _______________cm^2

2. Израчунај:

15 ha – 1 a 23 m^2 = _______________

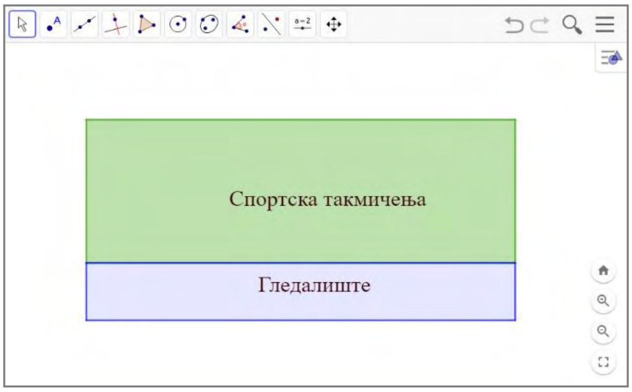
20 km^2 – 20 000 000 cm^2 = ______________

400 a + 32 000 dm^2 = _______________

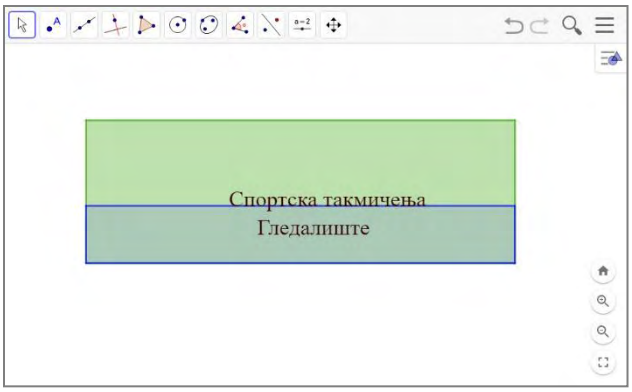
3 km^2 21 ha + 576 000 a = _______________

3. Спортски терен подељен је на 2 дела: први за спортска такмичења, а други за гледаоце. Површина првог дела износи 3 a 15 m^2, а другог 10 256 dm^2. Површина ког дела терена је већа и за колико?

Приказивањем правоугаоника који представљају део терена намењен за спортска такмичења, односно за гледаоце, ученици могу закључити који од два наведена дела има већу површину (линк).

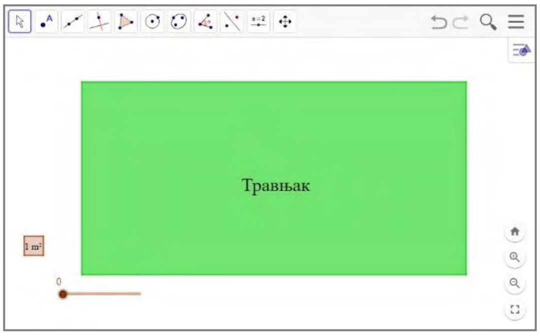


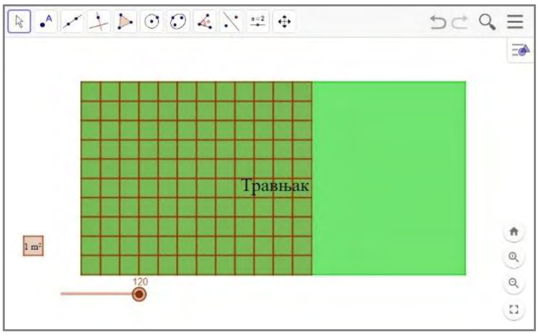
Превлачењем правоугаоника који представља део терена намењеног за гледаоце преко правоугаоника који представља део за спортска такмичења ученици могу да закључе да разлику у површинама делова терена могу одредити одузимањем мерних бројева њихових површина.



4. Радник покоси 1 m^2 травњака за 1 минут. Може ли он за 2 сата покосити травњак површине 2 а?

Уз помоћ модела ученици могу померањем клизача да на динамичан начин прате колику површину травњака је могуће покосити за временски период од 120 минута ако се за један минут покоси један квадратни метар травњака (линк).





Будући да један ар садржи сто квадатних метара, односно у два ара има двеста квадратних метара, закључују да радник, ако за један минут покоси један квадратни метар, за два сата не може покосити цео травњак.

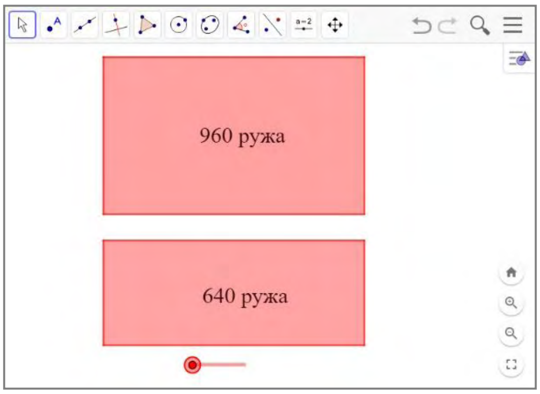
5. Територија једне општине у Србији површине 424 km^2 подељена је на пољопривредно и грађевинско земљиште. Пољопривредно земљиште заузима три пута већу површину него грађевинско земљиште. Израчунај колико је хектара пољопривредног, а колико грађевинског земљишта.

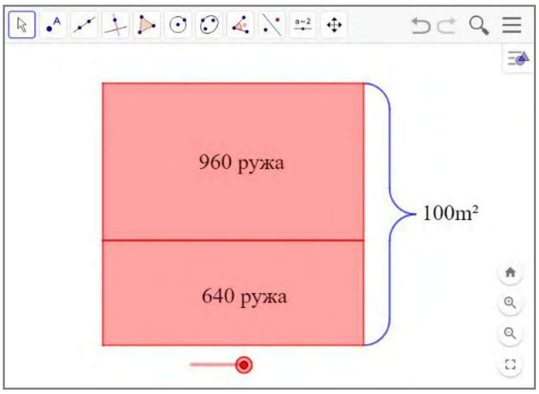
Како је пољопривредно земљиште три пута веће површине од грађевинског земљишта, анимацијом коју омогућава креирани клизач ученици на очигледан начин могу пратити како од правоугаоника који представља грађевинско земљиште настаје правоугаоник који симболизује пољопривредно земљиште (линк).

Имајући у виду да оба типа земљишта чине укупну територију општине, то грађевинско земљиште обухвата једну четвртину, док пољопривредно земљиште чини три четвртине укупне територије општине.

6. У два стакленика укупне површине 100 m^2 засађене су руже. На сваком квадратном метру засађен је исти број ружа. У првом стакленику засађено је 960 ружа, а у другом 640. Колика је површина сваког стакленика?

   Померањем клизача ученици могу да уоче да укупна површина оба стакленика износи 100m^2 и у каквом су односу њихове површине (линк).



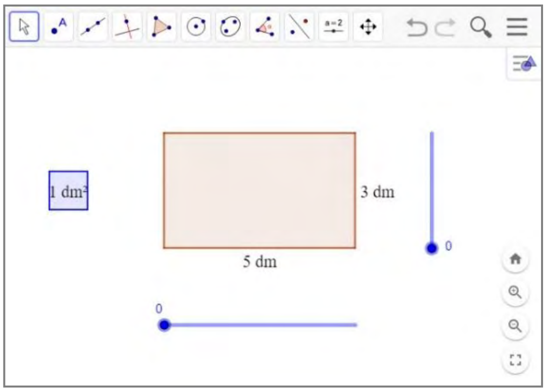


   Како би одредили број ружа засађених на једном квадратном метру потребно је да поделе укупан број ружа засађених у оба стакленика мерним бројем њихове укупне површине (960 + 640) : 100 = 1600 : 100 = 16. Када одреде број ружа засађених на једном квадратном метру, до површина стакленика долазе дељењем броја ружа засађених у сваком од њих бројем ружа засађених на једном квадратном метру.

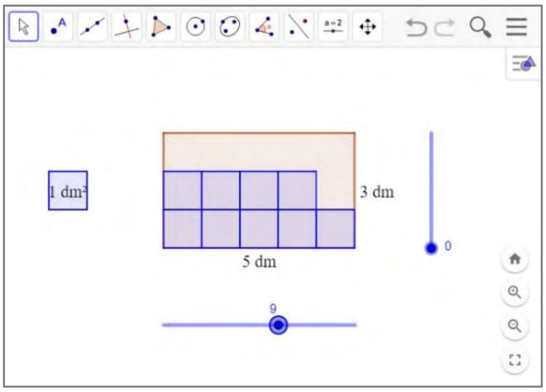
ВЕЖБА 7.	
Наставна јединица	Израчунавање површине правоугаоника
Тип часа	Обрада

1. Дужина листа папира облика правоугаоника је 5 dm, а ширина 3 dm. Израчунај површину листа папира.

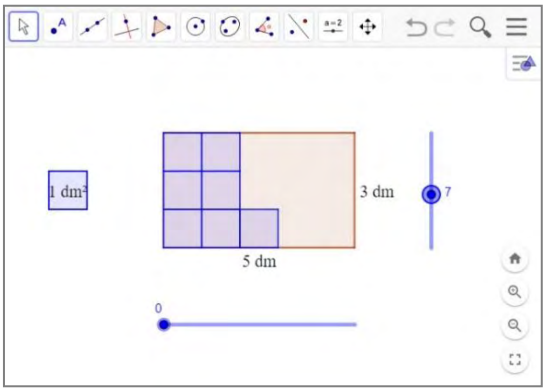
   Лист папира је могуће представити моделом облика правоугаоника страница 5 dm и 3 dm. Уз помоћ клизача који омогућавају динамичност, ученици могу да закључе са колико се квадрата површине 1 dm^2 може поплочати површ правоугаоника која одговара листу папира датих димензија (линк).



   Уз помоћ хоризонталног клизача поплочавање се врши по редовима и то три реда са по пет квадрата, односно укупно петнаест квадрата.

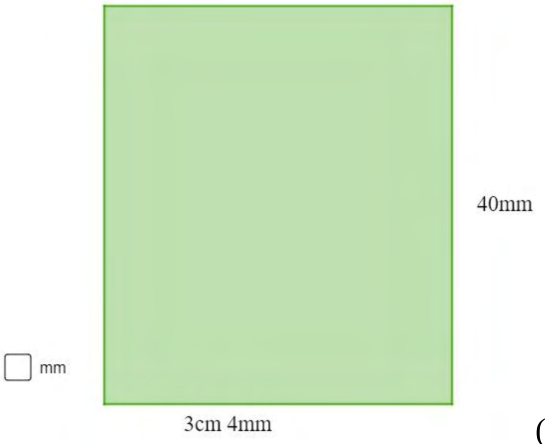


   Помоћу вертикално постављеног клизача поплочавање се изводи по колонама и то пет колона са по три квадрата у свакој, укупно петнаест квадрата.



Ученици закључују да је у оба случаја добијен исти мерни број површине правоугаоника, односно листа папира. Доводећи у везу добијени мерни број површине правоугаоника са мерним бројевима дужина суседних страница ученици долазе до закључка да је мерни број површине правоугаоника једнак производу мерних бројева дужина његових суседних страница.

2. Израчунај површину правоугаоника, ако је дужина странице a = 3 cm 4 mm, а дужина странице b = 40 mm.



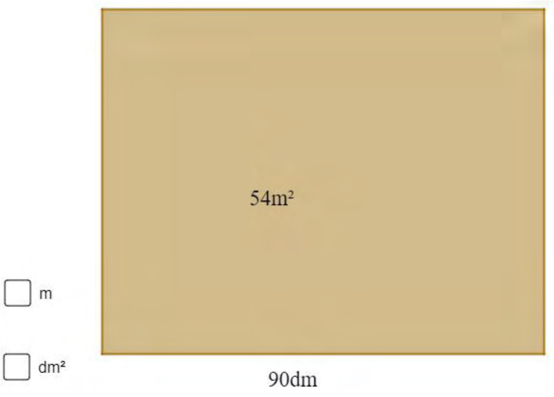
(линк)

Да би могли да израчунају површину правоугаоника датих димензија, ученици треба да закључе да најпре морају превести вишеимене бројеве у једноимене. У овом случају, најмања мерна јединица за дужину јесте милиметар па је потребно величину 3 cm 4 mm превести у милиметре, односно 34 mm. Кликом на поље за потврду поред правоугаоника појављује се дужина правоугаоника изражена у милиметрима.

3. За шивење једне хаљине потребан је комад тканине облика правоугаоника дужине 1m 50 cm и ширине 8 dm. Да ли од тканине површине 2 m^2 могу да се сашију две такве хаљине?

Да би се решио задатак потребно је упоредити површину тканине потребне за шивење две хаљине и тканину површине 2 m^2. Имајући на уму да је комад тканине облика правоугаоника, за израчунавање површине тканине неопходне за шивење једне хаљине треба применити образац за израчунавање површине правоугаоника.

4. Површина пода учионице облика правоугаоника је 54 m^2, а дужина учионице је 90 dm. Одреди ширину те учионице.

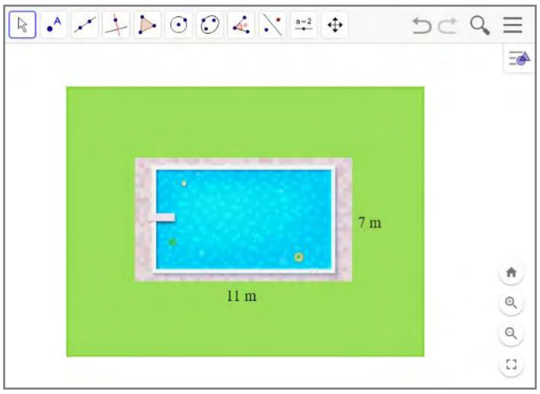


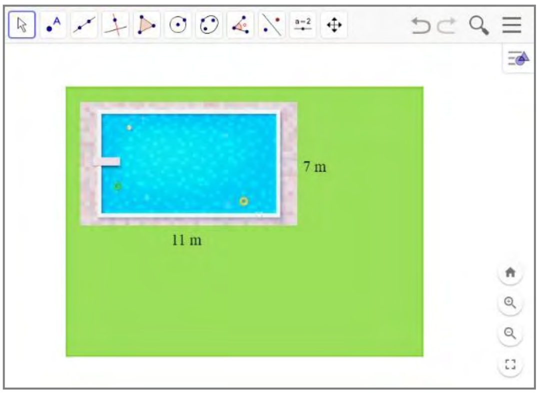
(линк)

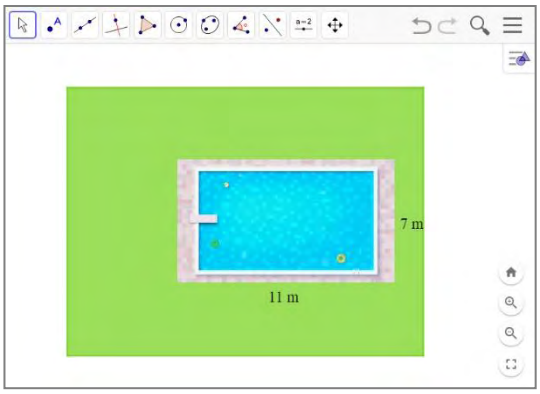
Будући да је мерни број површине правоугаоника једнак производу мерних бројева дужина његових суседних страница, ученици закључују да ће ширину учионице одредити дељењем површине пода дужином учионице (одређивање непознатог чиниоца). Даље, како је површина пода учионице дата у квадратним метрима, а дужина учионице у дециметрима, то би требало површину пода превести у квадратне дециметре (кликом на поље за потврду појављује се површина изражена у квадратним дециметрима) или дужину учионице превести у метре (кликом на поље за потврду појављује се дужина изражена у метрима).

5. У дворишту површине три ара направљен је базен правоугаоног облика дужине једанаест метара и ширине седам метара. Колика је површина преосталог дела дворишта?

На основу приказаног модела и могућности померања илустрације базена ученици закључују да он заузима одређени део дворишта, ма где се налазио у дворишту (линк).

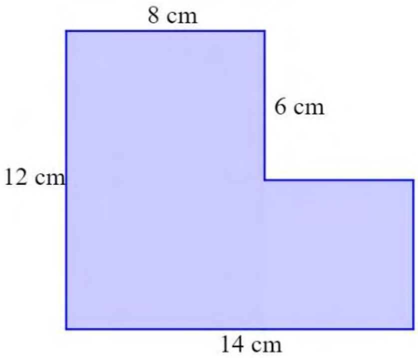




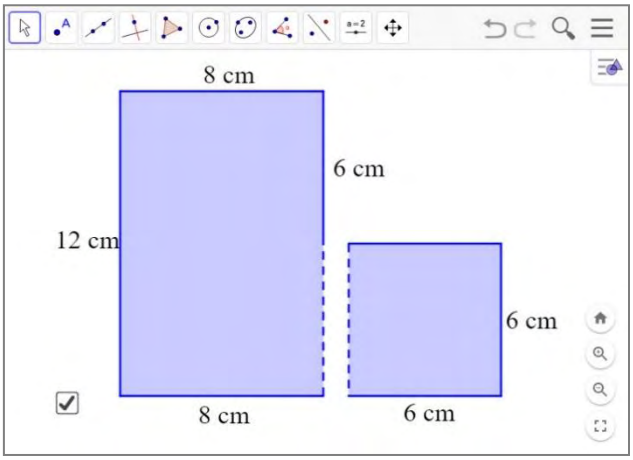


Како би ученици израчунали колика је површина преосталог дела дворишта потребно је да од укупне површине дворишта одузму површину базена. С обзиром да је површина дворишта дата у арима, потребно је и 3 а превести у квадратне метре.

6. Израчунај површину фигуре са слике:



С обзиром да се ради о сложеној фигури, потребно је поделити је на два правоугаоника. Један од начина приказан је уз помоћ модела, на којем се кликом на поље за потврду појављују правоугаоници који чине фигуру, заједно са дужинама њихових страница које одговарају димензијама дате фигуре (линк).

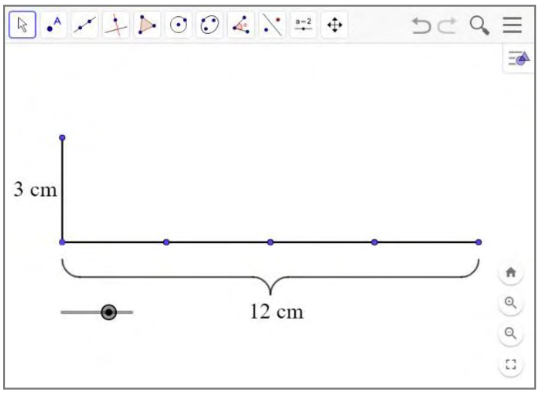


Даље, задатак се решава тако што се израчунају површине оба правоугаоника, а затим саберу.

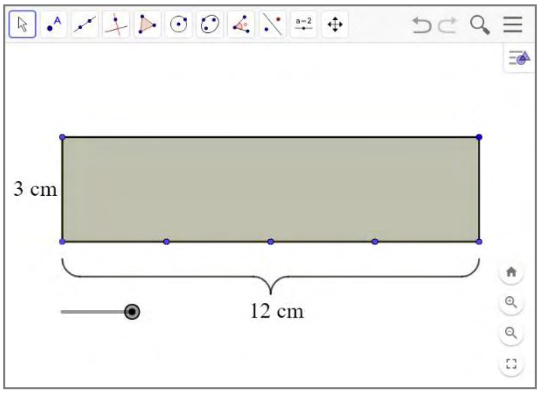
ВЕЖБА 8.	
Наставна јединица	Израчунавање површине правоугаоника
Тип часа	Утврђивање

1. Ширина правоугаоника је 3 cm, а дужина је четири пута већа. Нацртај тај правоугаоник и израчунај његов обим и површину.

   Уз помоћ анимације коју омогућава померање клизача, од дужи која представља ширину правоугаоника најпре настаје дуж четири пута дужа која истовремено представља и другу страницу правоугаоника (линк).

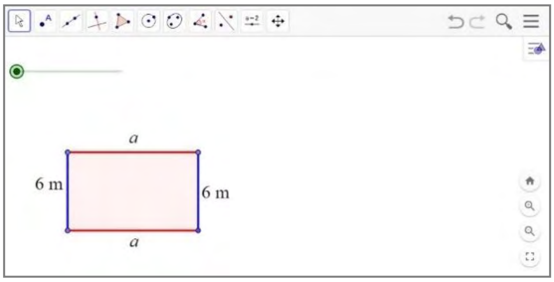


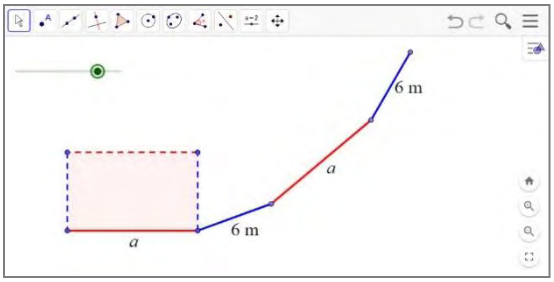
   На основу датих дужи настаје одговарајући правоугаоник димензија 3 cm и 12 cm уз помоћ којих је могуће израчунати обим и површину.

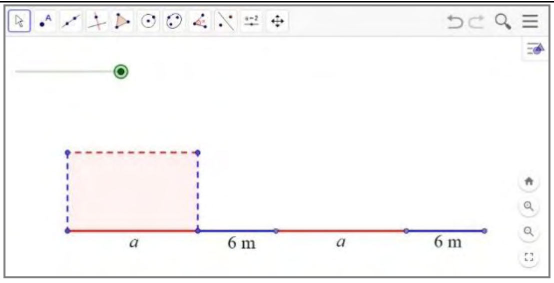


2. Израчунај површину правоугаоника ако је његова ширина 6 m, а обим 380 dm.

   Да би се израчунала површина правоугаоника потребно је знати дужине његових суседних страница које представљају дужину и ширину. На основу датог обима и ширине правоугаоника могуће је одредити његову дужину коришћењем модела направљеног у софтверу (линк).



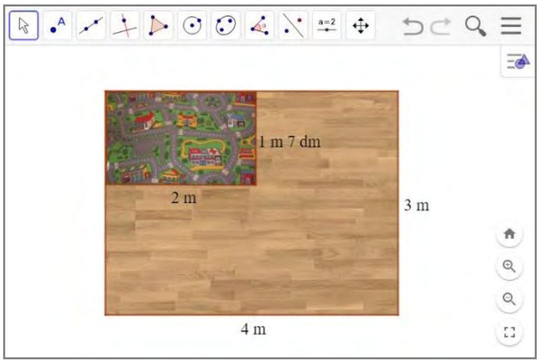


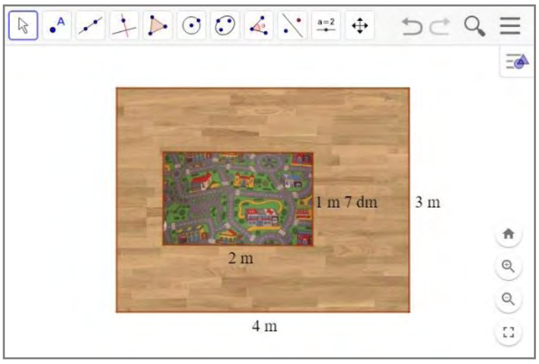


Након одређивања дужине правоугаоника ученици лако могу израчунати његову површину.

3. У дечјој соби дужине 4 m и ширине 3 m постављен је тепих правоугаоног облика димензија 2 m и 1 m 7 dm. Израчунај површину пода која није прекривена тепихом.

На основу приказаног модела и могућности померања илустрације тепиха ученици закључују да он заузима одређени део пода, ма где се налазио (линк).

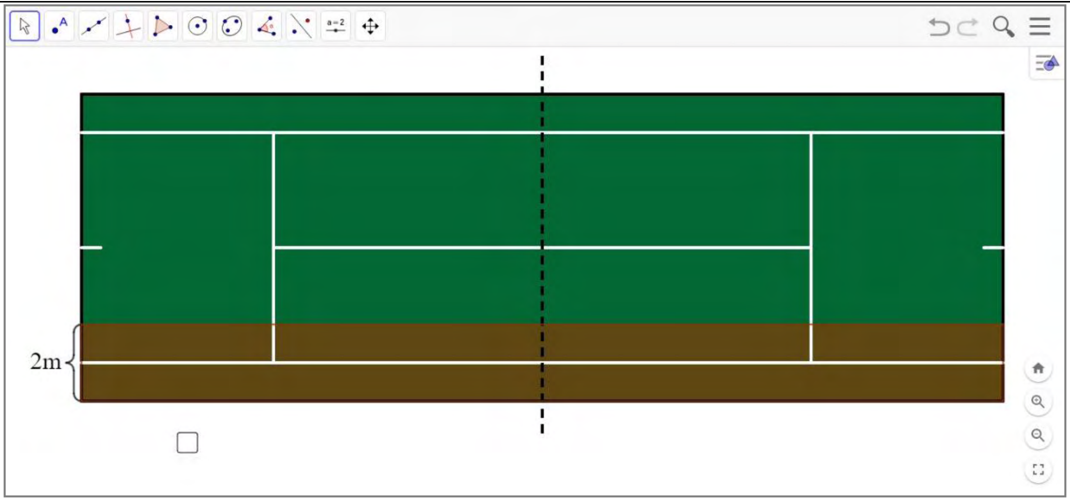


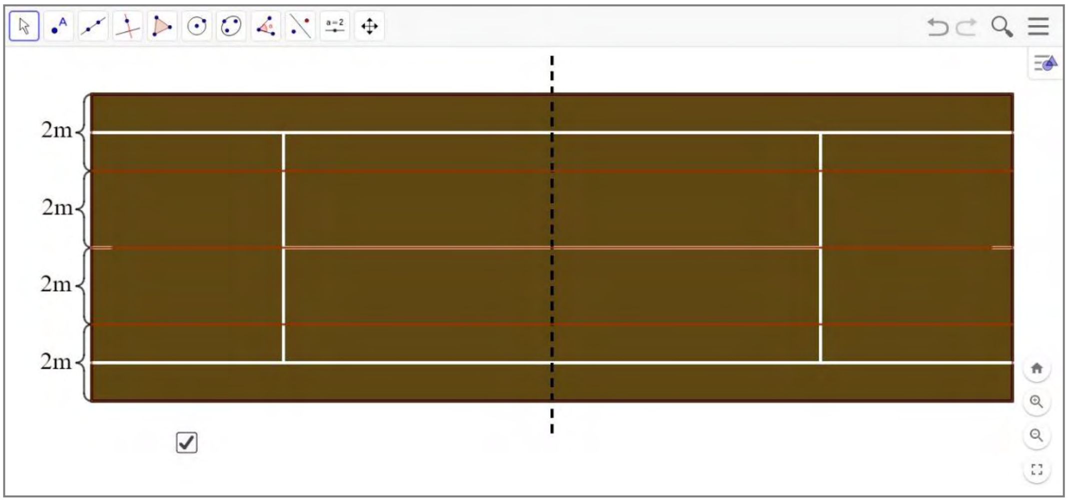


Како би израчунали колика је површина преосталог дела пода собе потребно је од укупне површине пода одузети површину тепиха. Најпре треба израчунати површину пода собе и тепиха за дате димензије а затим одузети добијене мерне бројеве површине. С обзиром да је ширина тепиха дата у облику вишеименог броја, потребно је површине и пода собе и тепиха превести у одговарајуће мерне јединице, у овом случају то су квадратни дециметри.

4. Израчунај дужину тениског терена површине 192 m^2, ако четвртина ширине терена износи 2 m.

На основу податка да четвртина ширине тениског терена износи 2 m и приказаног модела, ученици могу уочити да је ширина терена четири пута већа од дате величине и износи 8 m (кликом на поље за потврду појављују се преостале три четвртине) (линк).

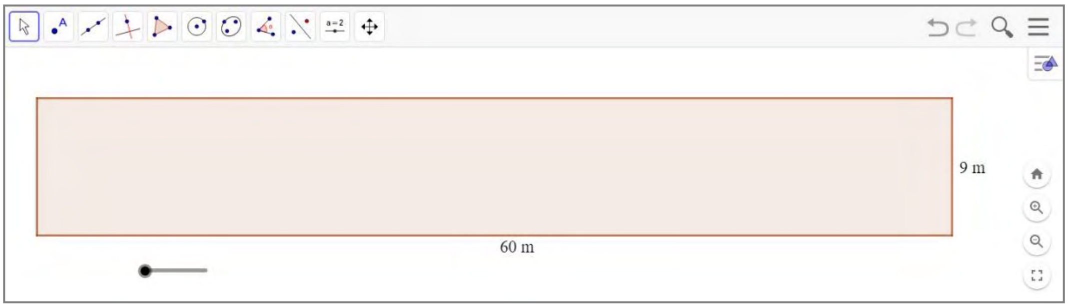




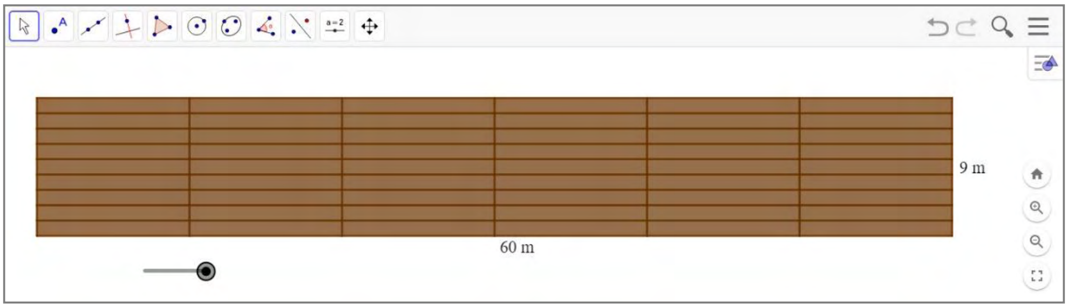
Будући да је мерни број површине терена једнак производу мерних бројева дужине и ширине терена, ученици закључују да ће дужину терена одредити дељењем површине тениског терена његовом ширином (одређивање непознатог чиниоца).

5. Њива има димензије 60 m и 9 m. За орање свaких 10 квадратних метара њиве трактор утроши пола литра нафте. Колико је литара нафте потребно да би се узорала цела њива?

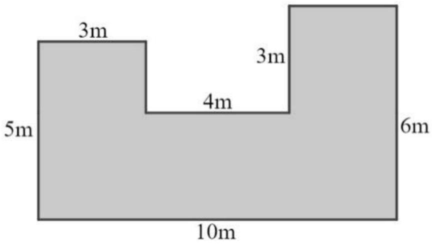
Ради лакше визуелизације проблема њиву можемо представити правоугаоником датих димензија (линк).



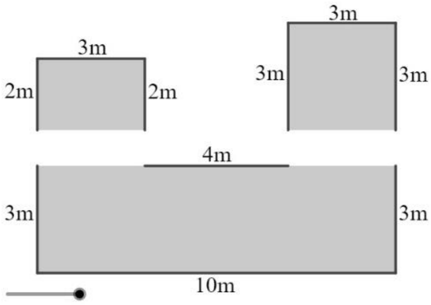
Како би се израчунало колико је литара нафте потребно да се узоре њива, најпре треба израчунати површину њиве. Множењем мерних бројева дужине и ширине њиве добија се површина целе њиве. Имајући у виду да за орање 10 квадратних *метара трактор утроши пола литра нафте, то је потребно површину њиве поделити са 10* m^2 *(визуелно то можемо приказати поплочавањем површи правоугаоника који представља њиву правоугаоницима површине 10* m^2*), а затим добијени количник (односно број правоугаоника потребан да би се поплочала површ правоугаоника који представља њиву) поделити са два.*



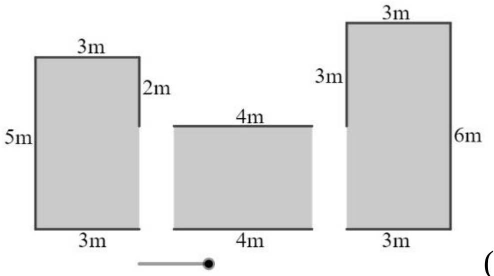
6. Колико квадратних метара паркета и колико метара лајсне за паркет треба набавити за прекривање пода библиотеке датог на слици?



Захваљујући креираним моделима ученици уочавају на које начине је могуће поделити дату сложену фигуру која одговара површи пода библиотеке.



(линк)



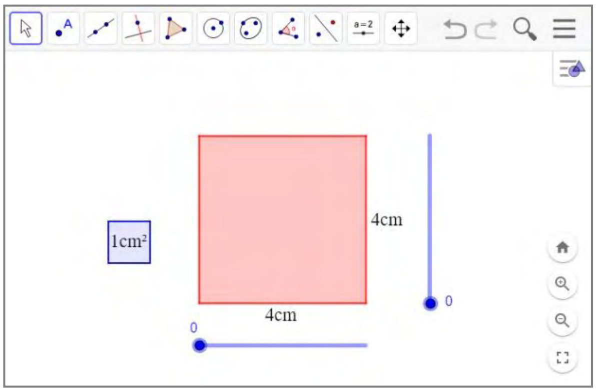
(линк)

Фигуру је могуће на два начина поделити на три правоугаоника, при чему странице новонасталих правоугаоника одговарају датим димензијама фигуре. Ученици закључују да је укупна површина пода једнака збиру површина сва три правоугаоника, док дужина лајсни за паркет одговара обиму сложене фигуре. Захваљујући креираним анимацијама ученици су у прилици да уоче односе међу страницама правоугаоника и фигуре и да закључе које странице или делови страница правоугаоника улазе у обим сложене фигуре.

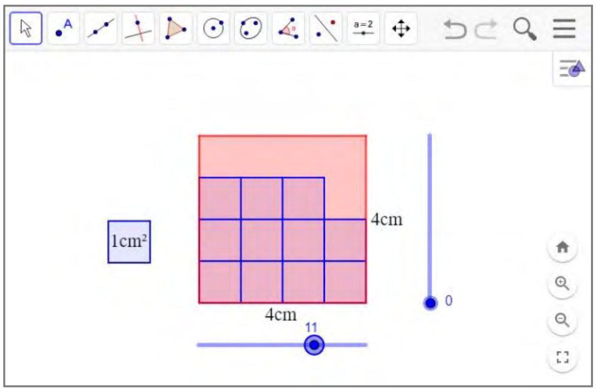
ВЕЖБА 9.	
Наставна јединица	Израчунавање површине квадрата
Тип часа	Обрада

1. Израчунај површину квадрата странице дужине 4cm.

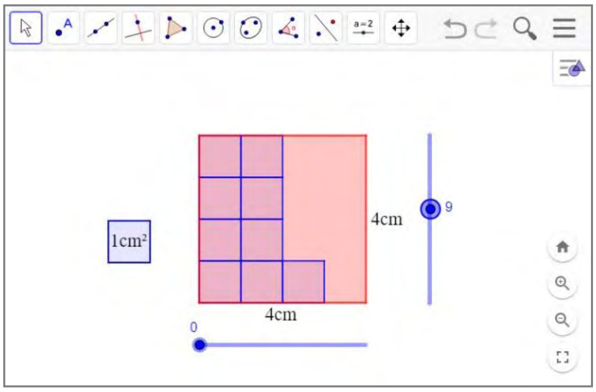
Уз коришћење клизача ученици могу да закључе да се површ квадрата странице 4cm може поплочати са укупно 16 квадрата површине 1 cm^2*(линк).*



Уз помоћ хоризонталног клизача врши се поплочавање по редовима и то четири реда са по четири квадрата.



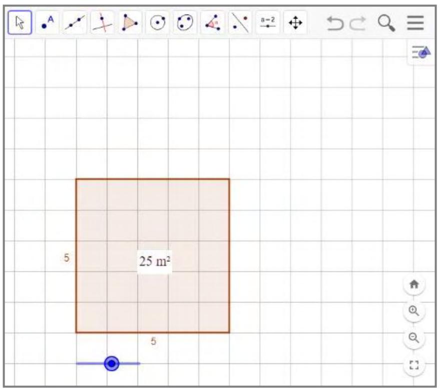
Уз помоћ вертикалног клизача поплочавање се изводи по колонама, и то такође четири колоне са по четири квадрата у свакој.

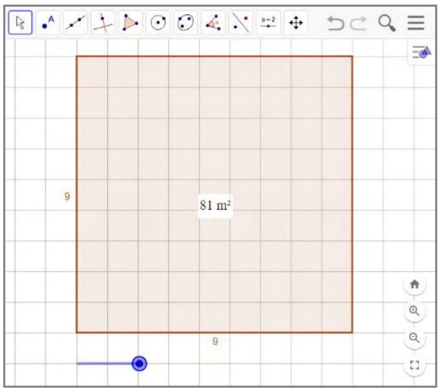


Ученици закључују да је, као и код правоугаоника, у оба случаја добијен исти мерни број површине. Доводећи у везу добијени мерни број површине са мерним бројевима дужина суседних страница ученици, по аналогији са израчунавањем *површине правоугаоника, долазе до закључка да је мерни број површине квадрата једнак производу мерних бројева дужина његових суседних страница.*

2. Колика је дужина странице квадрата ако је његова површина 81 m^2?

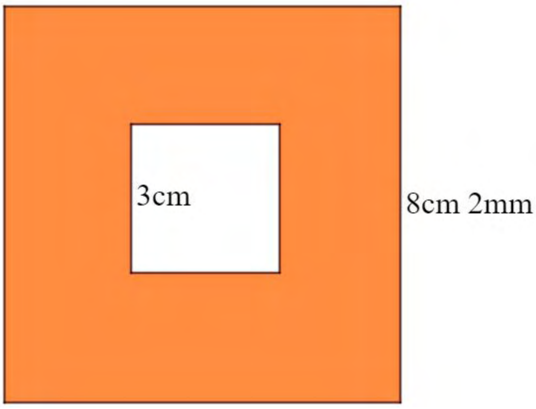
Уз помоћ креираног модела померањем клизача ученици могу на очигледан начин да прате како се за различите дужине страница мења мерни број површине квадрата (линк).





Како је $P = a \cdot a$ *закључују да је потребно наћи број који помножен самим собом даје мерни број површине. Дакле, добијени број је мерни број дужине странице квадрата.*

3. Израчунај површину обојеног дела фигуре са слике ограниченог са два квадрата.

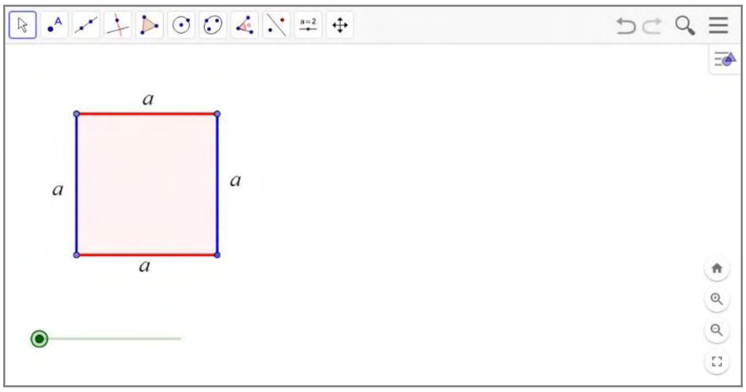


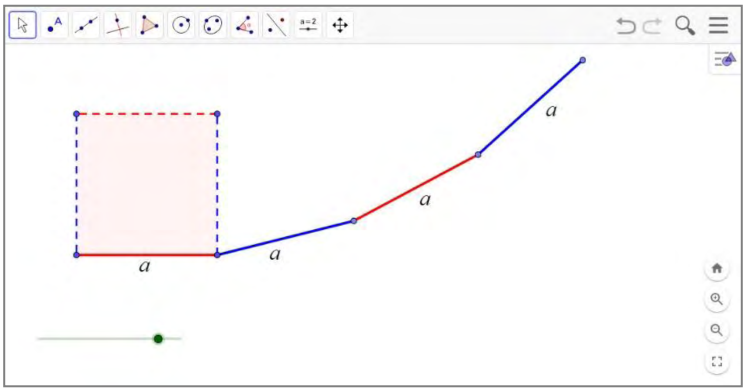
(линк)

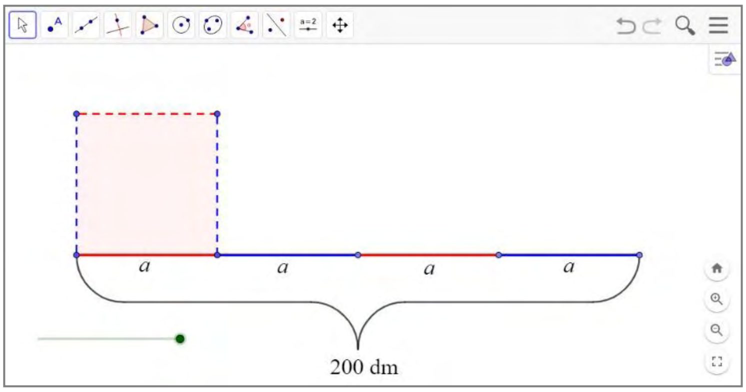
На основу модела и могућности померања мањег квадрата ученици закључују да он заузима одређени део фигуре, ма где се налазио. Како би израчунали колика је површина обојеног дела фигуре потребно је од укупне површине фигуре одузети површину мањег квадрата. Најпре треба израчунати површину целе фигуре и површину мањег квадрата а затим одузети добијене мерне бројеве површине. С *обзиром на то да је дужина странице фигуре дата у облику вишеименог броја, потребно је површине фигуре и мањег квадрата превести у одговарајуће мерне јединице, квадратне милиметре.*

4. Израчунај површину квадрата обима 200 dm.

Захваљујући клизачу, ученици имају прилику да на очигледан начин прате трансформацију изломљене линије која ограничава површ квадрата у дуж дужине једнаке збиру страница датог квадрата (обиму квадрата) (линк).



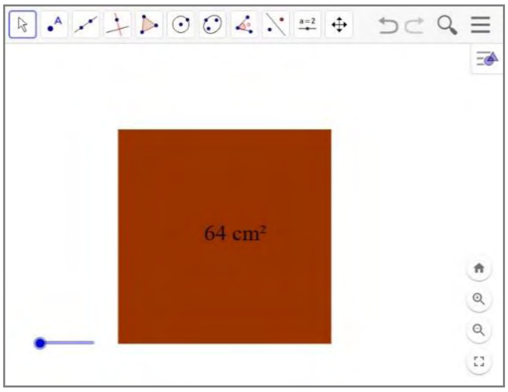


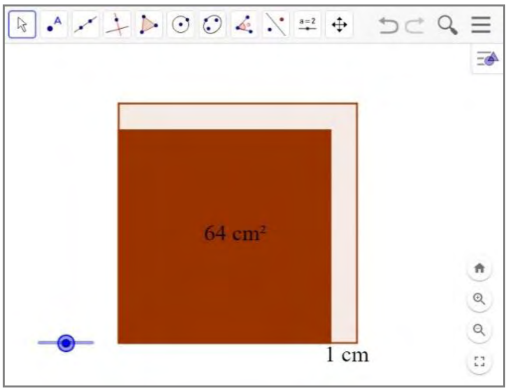


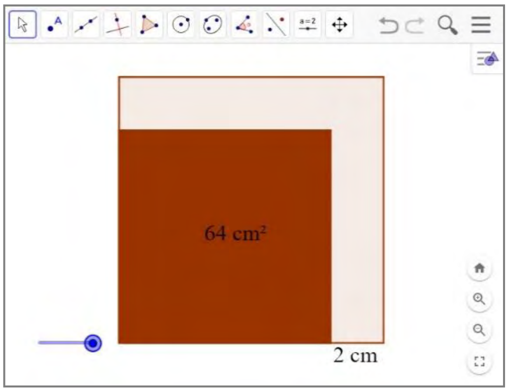
Имајући у виду да су све четири странице квадрата једнаке дужине, лако закључују да дужину једне странице могу одредити дељењем обима квадрата са четири. Најзад, на основу израчунате дужине странице, на основу обрасца за израчунавање површине квадрата могу доћи до вредности површине.

5. Површина квадрата је 64 cm^2. Ако се страница квадрата увећа за 2 cm, за колико ће се увећати површина квадрата?
Како би ученицима било јасније на који начин повећање дужина странице квадрата утиче на његову површину визуелизоваћемо проблем уз помоћ модела

(линк). На тај начин ученици на очигледном примеру прате повећање површине квадрата у зависности од повећања дужине странице.

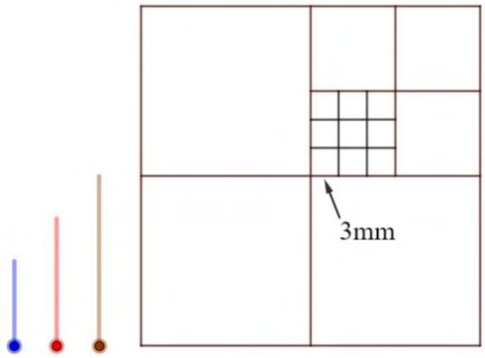




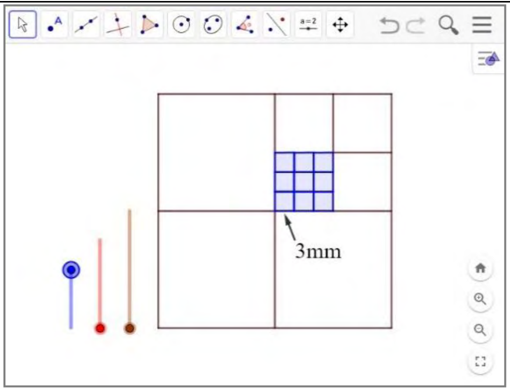


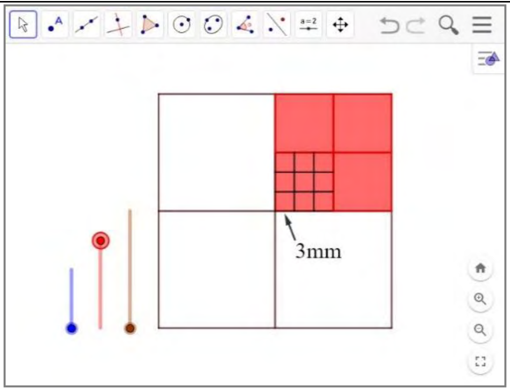
Као у другом задатку, на основу мерног броја површине квадрата и обрасца за израчунавање површине $P = a \cdot a$ *ученици закључују да је потребно наћи број који помножен самим собом даје мерни број површине. Након што одреде дужину странице квадрата, могу одредити и површину квадрата странице за два центиметра дуже. До одговора за колико се увећала површина квадрата могу доћи одузимањем мерних бројева површине новонасталог и квадрата задате површине.*

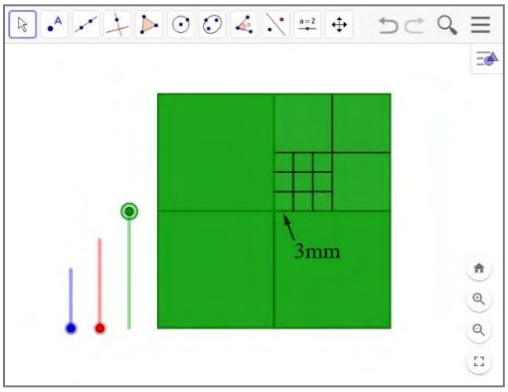
6. Одредити површину великог квадрата ако је дужина странице малог квадрата са слике 3 mm.



На основу модела, уз помоћ клизача ученици могу открити у каквом односу су квадрати на које је подељен велики квадрат (линк).







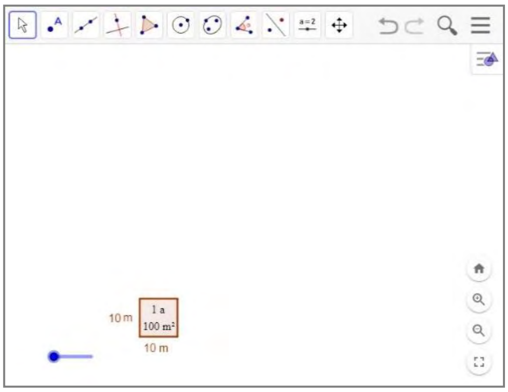
Закључују да девет малих квадрата представља четвртину средњег квадрата, односно да средњи квадрати представљају четвртине великог квадрата. Дакле, да бисмо израчунали површину великог квадрата, најпре треба израчунати површину најмањег квадрата, а затим је помножити са девет како бисмо добили површину квадрата састављеног из девет малих квадрата (једног квадрата црвене боје). Након тога, добијену површину треба помножити са четири како бисмо добили површину средњег квадрата (једног квадрата зелене боје). На крају, потребно је новодобијену површину помножити са четири да бисмо одредили површину великог квадрата.

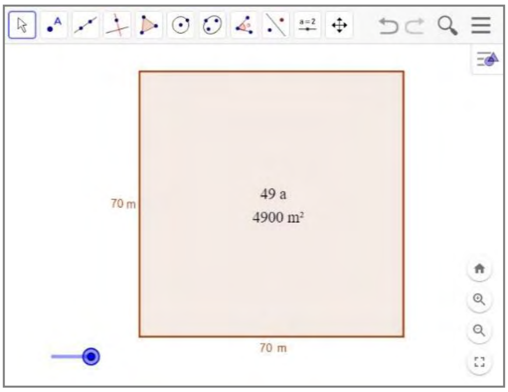
Други начин за решавање јесте да се на основу односа квадрата уочи да је страница квадрата састављеног од девет плавих квадрата $3 \cdot 3\ mm = 9\ mm$, *односно да је страница квадрата састављеног од четири црвена квадрата* $2 \cdot 9\ mm = 18\ mm$, *да би напослетку закључили да је дужина странице великог квадрата* $2 \cdot 18\ mm = 36\ mm$. *На основу дужине странице великог квадрата и обрасца за израчунавање површине* $P = a \cdot a$ *ученици могу израчунати површину квадрата.*

ВЕЖБА 10.	
Наставна јединица	Израчунавање површине квадрата
Тип часа	Утврђивање

1. Израчунај дужину странице квадрата ако је његова површина 49 а.

Захваљујући анимацији коју омогућава клизач, ученици могу поновити односе између мерних јединица ара и квадратног метра (линк).

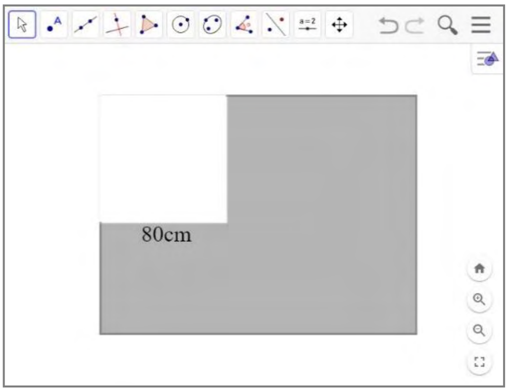


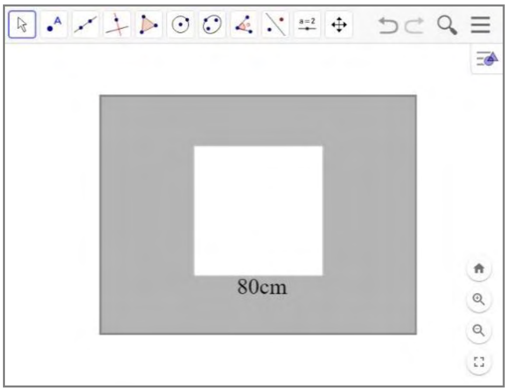


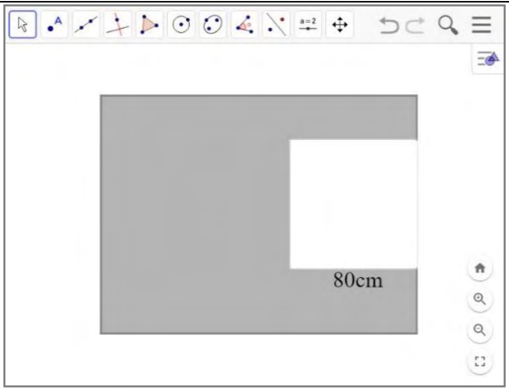
С обзиром на то да је површина квадрата дата у арима, најпре је треба превести у одговарајуће мерне јединице, у квадратне метре. На основу мерног броја површине квадрата и обрасца за израчунавање површине $P = a \cdot a$ *ученици закључују да је потребно наћи број који помножен самим собом даје мерни број површине. У конкретном случају,* $70 \cdot 70 = 4900$ *па дужина странице квадрата износи 70 m.*

2. Од једног комада лима површине 300 dm^2 одсечен је квадрат странице 80 cm. Колика је површина преосталог дела лима? Површину изразити у квадратним милиметрима.

На основу приказаног модела и могућности померања одсеченог дела облика квадрата датих димензија ученици закључују да ма где био одсечен, део има исту површину (линк).



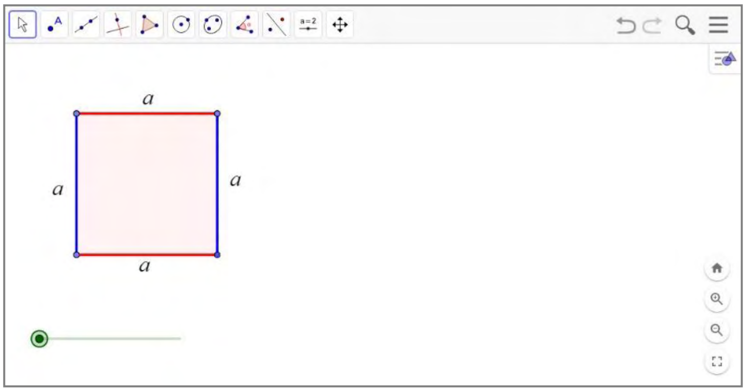


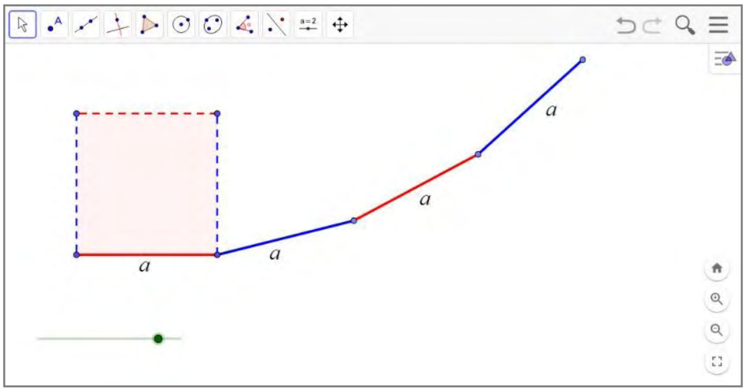


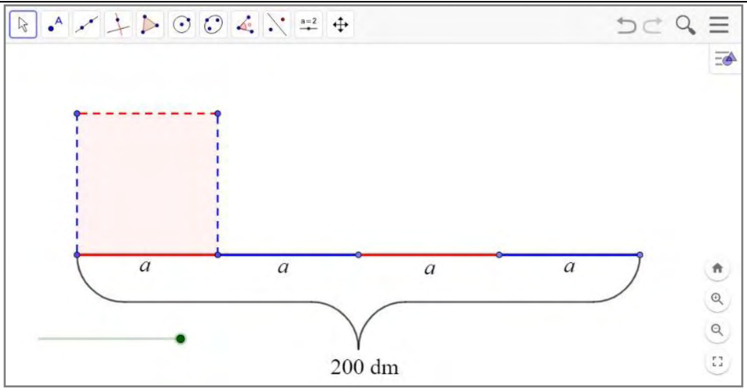
Како би се израчунало колика је површина преосталог дела лима неопходно је од укупне површине лима одузети површину одсеченог дела. Како је површина лима дата у квадратним дециметрима, потребно је и површину одсеченог дела превести у квадратне дециметре, или обрнуто. Након израчунавања потребно је добијену вредност превести у квадратне милиметре.

3. Воћњак облика квадрата ограђен је жицом дужине 420 m. Израчунај површину воћњака и изрази је у арима.

Захваљујући клизачу, ученици имају прилику да на очигледан начин прате трансформацију изломљене линије која ограничава површ квадрата у дуж дужине једнаке збиру страница датог квадрата (обиму квадрата) (линк).



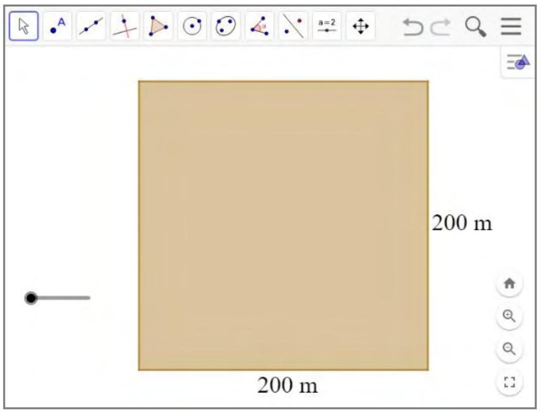


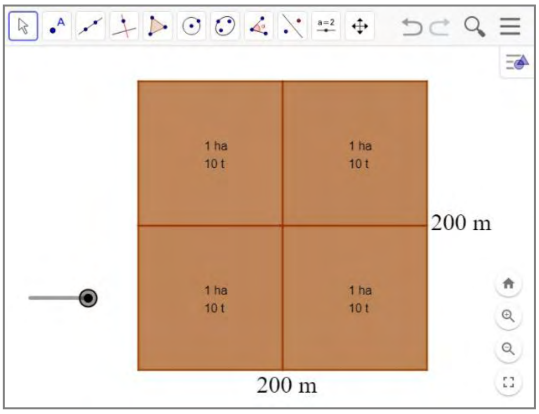


Имајући у виду да су све четири странице квадрата једнаке дужине, лако закључују да дужину једне странице могу одредити дељењем обима квадрата са четири. Најзад, на основу израчунате дужине странице, на основу обрасца за израчунавање површине квадрата могу доћи до вредности површине.

4. На њиви облика квадрата странице 200 m посађене су лубенице. Колико килограма лубенице би могло да се добије са ове њиве ако се са 1 ha добије 10 t лубенице?

   За израчунавање количине лубеница које се могу убрати са њиве неопходно је најпре израчунати површину дате њиве облика квадрата. Након израчунавања површине њиве потребно је добијену вредност површине превести у хектаре а затим дељењем са једним хектаром одредити колико тона лубенице је могуће добити са њиве датих димензија (визуелно можемо приказати поплочавањем површи квадрата који представља њиву квадратима површине 1 ha, при чему сваки од квадрата одговара 10 t лубенице) (линк).



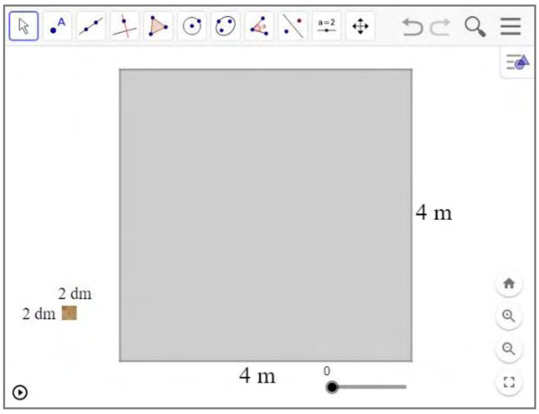


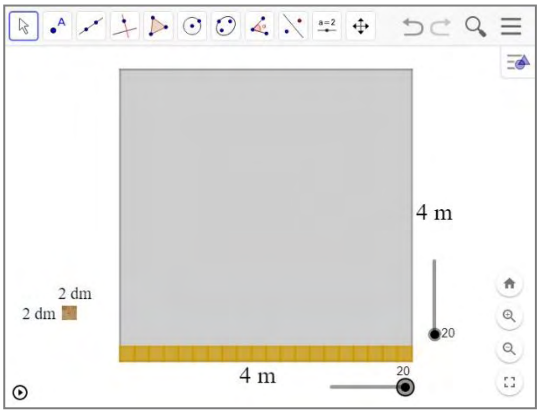
Пребројавањем квадрата закључујемо колико тона лубеница се може добити са њиве датих димензија.

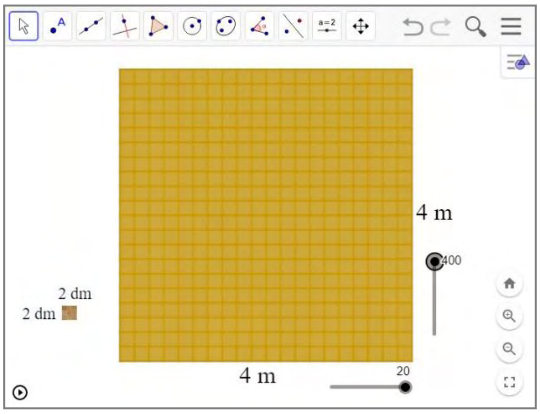
5. Дужина странице пода облика квадрата је 4 m. Миша је одлучио да под прекрије дашчицама облика квадрата дужине странице 2 dm. Колико дашчица је потребно да би се прекрио цео под?

   За израчунавање броја дашчица потребних за прекривање целог пода потребно је израчунати површину једне дашчице и површину целог пода на основу датих димензија, а затим поделити мерни број површине пода површином једне дашчице. Уз то, претходно је потребно изразити површину пода у квадратним дециметрима. Графички, проблем можемо приказати поплочавањем површи квадрата који представља под квадратима који представљају дашчице (линк).

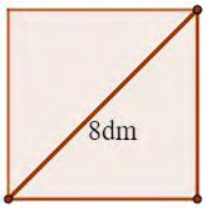
Мењањем вредности хоризонталног клизача могу уочити да се у једном реду налази двадесет квадрата, док употребом вертикалног клизача уочавају да се са двадесет редова од по двадесет квадрата може поплочати под, односно да је за поплочавање целог пода потребно 400 дашчица.



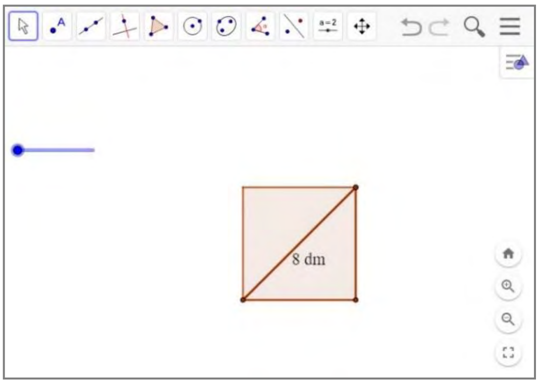


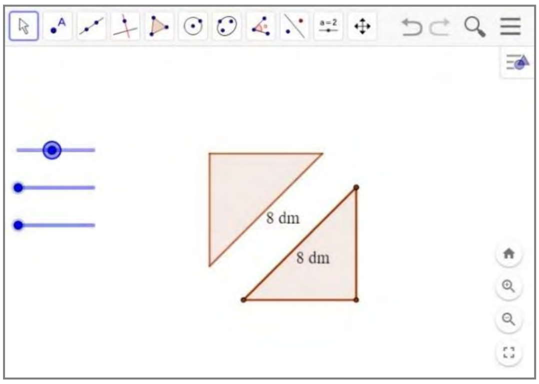


6. Израчунај површину квадрата са слике ако је обим троугла 18 dm.

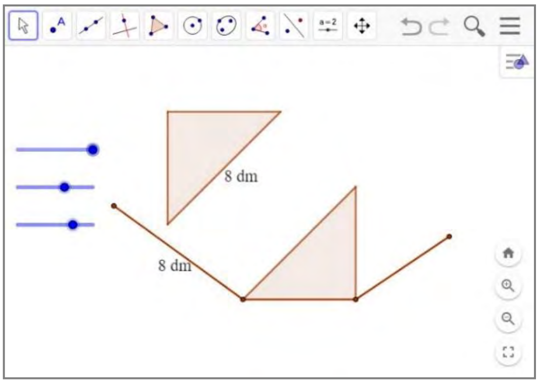


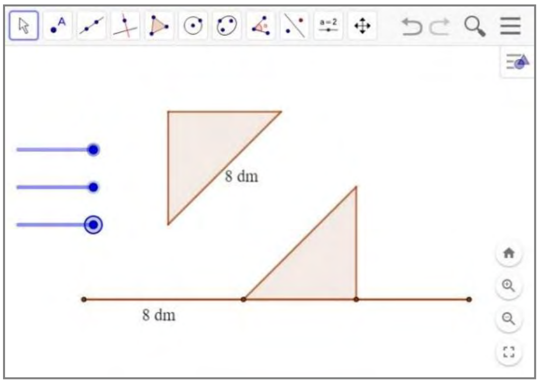
Динамичан приказ модела квадрата направљеног у GeoGebra софтверу пружа могућност ученицима да померањем клизача на очигледан начин закључе да се квадрат састоји од два троугла (линк). Троуглови су подударни јер по две странице квадрата истовремено представљају и странице сваког од троуглова, док је дужина треће странице троуглова позната и износи 8 dm.





Појављивањем два нова клизача могуће је изломљену линију која ограничава површ једног од троуглова трансформисати у дуж укупне дужине једнаке обиму троугла. Добијена дуж састоји се из надовезане две једнаке странице и једне странице троугла дужине 8 dm*. Како је дужина једне странице троугла дата, док су друге две странице троугла једнаке (представљају странице квадрата), то је на основу познатог обима троугла могуће одредити дужину осталих страница.*





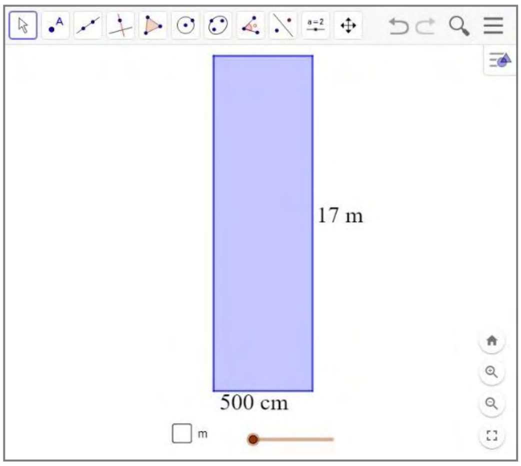
Враћањем клизача на почетне вредности троуглови поново формирају почетни квадрат а ученици уочавају да су добијене странице троуглова истовремено суседне странице квадрата, те применом обрасца за израчунавање површине квадрата израчунавају његову површину.

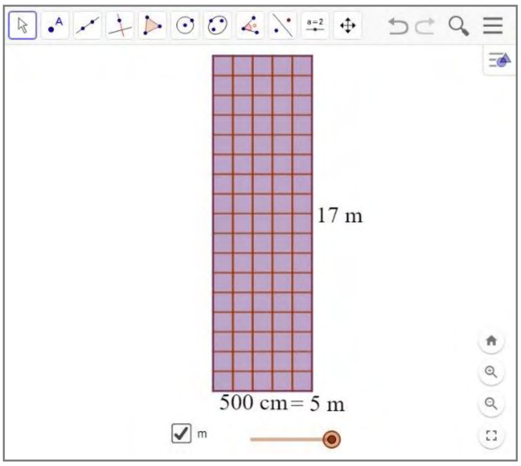
ВЕЖБА 11.

Наставна јединица	Израчунавање површине правоугаоника и квадрата
Тип часа	Утврђивање

1. Израчунај површину правоугаоника ако су његове димензије 17 m и 500 cm.

   Уз помоћ модела ученици могу да закључе у каквом су односу суседне странице правоугаоника (линк). Како су димензије дате у различитим мерним јединицама, најпре их треба превести у одговарајуће мерне јединице, односно у метре (кликом на поље за потврду појављује се одговарајућа димензија изражена у метрима).

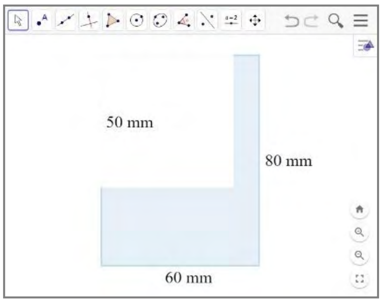


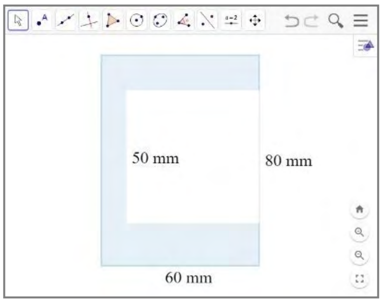


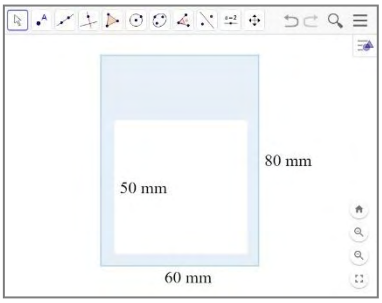
   Уз помоћ клизача који омогућавају динамичност, ученици могу уочити да се са пет редова од по седамнаест квадрата странице један метар може поплочати површ правоугаоника, чиме је извршена визуелизација обрасца $P = 5\text{m} \cdot 17\text{m}$.

2. Од папира облика правоугаоника страница a = 60 mm и b = 80 mm треба изрезати квадрат странице 50 mm. Колика је површина папира који је остао?

   На основу модела и могућности померања изрезаног дела облика квадрата ученици закључују да ма где био изрезан, квадрат има исту површину (линк).





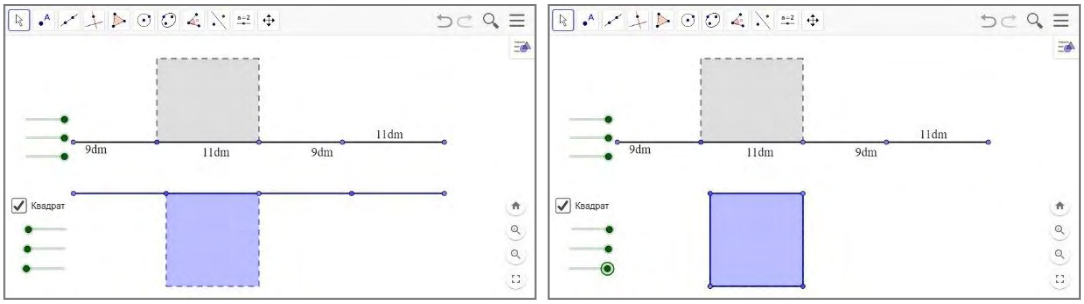


   Како би израчунали колика је површина папира који је остао потребно је најпре израчунати површину папира облика правоугаоника. Како су дужина и ширина папира облика правоугаоника дате у истим јединицама мере, то се директном применом обрасца за израчунавање површине правоугаоника може одредити површина папира. На исти начин ученици могу израчунати и површину дела папира облика квадрата који је изрезан. Након израчунавања површина правоугаоника и квадрата потребно је од површине правоугаоника одузети површину квадрата како би се добила површина папира који је остао.

3. Странице правоугаоника су 11 dm и 9 dm. Колика је површина квадрата чији је обим једнак обиму правоугаоника?

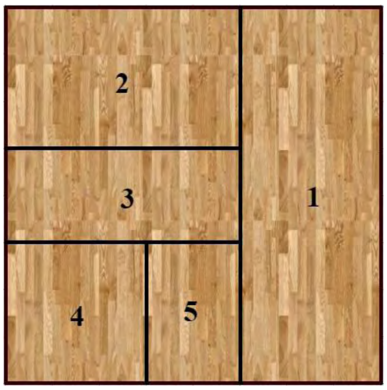
Захваљујући графичком приказу ученицима је лакше да уоче односе димензија квадрата и правоугаоника (линк). Уз помоћ клизача, ученици могу најпре пратити трансформацију изломљене линије која ограничава површ правоугаоника у дуж дужине једнаке збиру страница датог правоугаоника.

Кликом на поље за потврду појављује се дуж исте дужине састављена из четири једнаке дужи које представљају странице квадрата и ученици могу пратити како се уз помоћ три нова клизача поменута дуж трансформише у изломљену линију која ограничава површ квадрата.



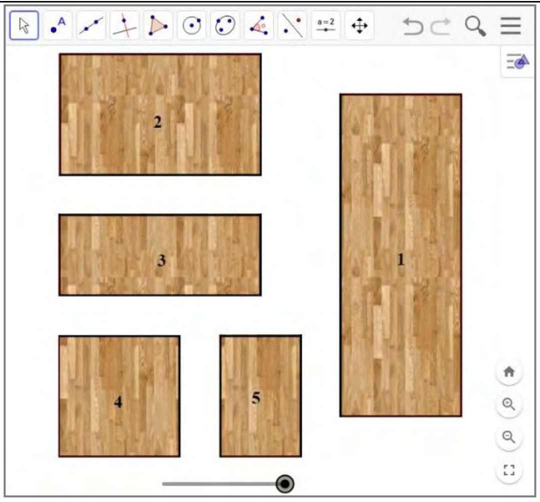
Имајући у виду да је обим квадрата једнак обиму правоугаоника, дужину једне странице квадрата могу одредити дељењем обима правоугаоника са четири. Даље, на основу израчунате дужине странице квадрата, на основу обрасца за израчунавање површине квадрата одређују његову површину.

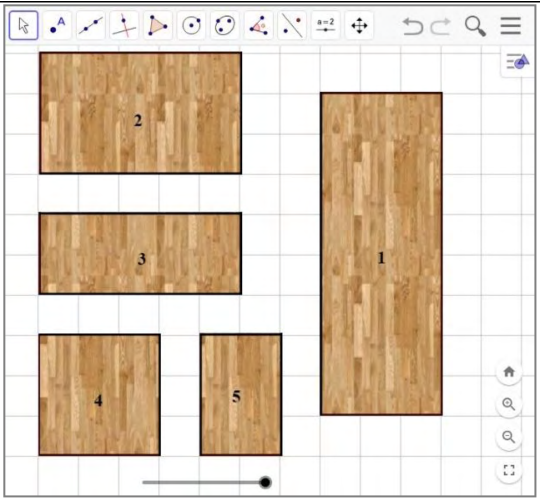
4. Ако један центиметар на слици одговара једном метру у стварности, израчунај површину свих просторија у стану.



1. Дневна соба
2. Спаваћа соба
3. Ходник
4. Дечја соба
5. Купатило

Активацијом клизача приказ стана се трансформише тако да ученици сваку од просторија могу посматрати засебно (линк).

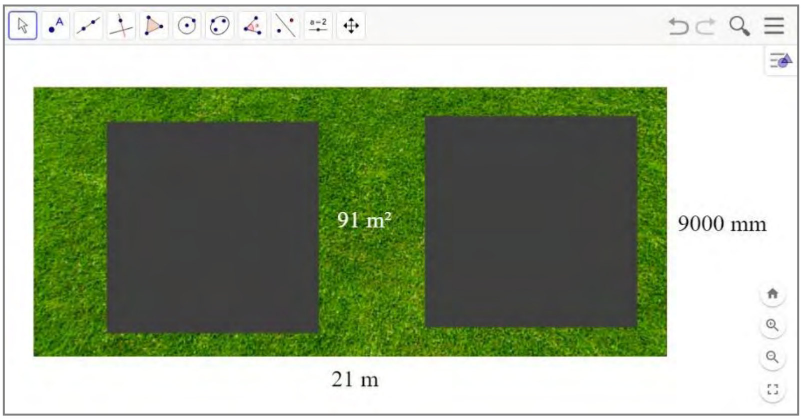




Уз помоћ квадратне мреже ученици могу једноставније измерити димензије и закључити ког су облика просторије. Након тога могу извршити рачунање површине сваке просторије користећи добијене димензије и образац за површину квадрата или правоугаоника.

5. Плац облика правоугаоника има димензије 21 m и 9 000 mm и на њему су изграђене две куће истих основа облика квадрата. Одреди дужине основа кућа ако преостали део дворишта има површину 91 m^2.

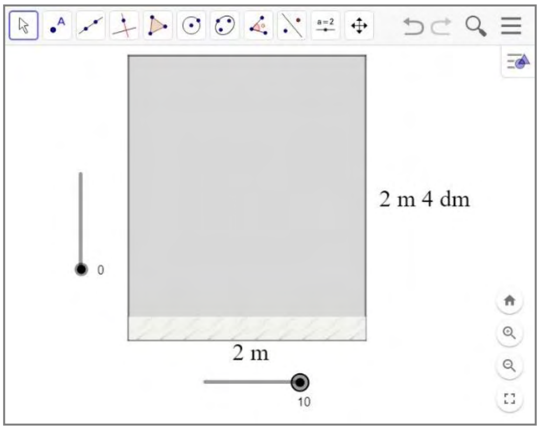
Креирани модел даје адекватан графички приказ и тиме помаже ученицима да визуелизују услове задатка (линк).

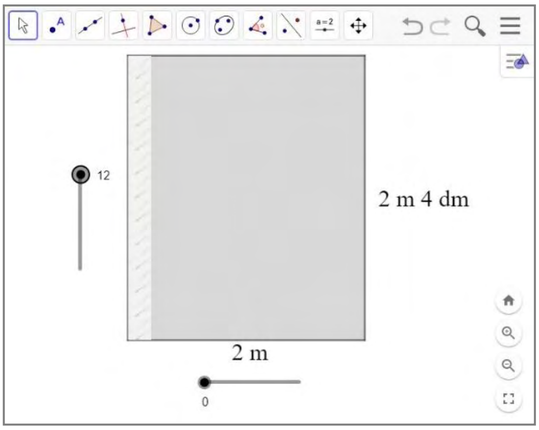


Да би одредили на коликој површини плаца су изграђене куће ученици треба да закључе да то могу одредити тако што ће од укупне површине плаца одузети површину дела дворишта на којем нису изграђене куће. Пошто су основе кућа једнаке, добијену површину плаца на којој се налазе куће ученици треба да поделе са два, након чега коришћењем обрасца за израчунавање површине квадрата (на основу услова задатка основе су облика квадрата) могу одредити дужину странице квадрата која одговара дужини основе куће.

6. За прекривање зида облика правоугаоника дужине 2 m и висине 2 m 4 dm купљено је шест пакета керамичких плочица облика квадрата. Колико ће плочица недостајати да се прекрије цео зид ако је у сваком пакету по 18 плочица и дужина једне плочице износи 2 dm?

Уз помоћ модела ученици могу на очигледан начин да закључе колико плочица може стати у један ред, односно у једну колону, што им може помоћи приликом израчунавања броја плочица потребних за прекривање целог зида (линк).



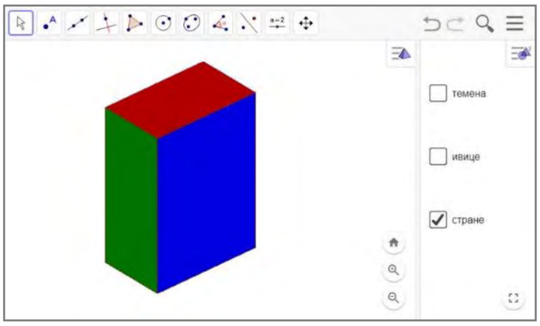


До броја плочица које недостају да би се прекрио цео зид могу доћи одузимањем укупног броја плочица у пакетима од броја плочица потребних за прекривање целог зида. На основу датих димензија ученици могу одредити површину целог зида а површину купљених плочица тако што ће израчунати површину једне плочице и помножити је укупним бројем плочица у свих шест пакета. Одузимањем добијених површина добија се површина дела зида за који недостају плочице, дељењем те површине површином једне плочице добија се број плочица које недостају.

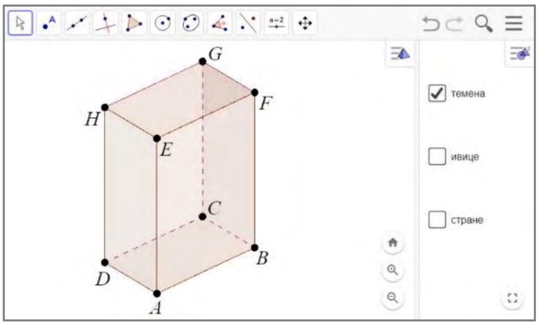
ВЕЖБА 12.	
Наставна јединица	Квадар и коцка. Особине квадра
Тип часа	Обрада

Ученици најпре имају прилику да на предметима свакодневне употребе упознају неке карактеристике квадра, да има три димензије (дужину, ширину и висину).

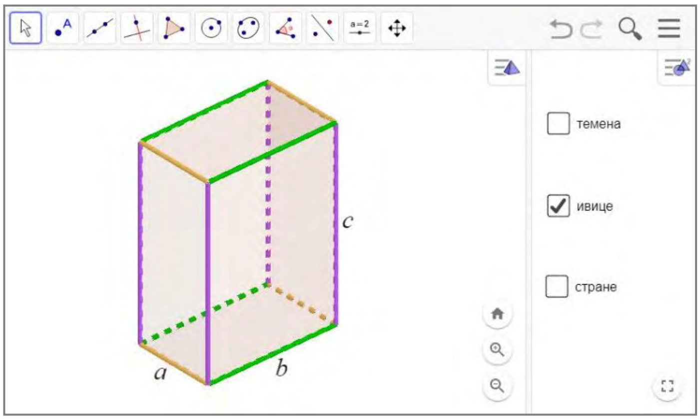
Уз помоћ динамичног модела који је могуће заротирати ученици могу уочити елементе квадра (стране, ивице и темена) (линк). Пребројавањем могу утврдити да се површ квадра састоји од шест страна облика правоугаоника, да квадар има осам темена и дванаест ивица. Ради лакшег формирања представе о појму квадра, да су наспрамне стране квадра подударне, да постоје три групе ивица једнаких дужина, одговарајуће групе елемената представљене су истом бојом.



☐ темена
☐ ивице
☑ стране

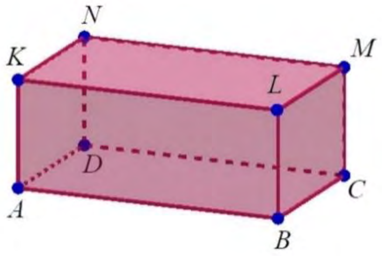


☑ темена
☐ ивице
☐ стране



☐ темена
☑ ивице
☐ стране

1. Гледај слику квадра и допуни шта недостаје.



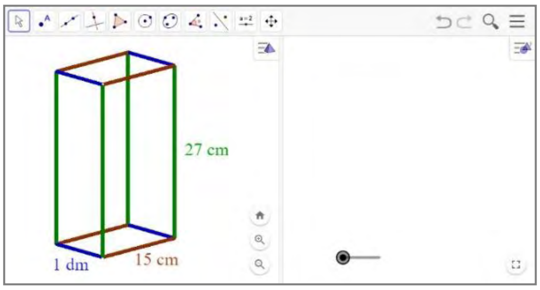
Темена која припадају горњој страни квадра су ____, ____, ____ и ____ .
Ивице које полазе из темена *C* су: ____, ____ и ____ .
Ивица *BL* је подударна и паралелна са ивицама ____, ____ и ____ .
Страна паралелна и подударна страни *ABLK* је страна __________ .

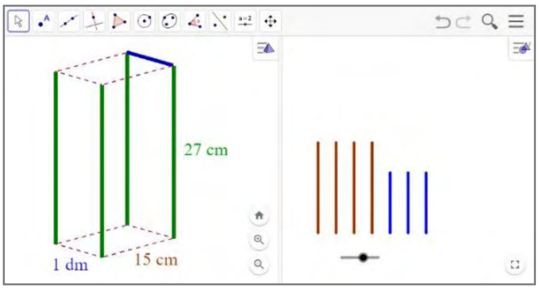
(линк)

Захваљујући могућности ротације модела, ученици могу веома једноставно да уоче односе међу елементима квадра.

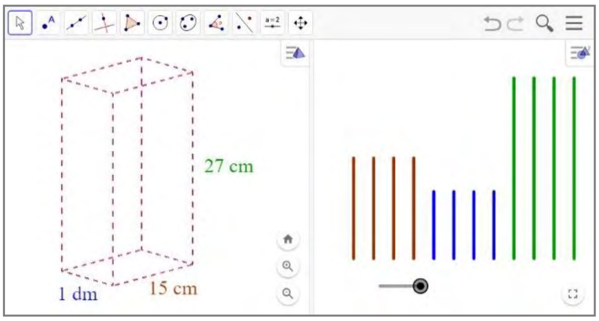
2. Колико је потребно жице да би се направио модел квадра чија је дужина 15 cm, ширина 1 dm, а висина 27 cm?

Уз помоћ модела ученици могу лако да визуелизују проблем одређивања дужине жице потребне за састављање квадра датих димензија (линк).



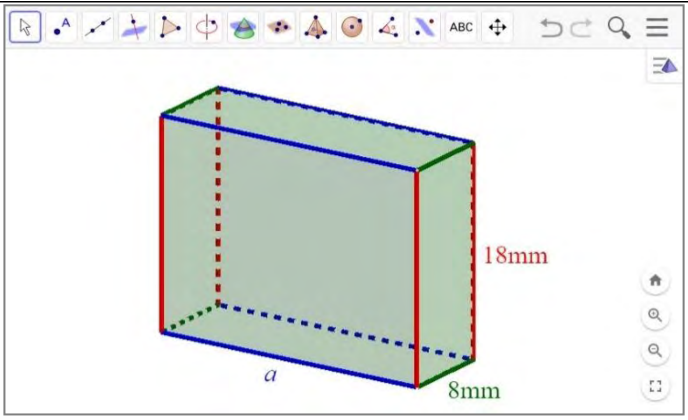


Ради лакшег уочавања потребних елемената ивице исте дужине обојене су истом бојом, што ученицима олакшава да закључе да квадар садржи три групе од по четири ивице једнаке дужине. Уз помоћ креираног клизача издвојене су све ивице квадра, на основу чега ученици закључују да се сабирањем дужина свих дванаест ивица квадра добија збир свих ивица квадра.



3. Збир дужина свих ивица квадра износи 200 mm. Колико износи дужина ивице *a* ако је *b* = 8 mm и *c* = 18 mm?

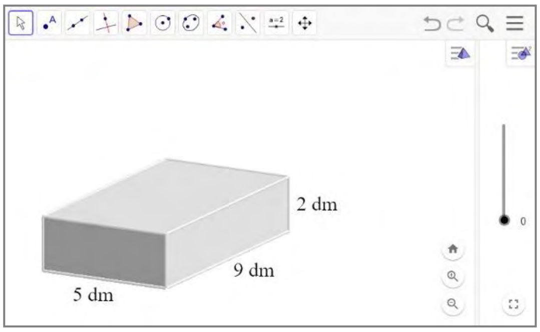
На основу модела, ученици лакше могу закључити које су димензије квадра дате, а коју треба да одреде (линк).

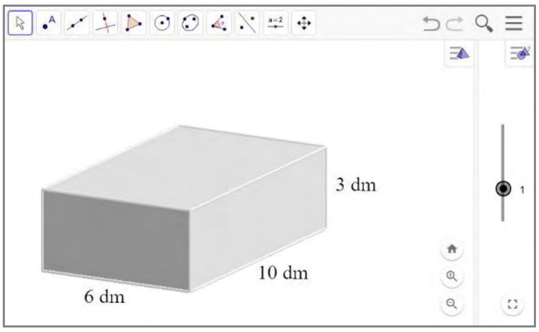


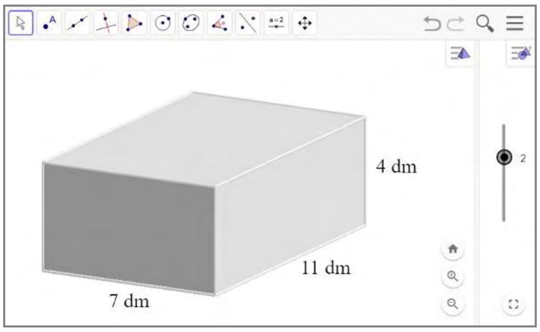
С обзиром на то да је дат збир дужина свих ивица квадра и да су дате висина и ширина квадра, одузимањем се добија вредност четири пута већа од дужине квадра. Дељењем добијене вредности са четири може се одредити тражена ивица а.

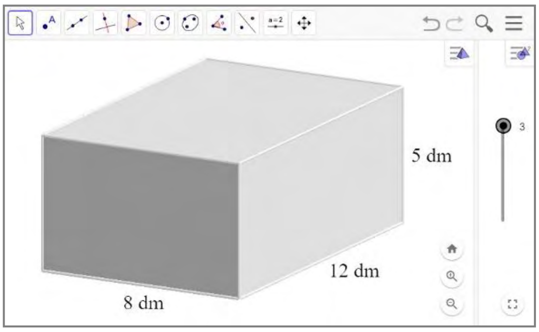
4. Ивице квадра направљеног од стиропора износе a = 5 dm, b = 9 dm и c = 2 dm. Колико ће износити збир дужина свих ивица новог квадра ако му је свака ивица дужа за 3 dm од датог квадра?

На основу динамичног приказа који обезбеђује GeoGebra, ученици могу најпре посматрати дати квадар, а затим мењањем вредности клизача пратити промену у дужини ивица квадра и коначно уочити квадар чије су све ивице за 3 dm дуже од ивица почетног квадра (линк).







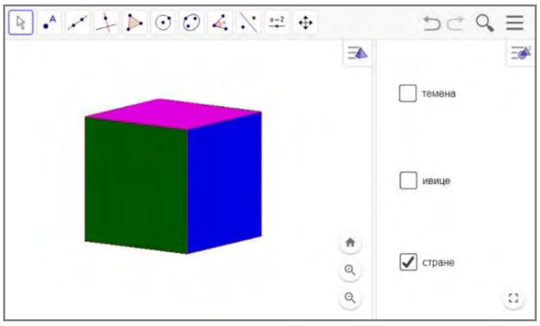


Ротацијом тродимензионалног приказа ученици могу да виде да су се и дужина и ширина и висина почетног квадра промениле и да ивице новог квадра износе 8 dm, 12 dm и 5 dm. На основу димензија новог квадра даље могу израчунати збир дужина свих ивица.

ВЕЖБА 13.	
Наставна јединица	Квадар и коцка. Особине коцке
Тип часа	Обрада

Ученици имају прилику да на предметима свакодневне употребе уоче да је коцка једна врста квадра и да за разлику од квадра има једну димензију – дужину.

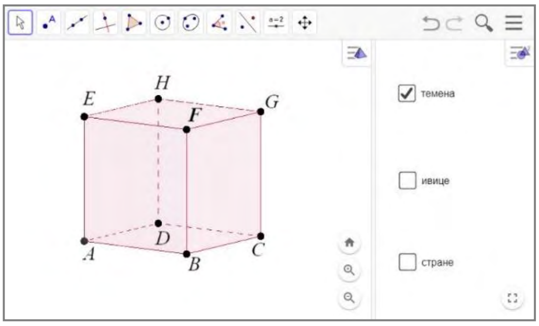
Модел коцке генерисан у GeoGebra софтверу даје могућност ротирања, чиме доприноси бољој очигледности и даје прилику ученицима да уоче елементе који се налазе са задње стране модела, као и односе оних елемената које је при дводимензионалном приказу тешко представити (нормалност ивица) (линк). Ученици могу уочити темена, стране и ивице коцке, а ради лакшег уочавања посматраних елемената активирањем поља за потврду у десном делу радног окружења могуће је посебно истаћи посматране елементе. Пребројавањем ученици могу утврдити да се површ коцке састоји од шест страна облика квадрата, да коцка има осам темена и дванаест ивица.



☐ темена

☐ ивице

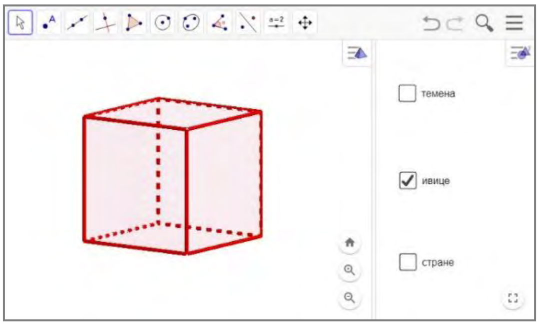
☑ стране



☑ темена

☐ ивице

☐ стране

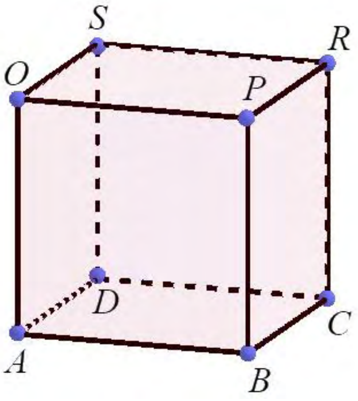


☐ темена

☑ ивице

☐ стране

1. Гледај слику коцке и допуни шта недостаје.



Задња страна коцке са слике је _______.

Која темена припадају задњој страни коцке? _________________

Којим странама је заједничка ивица AO?

____

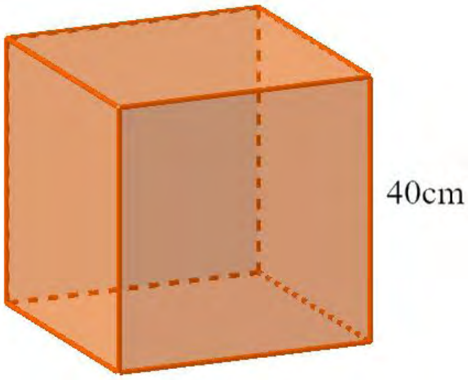
Којим све странама припада теме B?

____

(линк)

Захваљујући могућности ротације модела, ученици могу лако да уоче квадрат који представља задњу страну коцке, темена која му припадају, као и остале стране коцке.

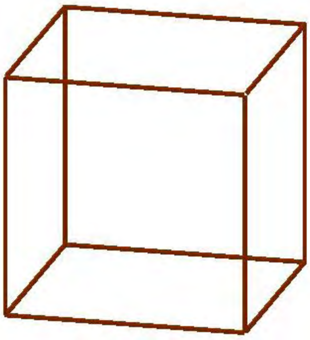
2. Колики је збир дужина свих ивица коцке ако једна њена ивица има дужину 40 cm?



(линк)

Захваљујући моделу коцке направљеном у GeoGebra пакету ученици могу на очигледном примеру да изброје колико коцка има ивица, ротирањем модела могу да измере и утврде да су све ивице једнаке дужине и након тога да израчунају збир дужина свих ивица.

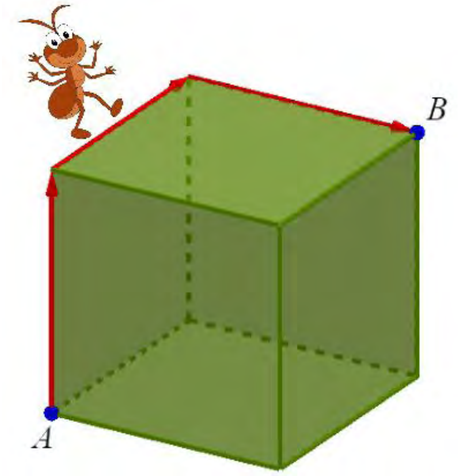
3. Колико дециметара износи дужина ивице коцке за чије прављење је употребљено укупно 6 m жице?



(линк)

Као и у претходном задатку, ученици на основу креираног модела могу да преброје ивице коцке и да захваљујући могућности ротације утврде у каквом су односу ивице (једнакост дужина ивица могу утврдити мерењем). Након тога закључују да дужину једне ивице коцке могу израчунати превођењем укупне дужине жице у дециметре а затим дељењем добијеног мерног броја са дванаест.

4. Мрав се креће по ивицама коцке од темена A задатом путањом до темена B. Колико је дугачка путања којом се креће мрав ако је збир дужина свих ивица коцке 108 cm?

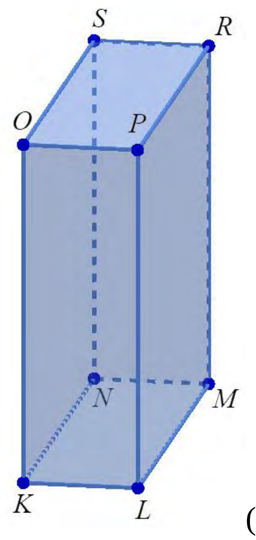


(линк)

Уз помоћ динамичног тродимензионалног модела који је могуће заротирати, ученици могу лакше да уоче да је путања мрава једнака збиру дужина три ивице коцке. С обзиром на то да је дат збир дужина свих ивица коцке ученици закључују да је најпре потребно одредити дужину једне ивице коцке. Када одреде дужину ивице коцке лако одређују дужину путање мрава множењем дужине ивице са три.

ВЕЖБА 14.	
Наставна јединица	Квадар и коцка. Особине квадра и коцке
Тип часа	Утврђивање

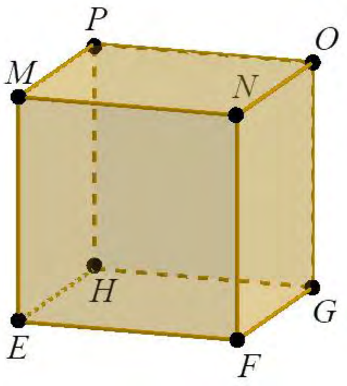
1. Гледај слику квадра и допуни шта недостаје.



(линк)

Наспрамна страна страни *LMRP* је __________ .
Доња страна квадра са слике је _____________ .
Ивица *NM* је подударна и паралелна са ивицама ____, ____ и ____ .
Којим све странама припада теме *S*?
______________________________ .

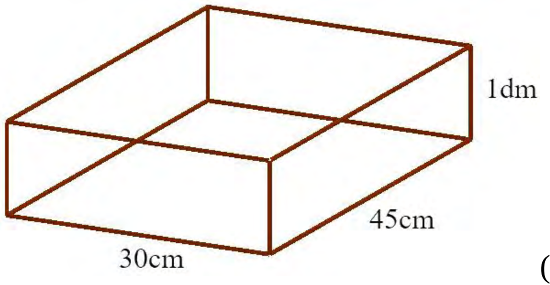
2. Гледај слику коцке и допуни шта недостаје.



(линк)

Наспрамна страна страни *HGOP* је __________ .
Лева страна коцке са слике је _____________ .
Ивица *NO* је подударна и паралелна са ивицама ____, ____ и ____ .
Којим све странама припада теме *E*?
______________________________ .

3. Мајстор је набавио шест метара жице. Колико жице ће му недостајати да би направио два квадра дужине 30 cm, ширине 45 cm и висине 1 dm?

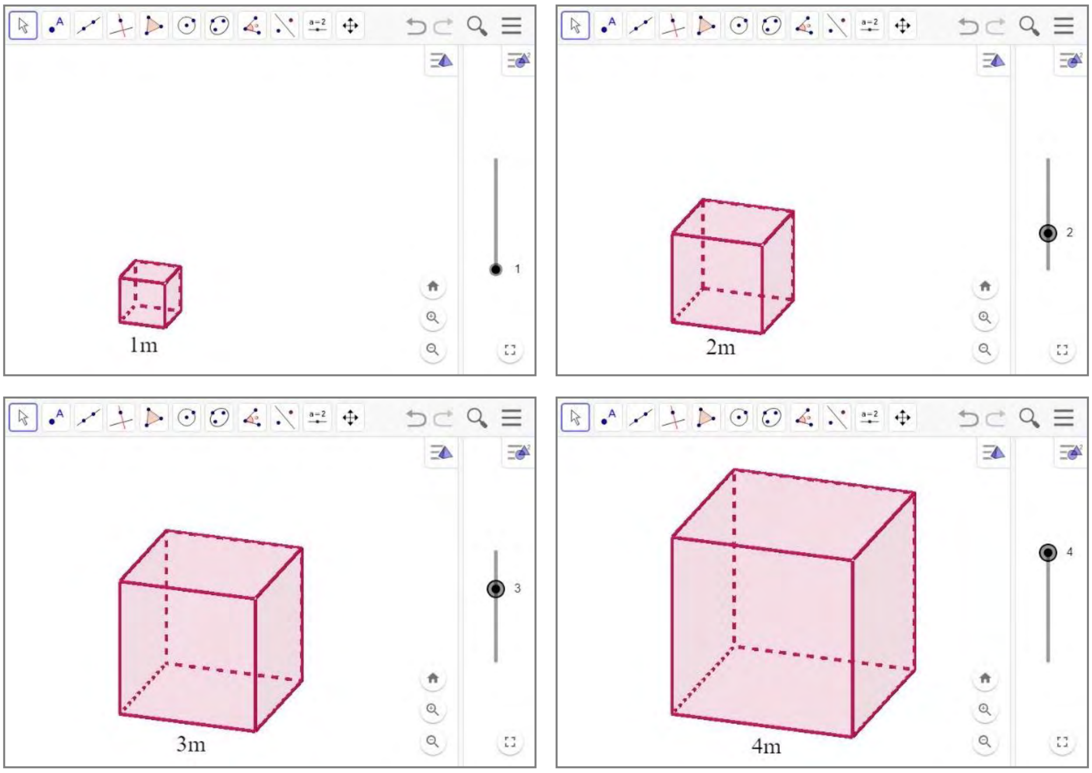


(линк)

Уз помоћ модела ученици лакше могу да визуелизују квадар и његове ивице како би израчунали збир дужина свих ивица квадра. Да би одредили колико жице недостаје за прављење два квадра потребно је од збира дужина свих ивица два квадра одузети дужину жице коју је мајстор купио.

4. Коцка има ивицу дужине 1 m. Ако се свака ивица коцке повећа за 3 m, за колико ће се повећати збир дужина свих ивица коцке?

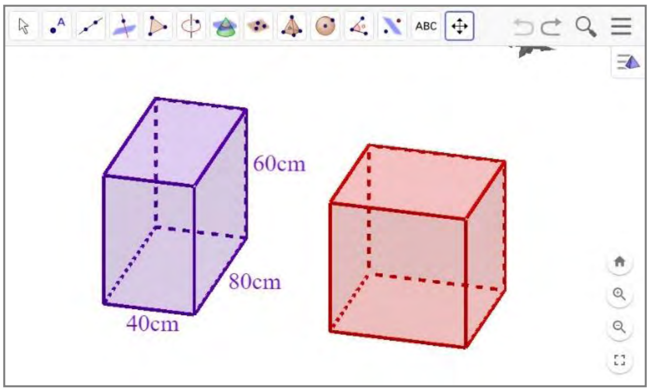
   Динамичан приказ омогућава ученицима да прате како се почев од коцке ивице 1 m померањем креираног клизача повећавају све ивице коцке (линк).



   Ученици могу одредити за колико се повећао збир дужина свих ивица на два начина: 1) одузимањем збира дужина свих ивица почетне коцке дужине ивице 1 m од збира дужина свих ивица новонастале коцке дужине ивице 4 m; 2) множењем укупног броја ивица коцке са 3 m, јер се за толико променила дужина сваке од дванаест ивица коцке.

5. Збир дужина свих ивица коцке једнак је збиру дужина свих ивица квадра са димензијама 40 cm, 60 cm и 80 cm. Колико износи дужина ивице те коцке?

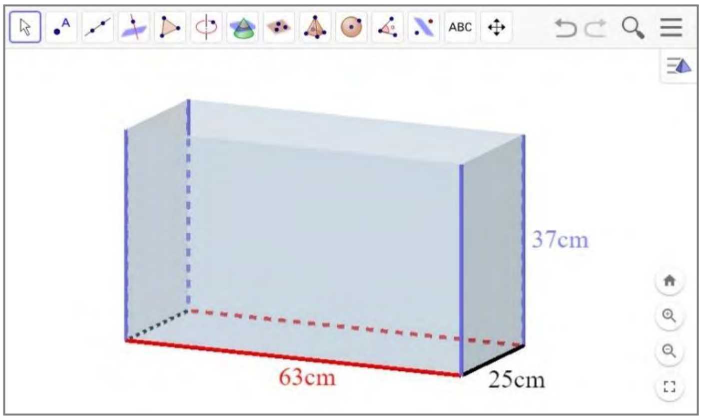
   Уз помоћ модела коцке и квадра ученици могу лакше да визуелизују ове појмове (линк).



   Како би одредили дужину ивице коцке, најпре је потребно да израчунају збир дужина свих ивица квадра који је према условима задатка једнак збиру дужина *свих ивица коцке. Након тога, дужину једне ивице коцке могу одредити дељењем добијене вредности са дванаест.*

6. Горан је све ивице акваријума облика квадра, осим горњих, облепио заштитном траком. Колико му је центиметара траке било потребно ако је висина акваријума 37 cm, дужина 63 cm и ширина 25 cm?

   Уз помоћ модела који одговара условима задатка ученици могу једноставније да уоче које ивице квадра треба облепити траком (линк).

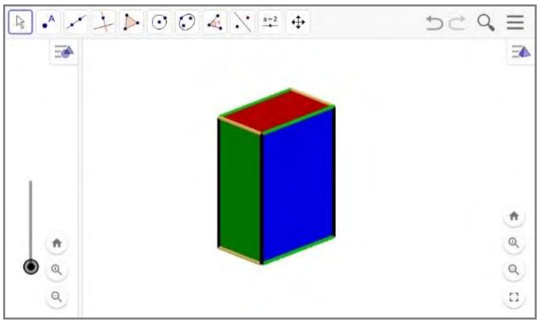
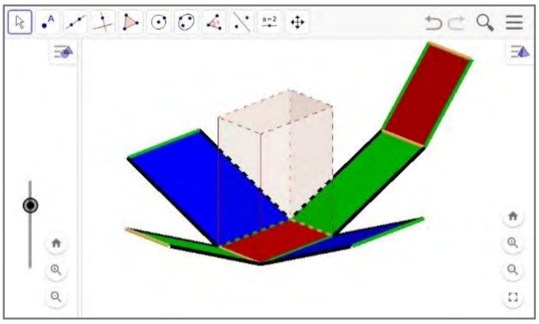
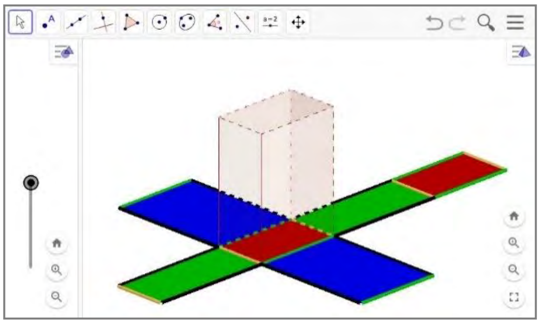


Ивице које припадају горњој страни квадра су уклоњене на моделу, а ученици могу закључити да укупна дужина траке одговара збиру две дужине, две ширине и четири висине квадра.

ВЕЖБА 15.

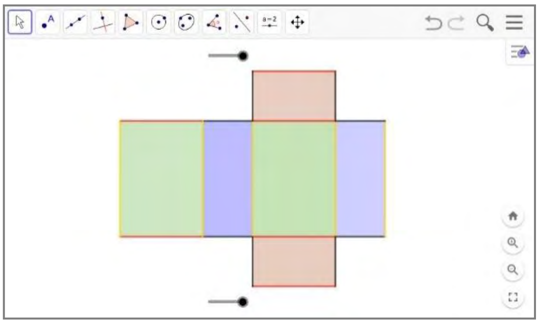
Наставна јединица	Мрежа квадра и коцке
Тип часа	Обрада

Уз помоћ динамичног модела направљеног у GeoGebra *пакету ученици на очигледан и транспарентан начин прате формирање мреже квадра (линк). Полазећи од тродимензионалног модела квадра, померањем клизача долази до трансформације површи квадра и формирања мреже квадра.*

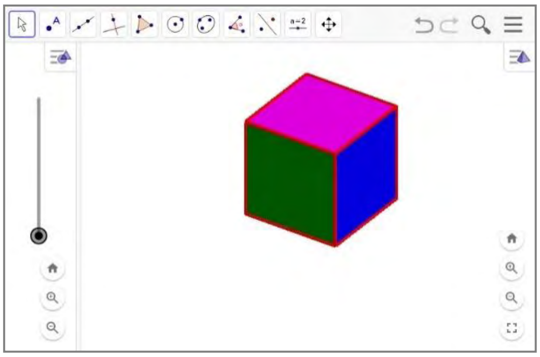




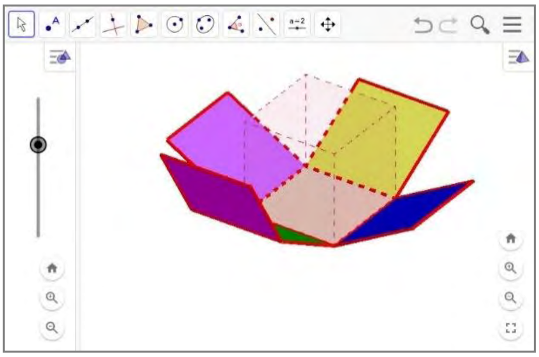
Како би ученицима било једноставније да прате трансформацију, подударни правоугаоници обојени су истом бојом, захваљујући чему закључују да квадар има три пара подударних правоугаоника. Странице насталих правоугаоника који чине мрежу квадра које су једнаке дужине обојене су истом бојом. Враћајући мрежу квадра у почетни положај ученици могу закључити да странице правоугаоника одговарају ивицама квадра.

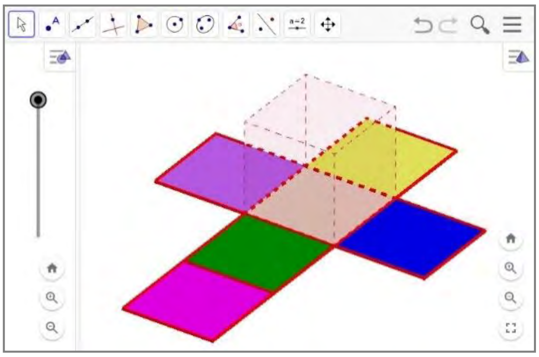
На основу модела померањем клизача ученици могу на динамичан начин открити које све положаје могу имати правоугаоници који чине мрежу квадра (линк). Ради лакшег праћења, наспрамни и подударни правоугаоници обојени су истом бојом, као и странице једнаких дужина.



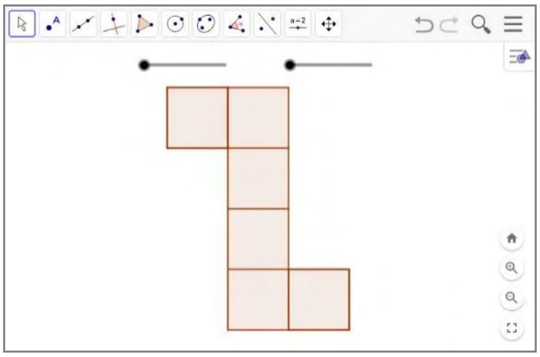
Аналогно са формирањем мреже квадра, уз употребу модела ученици могу пратити и формирање мреже коцке (линк). Померањем клизача *тродимензионални модел коцке трансформише се у фигуру која одговара мрежи коцке. Ученици закључују да се мрежа коцке састоји од 6 подударних квадрата. Дужине страница квадрата који чине мрежу одговарају ивицама коцке, па су све обојене истом бојом.*

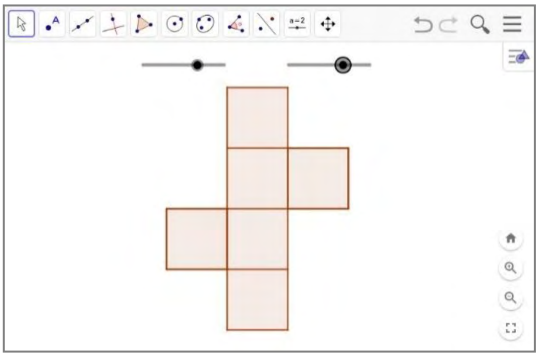






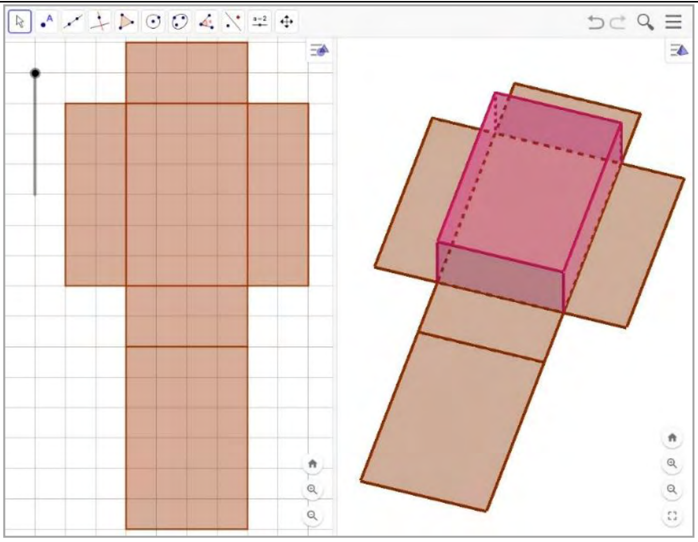
Као и код квадра, на основу приказане мреже коцке померањем клизача ученици могу на очигледан начин открити које положаје могу имати квадрати из којих је састављена мрежа (линк).





1. На квадратној мрежи нацртај фигуру која представља мрежу квадра чије су ивице 1 cm, 2 cm и 3 cm.

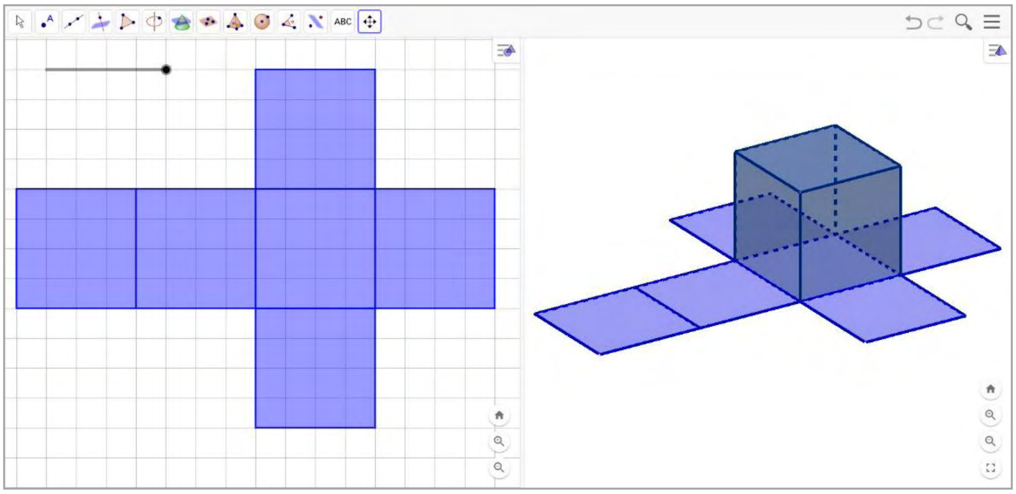
   Уз помоћ модела ученици могу пратити настанак мреже квадра одговарајућих димензија (линк).



Захваљујући квадратној мрежи у дводимензионалном прозору пакета приказује се један начин како би ученици требало да нацртају мрежу квадра у својим свескама.

2. Нацртај на квадратној мрежи фигуру која представља мрежу коцке чија је ивица 2cm.

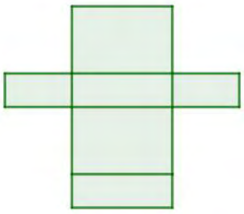
Као у претходном задатку, уз помоћ креираног модела ученици могу на динамичан начин пратити формирање мреже коцке датих димензија (линк).

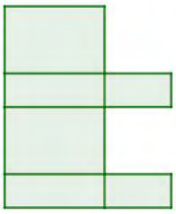


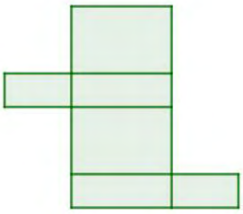
Захваљујући квадратној мрежи у дводимензионалном прозору дат је један од могућих приказа мреже коцке коју би ученици требало да нацртају у својим свескама.

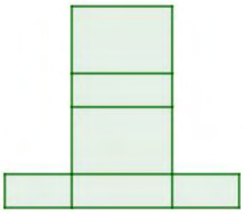
ВЕЖБА 16.	
Наставна јединица	Мрежа квадра и коцке
Тип часа	Утврђивање

1. Заокружи фигуре са слике које представљају мрежу квадра.

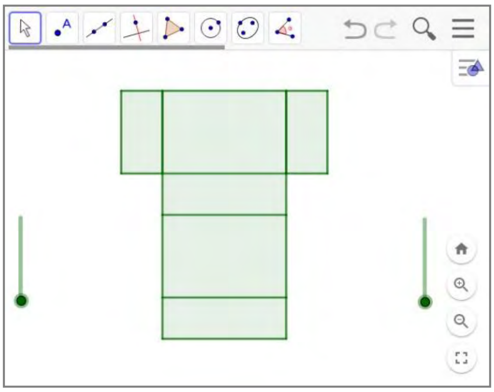


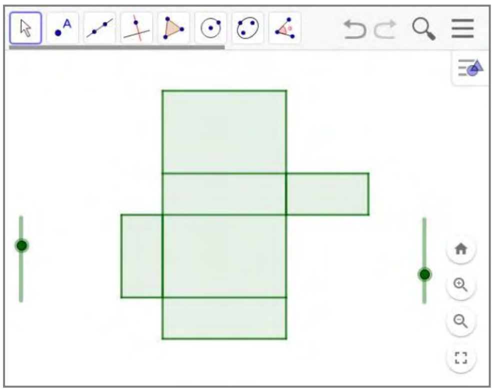


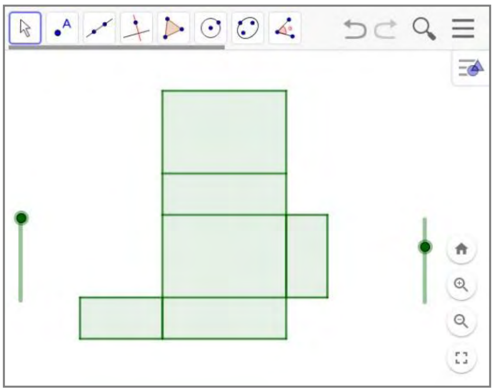


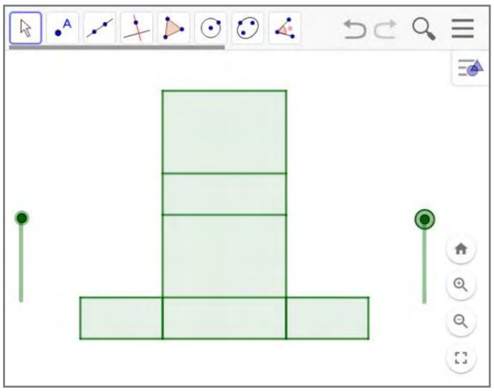


Уз помоћ модела (линк) ученици могу поновити које су могуће мреже квадра и тако закључити које од приказаних фигура представљају мрежу квадра.

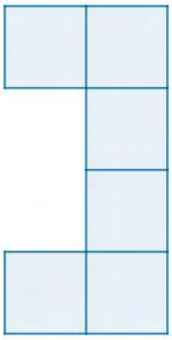


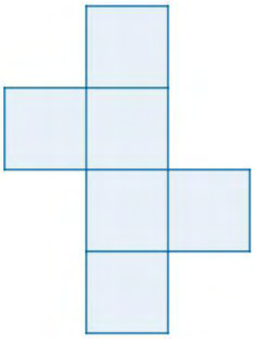


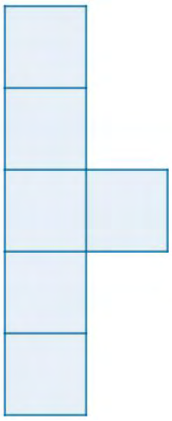


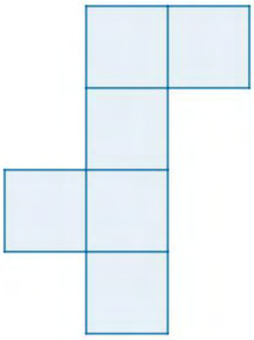


2. Заокружи фигуре са слике које представљају мрежу коцке.

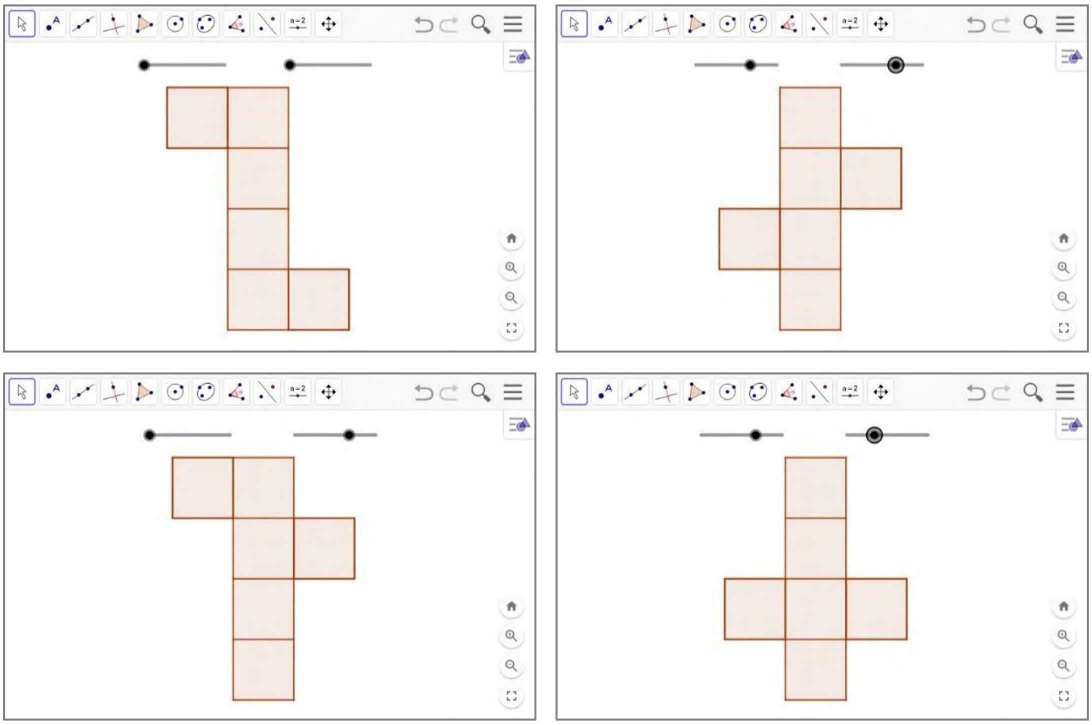




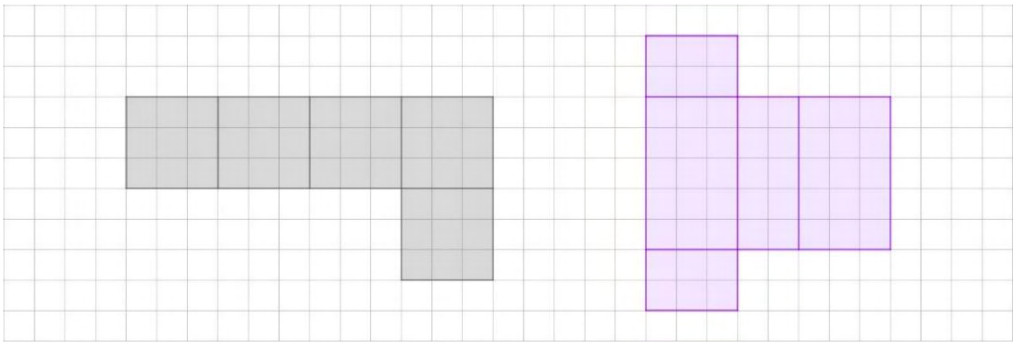




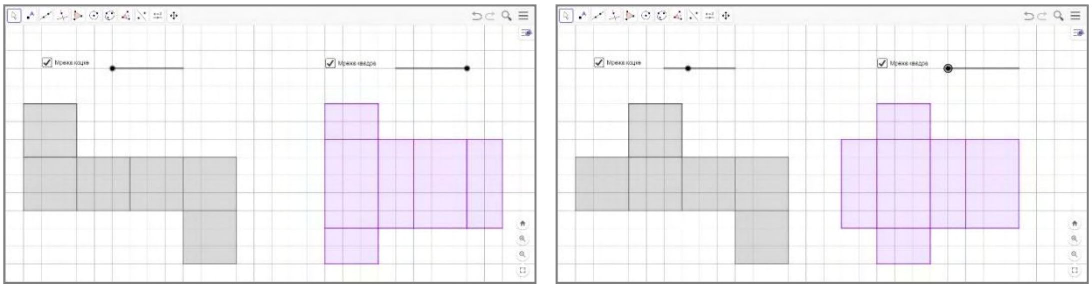
Уз помоћ модела (линк) ученици могу поновити које су могуће мреже коцке и тако закључити које од приказаних фигура представљају мрежу коцке.

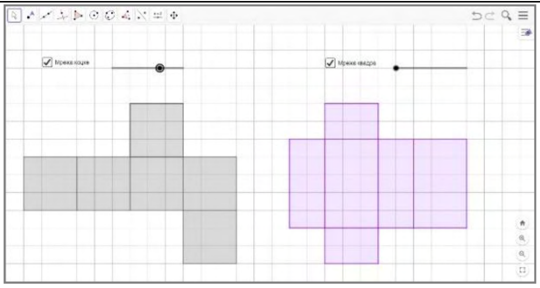


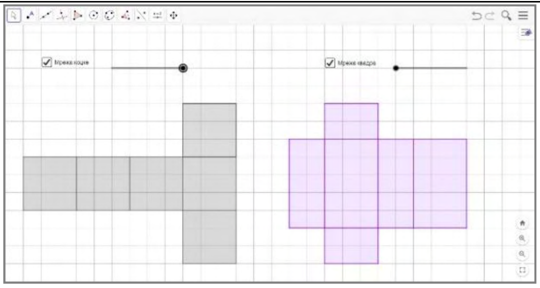
3. Доцртај делове фигуре који недостају тако да добијеш мрежу коцке и мрежу квадра.



Задатак има више тачних решења тако да уз помоћ динамичног модела креираног у пакету GeoGebra ученици могу видети на које све начине је могуће доцртати делове фигура који недостају тако да се добију мрежа коцке или квадра (линк).



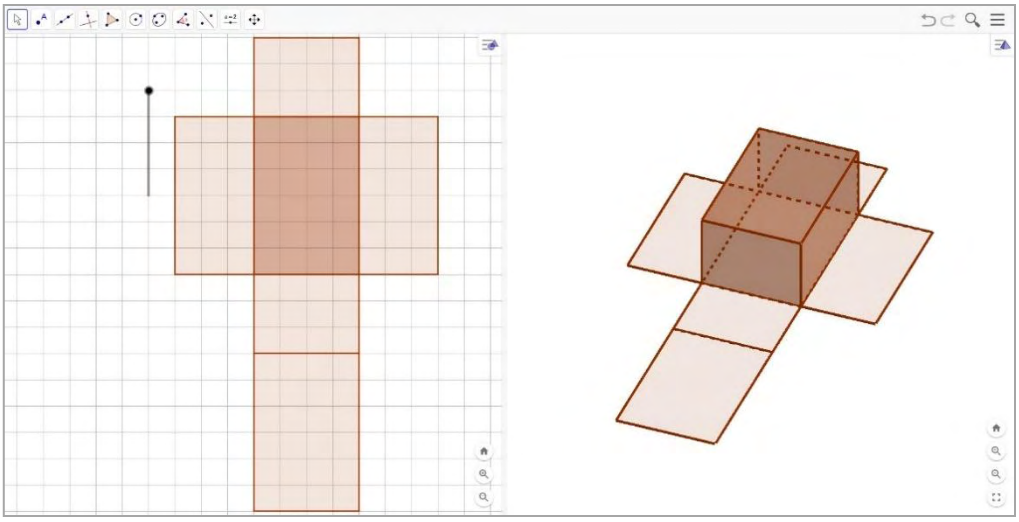




На основу визуелизације дате фигуре на левој страни ученици закључују да се ради о мрежи коцке и да је потребно доцртати још један квадрат. Мењањем вредности клизача ученици могу посматрати које све положаје може заузети шести квадрат како би добијена фигура представљала мрежу коцке. Аналогно, ученици уочавају да се фигура са десне стране састоји од пет правоугаоника, од тога два пара подударних правоугаоника. Како се мрежа квадра састоји из шест правоугаоника, ученици закључују да преосталом правоугаонику треба доцртати подударан правоугаоник, а уз помоћ клизача представљени су потенцијални положаји које правоугаоник може заузети како би добијена фигура представљала мрежу квадра.

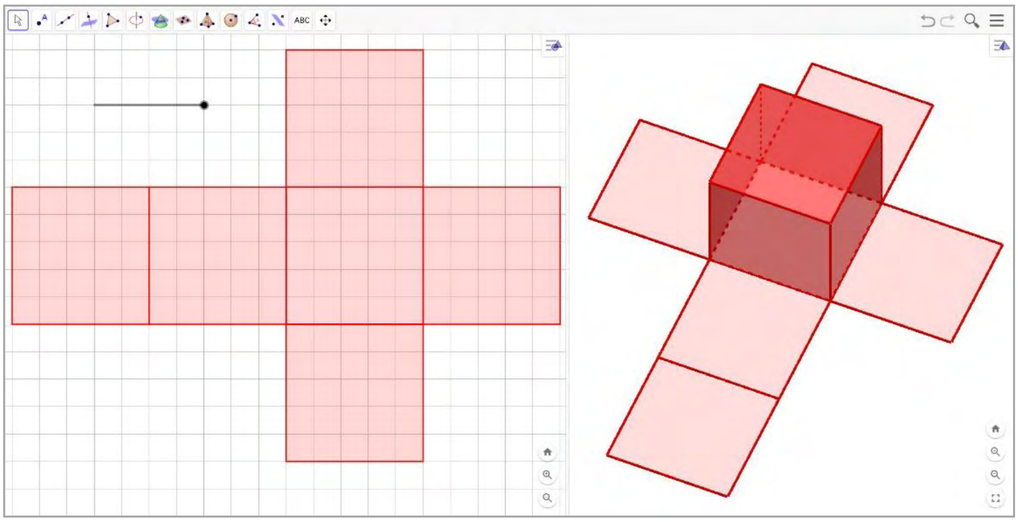
4. На квадратној мрежи нацртај фигуру која представља мрежу квадра са ивицама 1 cm 5 mm, 2 cm и 30 mm.

   Уз помоћ модела ученици могу пратити настанак мреже квадра одговарајућих димензија (линк). Захваљујући квадратној мрежи у дводимензионалном прозору пакета приказује се једна од могућих мрежа квадра какву би ученици требало да нацртају у својим свескама.



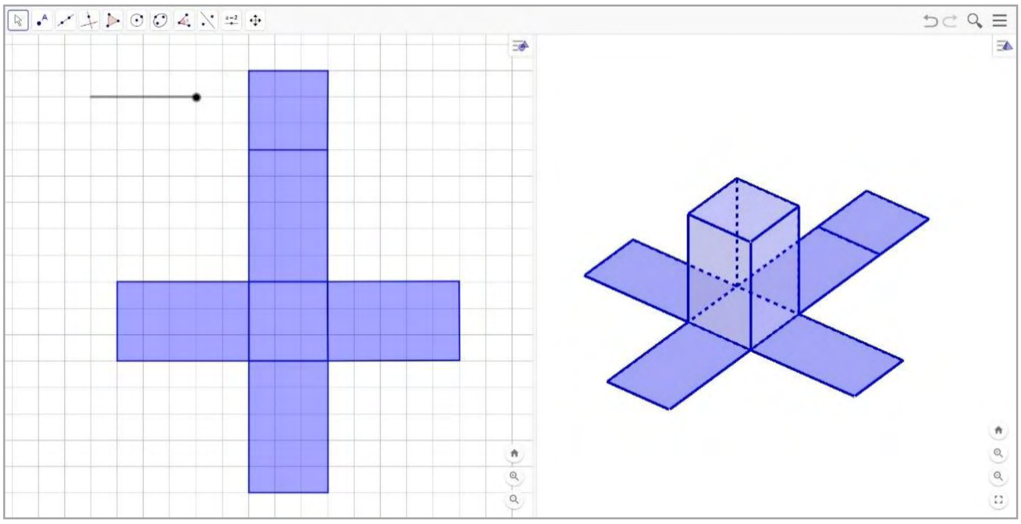
5. Нацртај на квадратној мрежи фигуру која представља мрежу коцке ивице 2 cm 5 mm.

   Коришћењем модела ученици могу на очигледан начин пратити формирање мреже коцке датих димензија (линк). Захваљујући квадратној мрежи у дводимензионалном прозору приказан је један могући начин цртања мреже коцке коју би ученици требало да нацртају у њиховим свескама.



6. На квадратној мрежи нацртај фигуру која представља мрежу квадра чија су горња и доња страна квадрати. Шта закључујеш, какви су правоугаоници који чине остале стране квадра?

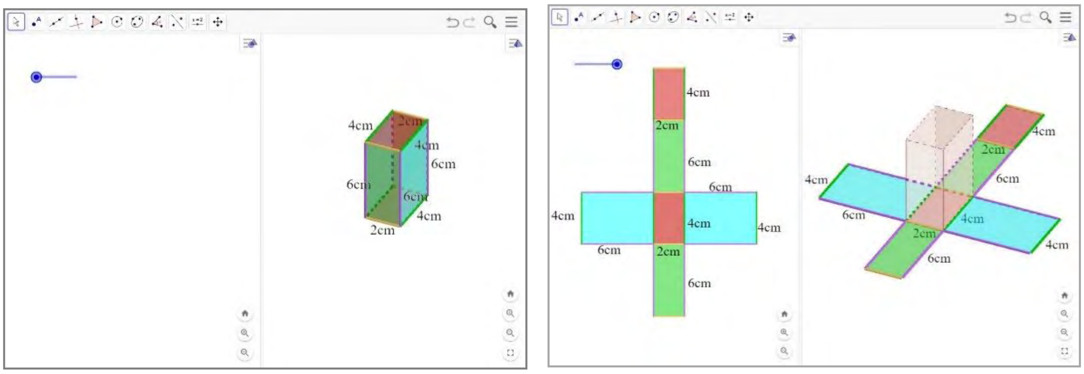
   Модел пружа прилику ученицима да лакше визуелизују квадар са две стране облика квадрата (линк). Могу да закључе да су дужина и ширина квадра једнаке а самим тим су и правоугаоници који представљају преостале четири стране квадра подударни.



ВЕЖБА 17.	
Наставна јединица	Израчунавање површине квадра
Тип часа	Обрада

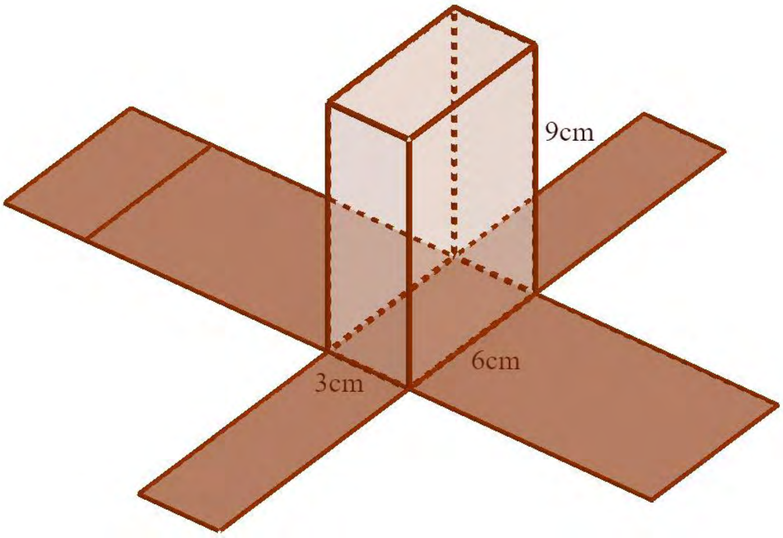
1. Израчунај површину квадра дужине 4 cm, ширине 2 cm и висине 6 cm.

   Ученици могу уз помоћ модела да закључе да се површ квадра састоји од шест правоугаоника. Ти правоугаоници чине мрежу квадра, па да би израчунали површину квадра потребно је да израчунају површину одговарајуће мреже (линк).

   Како странице правоугаоника који чине мрежу одговарају ивицама квадра, то су у дводимензионалном прозору приказане дужине страница тих правоугаоника. Сабирањем мерних бројева површине сваког од шест правоугаоника који представљају стране квадра добија се мерни број површине целог квадра.

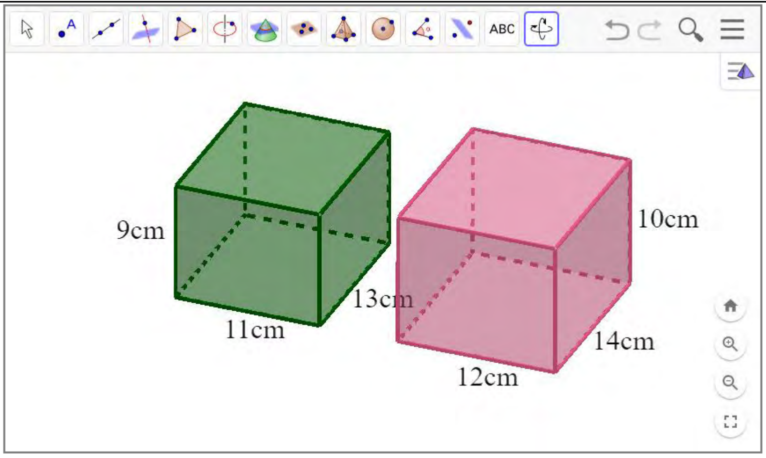
2. Израчунај површину квадра ивице *a* = 6 cm, ивице *b* два пута краће од ивице *a* и ивице *c* три пута дуже од ивице *b*.

   (линк)

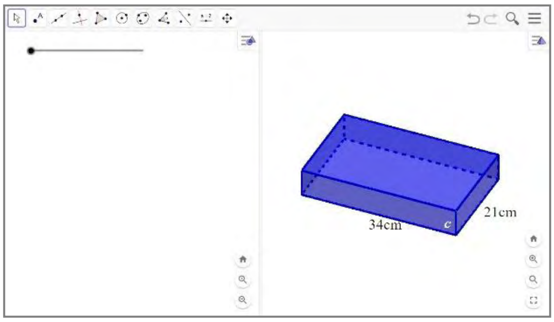
3. Квадар има димензије *a* = 13 cm, *b* = 11 cm и *c* = 9 cm. За колико је површина тог квадра мања од површине квадра чије су ивице за 1 cm дуже од ивица датог квадра?

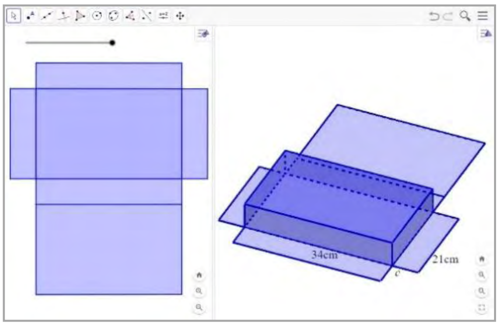
   Уз помоћ модела ученици могу лакше да визуелизују квадре и однос између њихових ивица (линк), док на основу приказа мреже сваког од њих могу закључити које су дужине страница правоугаоника који чине њихове мреже.



4. Ако је површина квадра 2 088 cm^2 и ако је a = 34 cm, b = 21 cm, колика је дужина ивице c?

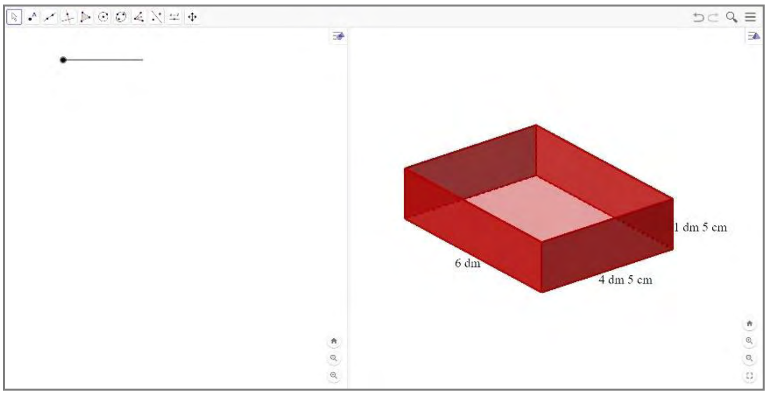
На моделу ученици могу да уоче односе између ивица квадра и закључе површине којих страна квадра могу израчунати на основу дате дужине и ширине (линк), док висину квадра могу одредити када од укупне површине квадра одузму површине тих страна.

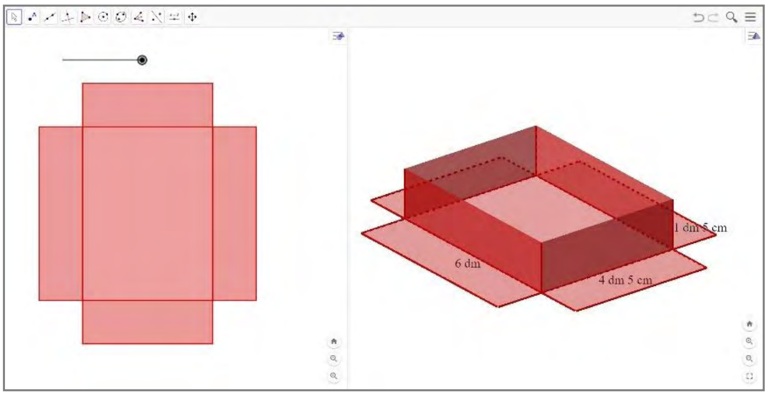




5. Колика је површина шперплоче потребна мајстору да направи кутију без поклопца облика квадра дужине 6 dm, ширине 4 dm 5 cm и висине 1 dm 5 cm?

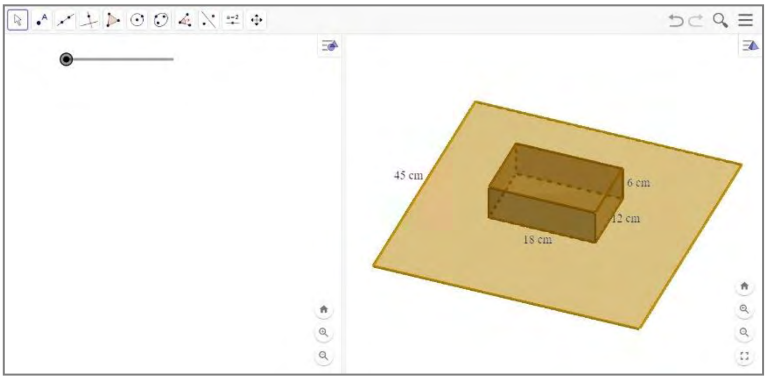
Помоћу модела направљеног у GeoGebra пакету ученици могу да закључе да мрежа квадра који одговара кутији без поклопца садржи пет правоугаоника (линк), односно да приликом израчунавања површине потребне шперплоче треба изоставити површину правоугаоника који одговара горњој страни квадра.

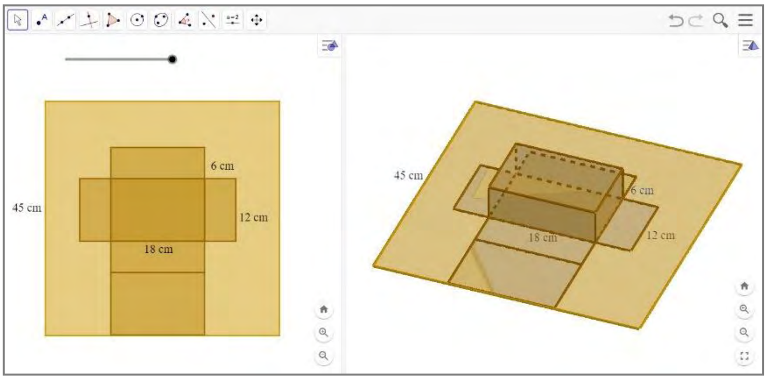




6. Колика површина картона преостане када се од картона облика квадрата странице 45 cm направи кутија облика квадра ивица 18 cm, 12 cm и 6 cm?

   Захваљујући моделу ученици могу да виде квадрат који одговара картону датих димензија и мрежу одговарајућег квадра (линк).



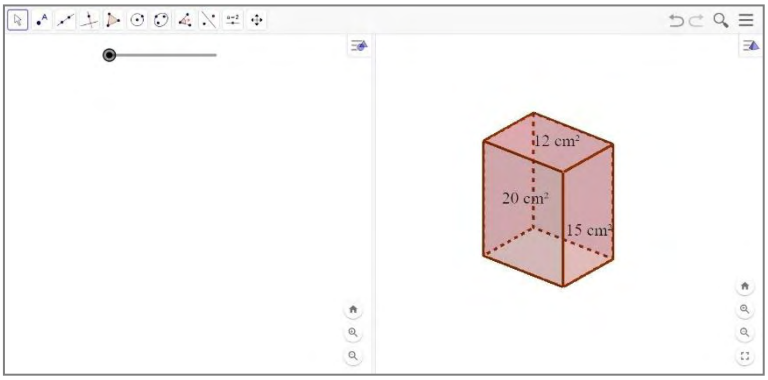


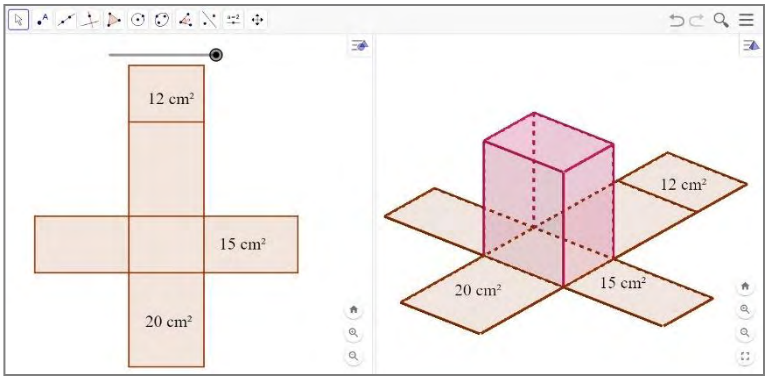
Они закључују да површину преосталог картона могу израчунати одузимањем мерног броја површине квадра од мерног броја површине картона. Како је картон облика квадрата, потребно је за израчунавање његове површине користити образац за површину квадрата.

ВЕЖБА 18.	
Наставна јединица	Израчунавање површине квадра
Тип часа	Утврђивање

1. Колика је површина квадра ако је површина три његове стране 20 cm^2, 15 cm^2 и 12 cm^2?

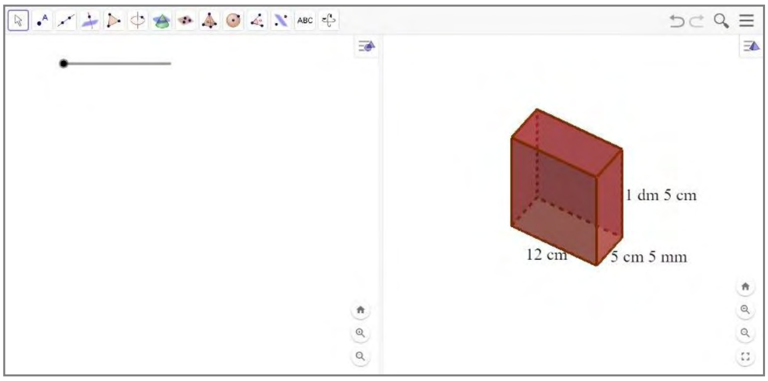
   Уз помоћ модела ученици могу да уоче које стране квадра имају дату површину (линк).

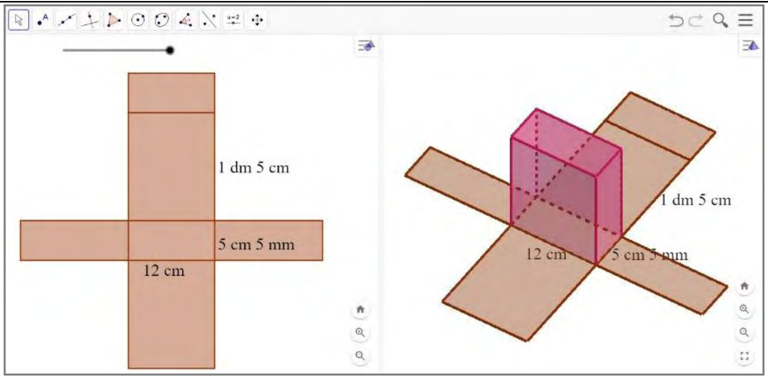




   На основу графичког приказа ученици закључују да су наспрамне стране квадра подударне и имају исту површину, па могу израчунати површину целог квадра.

2. Израчунај површину квадра ако је a = 5 cm 5 mm, b = 12 cm и c = 1 dm 5 cm.

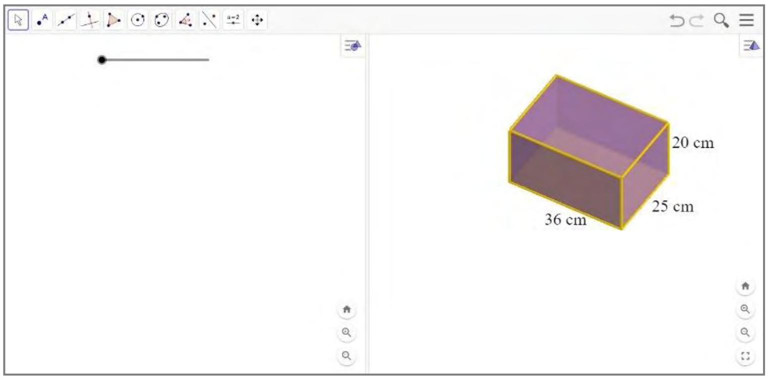


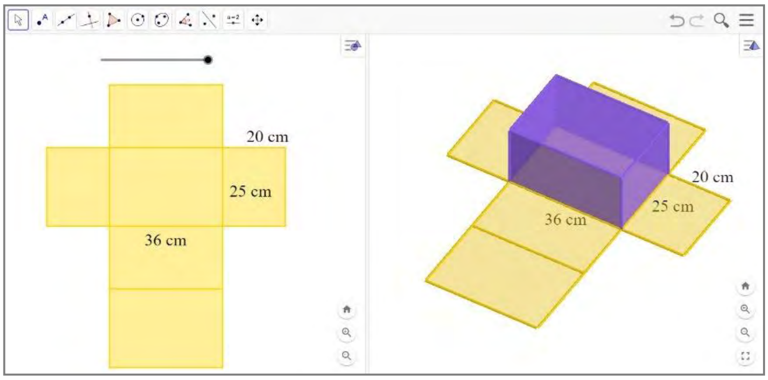


(линк)

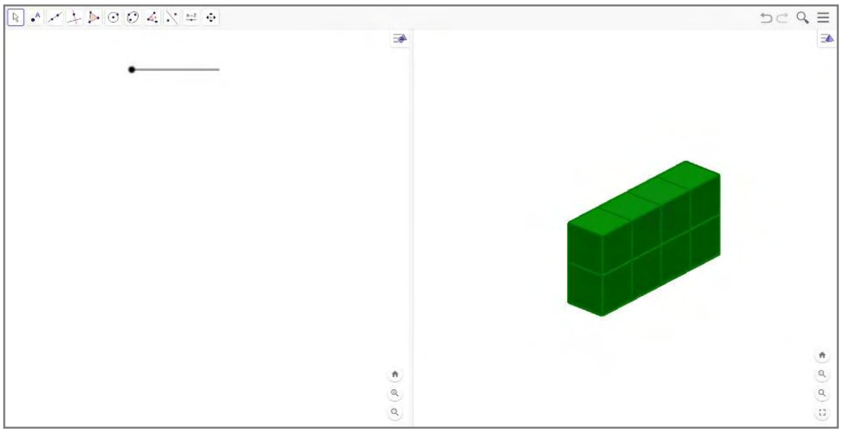
3. Колико је украсног папира потребно за увијање поклона облика квадра чије су ивице 25 cm, 36 cm и 20 cm?

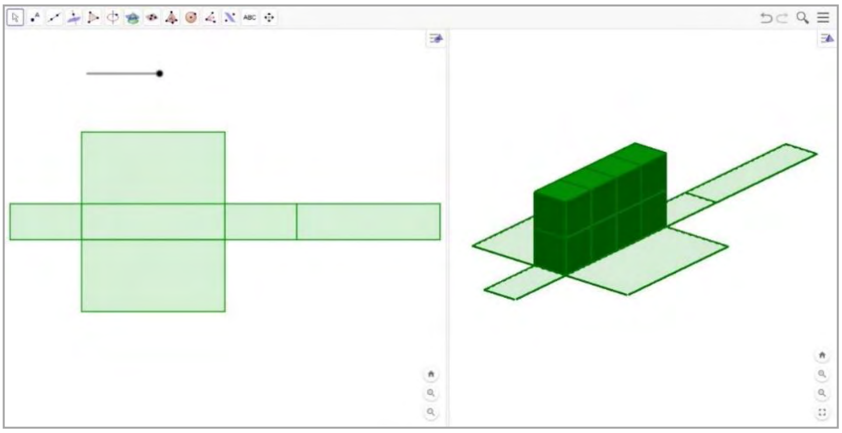
Како је потребно увити све стране поклона, то за израчунавање површине потребног украсног папира ученици треба да израчунају површину самог поклона облика квадра (линк). Како су дате све димензије поклона, ученици лако уочавају њихов однос и на основу тога израчунавају површину украсног папира.





4. Коцке ивица дужине 4 dm поређане су као на слици. Израчунај површину тако насталог тела.

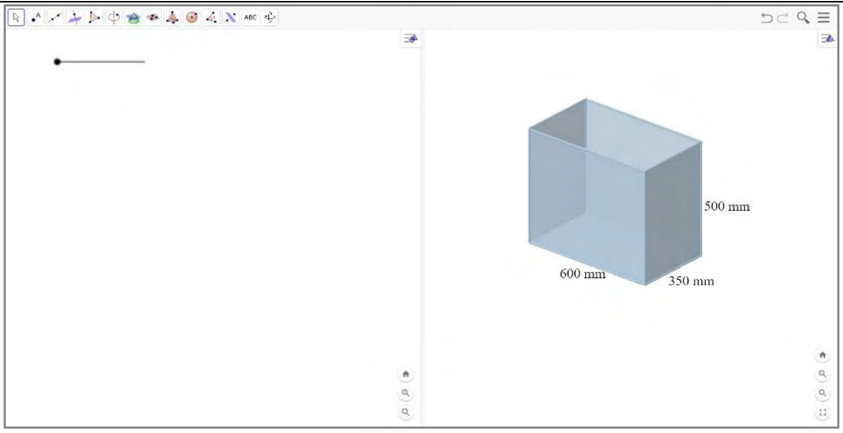


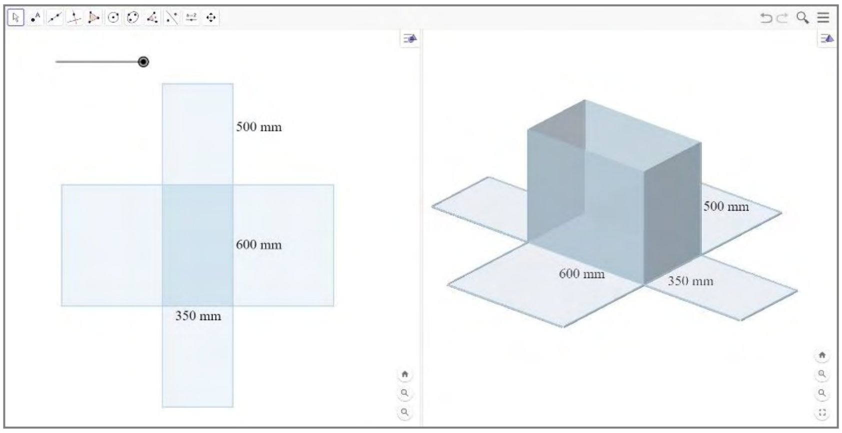


Уз помоћ модела ученици могу видети тродимензионални приказ тела насталог ређањем осам коцки (линк). Тело које том приликом настаје јесте квадар. Ученици могу уочити да ивице коцки формирају ивице квадра, па је дужина квадра једнака дужини четири ивице коцке, ширина квадра одговара дужини једне ивице коцке, док је висина квадра једнака дужини две ивице коцке. У дводимензионалном прозору пакета дат је приказ мреже овако формираног квадра, на основу чега је могуће израчунати његову површину.

5. Колика је површина стакла потребна да би се направио акваријум облика квадра дужине 600 mm, ширине 350 mm и висине 500 mm?

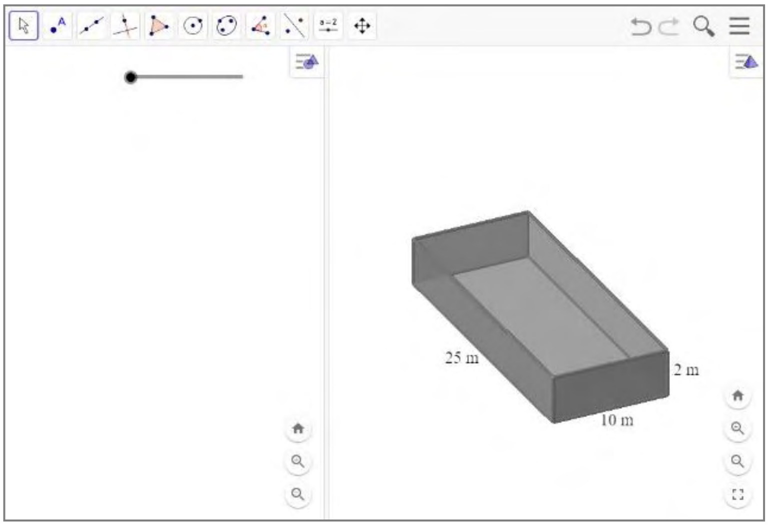
У хеуристичком разговору са ученицима требало би доћи до закључка да акваријум нема поклопац, због чега и модел квадра који одговара датом акваријуму не садржи горњу страну (линк). Из тог разлога, мрежа квадра који одговара акваријуму садржи пет правоугаоника па приликом израчунавања површине потребног стакла треба изоставити површину правоугаоника који одговара горњој страни квадра.

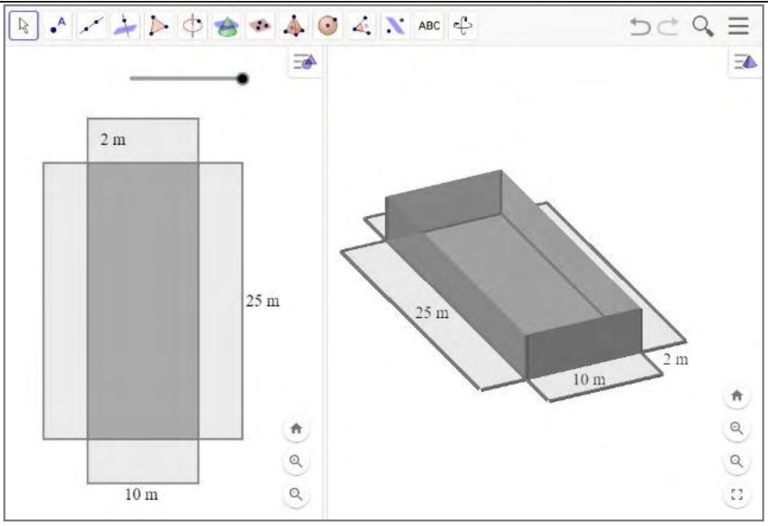




6. Базен облика квадра димензија 25 m, 10 m и 2 m треба поплочати плочицама облика правоугаоника димензија 5 dm и 2 dm. Колико је потребно плочица да би се поплочао овај базен?

   Број плочица потребних за поплочавање базена израчунава се дељењем површине базена површином једне плочице. Као и у претходном задатку, базен има дно и четири бочне стране, због чега и модел квадра који одговара базену не садржи горњу страну (линк). Из тог разлога, мрежа квадра који одговара базену датих димензија садржи пет правоугаоника и приликом израчунавања површине треба изоставити површину правоугаоника који одговара горњој страни квадра.



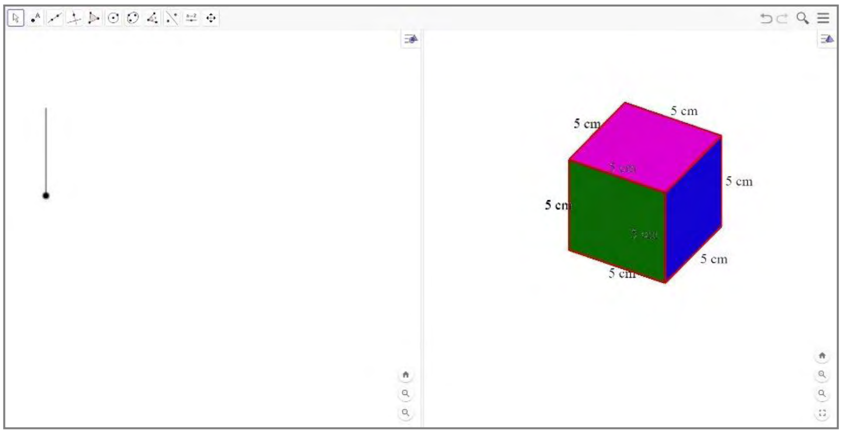


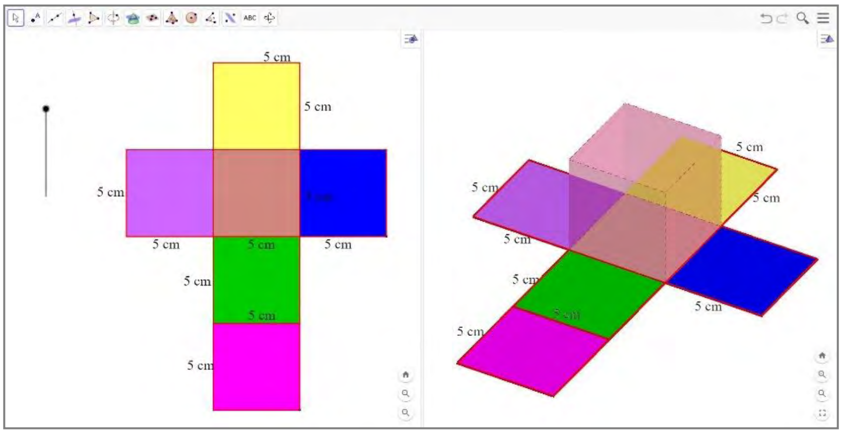
Плочице имају облик правоугаоника па се површина једне плочице израчунава уз помоћ обрасца за површину правоугаоника.

ВЕЖБА 19.	
Наставна јединица	Израчунавање површине коцке
Тип часа	Обрада

1. Израчунај површину коцке дужине ивице 5cm.

   На основу визуелног приказа коцке који омогућава модел направљен у GeoGebra пакету ученици могу да закључе да се површ коцке састоји од шест подударних квадрата (линк), односно квадрати чине мрежу коцке, па да би израчунали површину коцке треба да израчунају површину фигуре која одговара мрежи коцке.

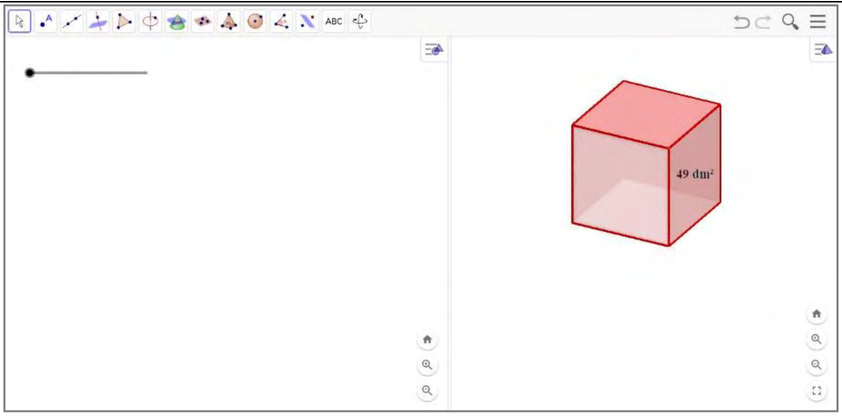


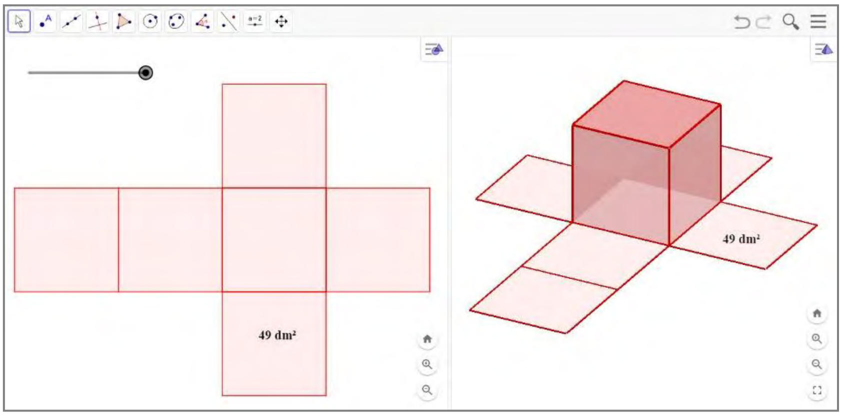


   Странице квадрата који чине мрежу одговарају ивицама коцке, па су у дводимензионалном прозору приказане дужине страница тих квадрата. Сабирањем мерних бројева површине сваког од шест квадрата који представљају стране коцке добија се мерни број површине целе коцке.

2. Површина једне стране коцке је 49 dm^2. Израчунај дужину ивице те коцке. Израчунај површину те коцке.

   Помоћу тродимензионалног приказа ученици могу видети која страна коцке има површину 49 dm^2 (линк).



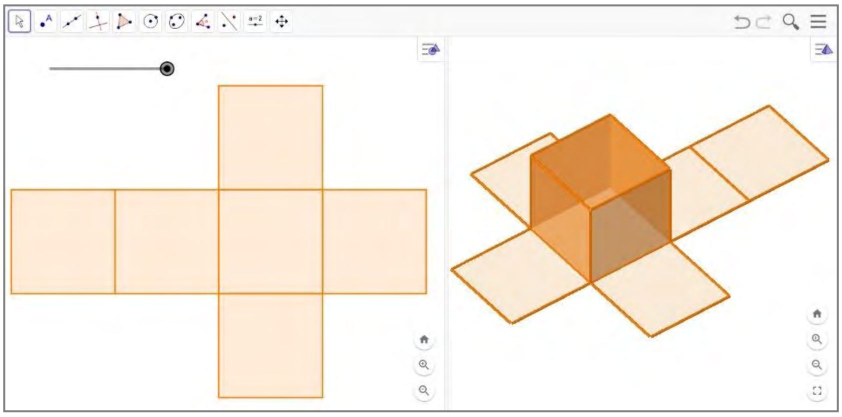


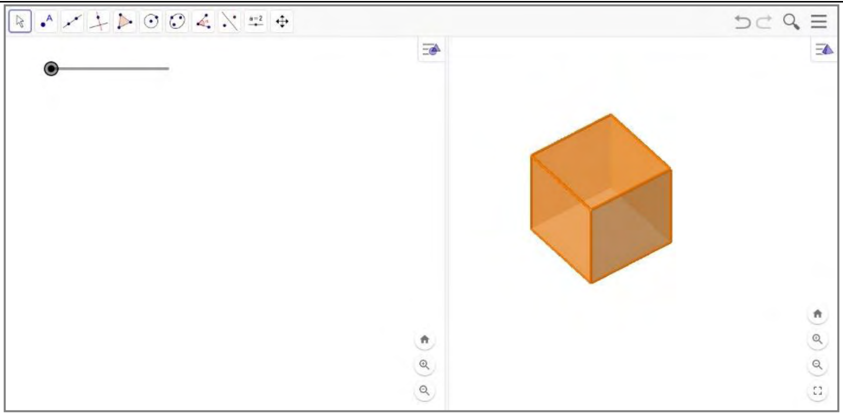
Како је страна коцке квадрат, то и ивица коцке истовремено представља и страницу квадрата. На основу обрасца $P = a \cdot a$ *ученици закључују да је потребно наћи број који помножен самим собом даје мерни број површине квадрата. Дакле, тражени број је мерни број дужине ивице коцке.*

Површину целе коцке могуће је израчунати на два начина: применом обрасца за израчунату дужину ивице, или сабирањем површина шест подударних квадрата који чине површ коцке.

3. Ако је површина коцке 486 m^2, колика је дужина њене ивице?

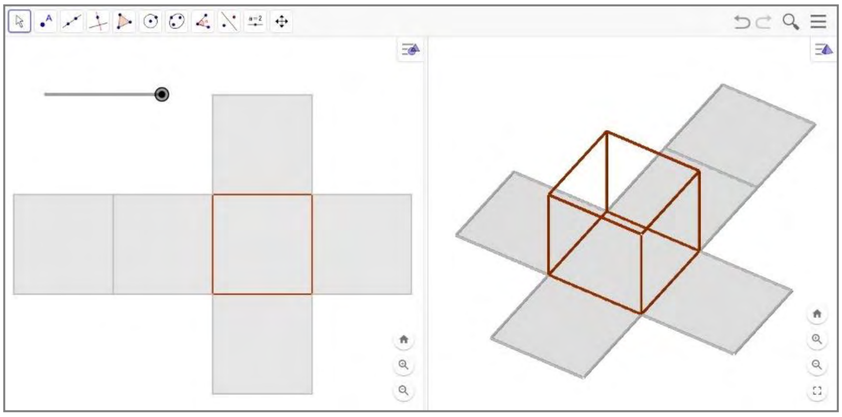
На основу дате мреже површи коцке ученици могу да закључе да се састоји из шест подударних квадрата (линк), и на основу обрасца $P = 6 \cdot a \cdot a$ *израчунају најпре површину једне стране коцке, а затим и дужину ивице коцке.*





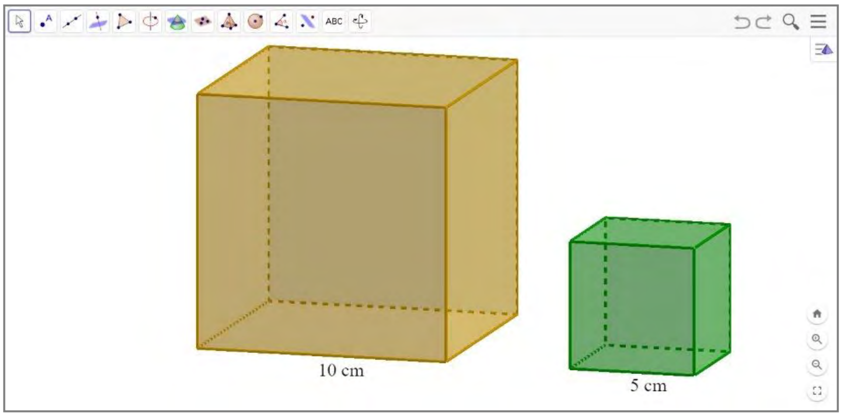
4. Колика је површина коцке ако је збир свих њених ивица 18 dm?

   У тродимензионалном приказу модела коцке ученици могу да уоче ивице коцке, колико их има и да су све једнаке дужине (линк). Дељењем збира свих ивица коцке бројем ивица добија се дужина једне ивице коцке, а након тога на основу мреже коцке могуће је израчунати површину целе коцке.



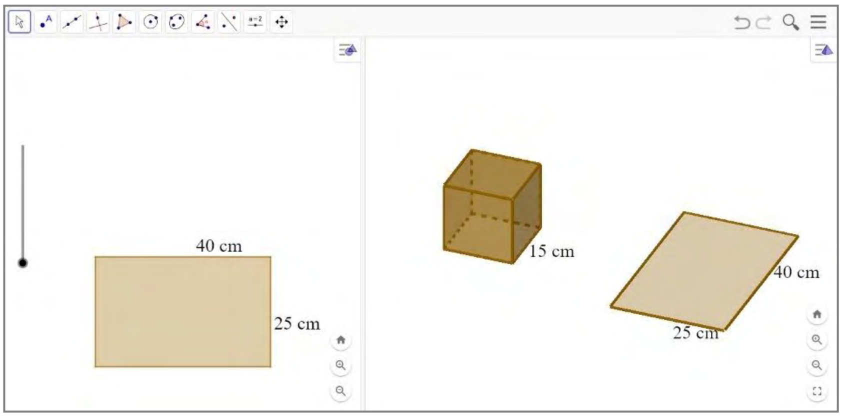
5. За колико се разликују површине две коцке, ако је дужина ивице једне коцке 5 cm, а друге 10 cm?

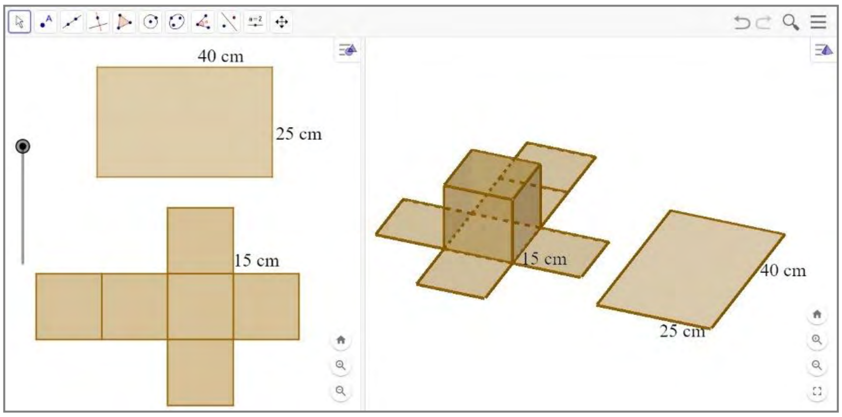
   Модел направљен у GeoGebra пакету даје могућност ученицима да јасније сагледају однос у величинама двеју коцки и створе представу о томе која од коцки има већу површину (линк). Уз помоћ приказа мреже коцки могу израчунати њихове површине.



6. Колика површина картона недостаје да би се од комада картона облика правоугаоника страница 40 cm и 25 cm направила кутија за накит облика коцке ивице 15 cm?

На основу тродимензионалног приказа ученици могу уочити однос коцке која одговара кутији коју треба направити и комада картона од којег треба направити ту кутију (линк). Уз помоћ дводимензионалног приказа ученици могу посматрати однос мреже квадра који треба направити и површи која одговара комаду картона датих димензија.



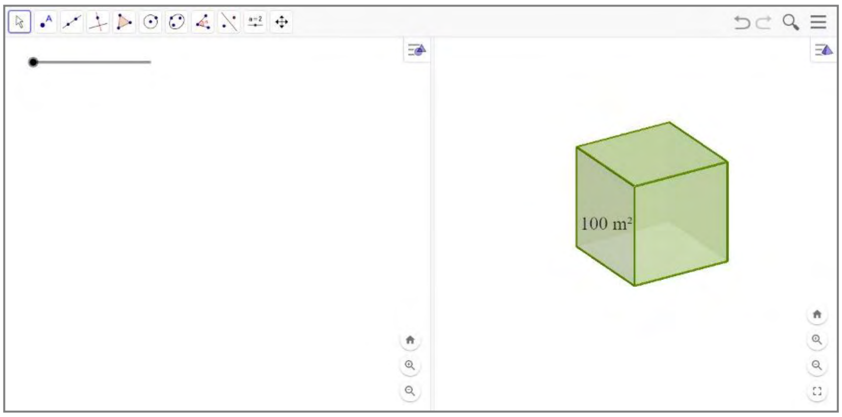


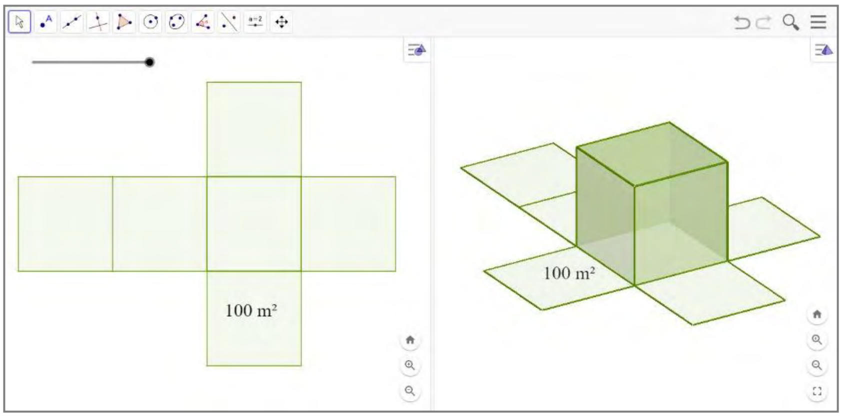
Ученици закључују да површину картона која недостаје да би се направила кутија могу израчунати одузимањем површине картона који је на располагању од површине квадра.

ВЕЖБА 20.	
Наставна јединица	Израчунавање површине коцке
Тип часа	Утврђивање

1. Површина једне стране коцке је 100 m^2. Израчунај површину коцке и изрази је у арима.

   Помоћу тродимензионалног приказа ученици могу да виде страну коцке која има дату површину, док дводимензионални приказ олакшава ученицима да уоче односе међу странама коцке ([линк]).

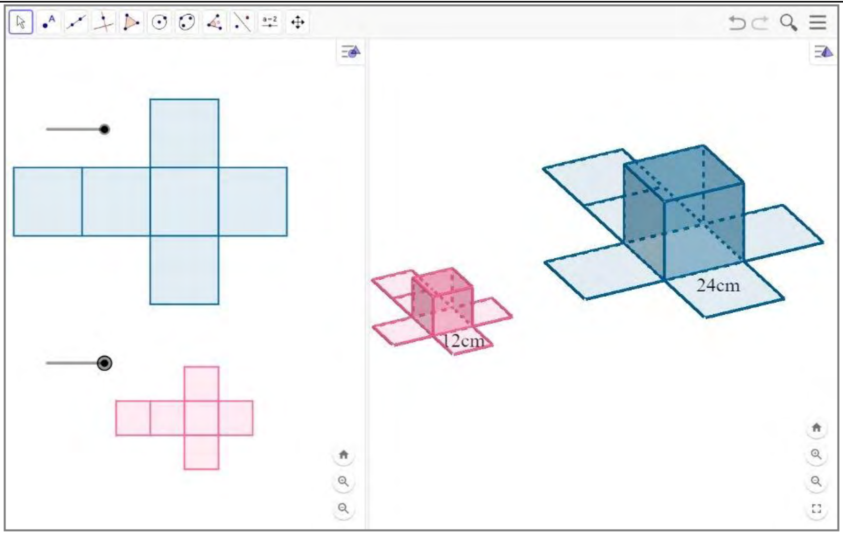




   Површину целе коцке могуће је израчунати сабирањем површина шест подударних квадрата који чине површ коцке или на основу површине једне стране коцке одредити дужину ивице коцке, а затим применом обрасца израчунати површину коцке.

2. Дата је коцка дужине ивице 12 cm. Колико пута ће се увећати површина коцке ако се дужина ивице коцке увећа два пута?

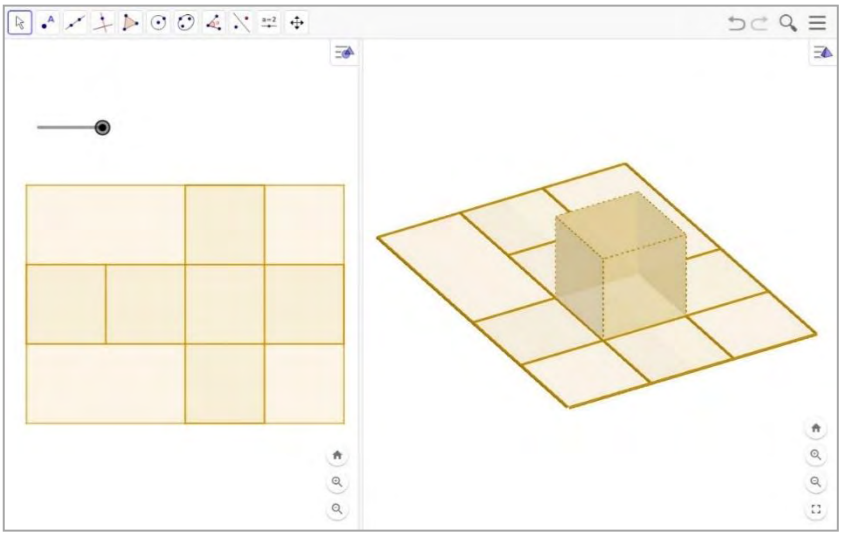
   Модел направљен у GeoGebra пакету омогућава ученицима да посматрају дату коцку и коцку са ивицом два пута дужом ([линк]). Како би лакше могли да закључе колико пута се увећала површина коцке, у дводимензионалном делу пакета представљене су и мреже обе коцке.



Израчунавањем површина обе коцке ученици закључују да се површина увећала четири пута.

3. Од комада картона површине 195 dm^2 изрезана је мреже коцке, те је отпад био површине 45 dm^2. Израчунај ивицу те коцке.

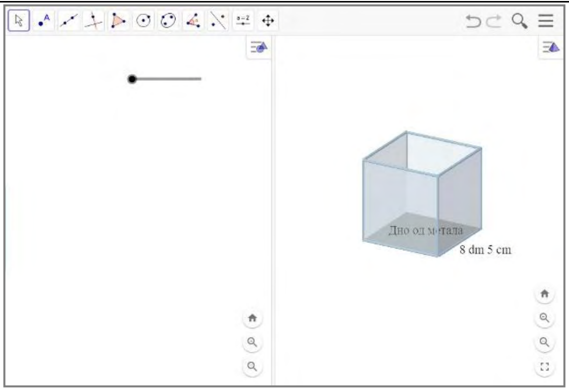
   У GeoGebra пакету приказан је правоугаоник који одговара комаду картона од којег је изрезана мрежа коцке (линк).

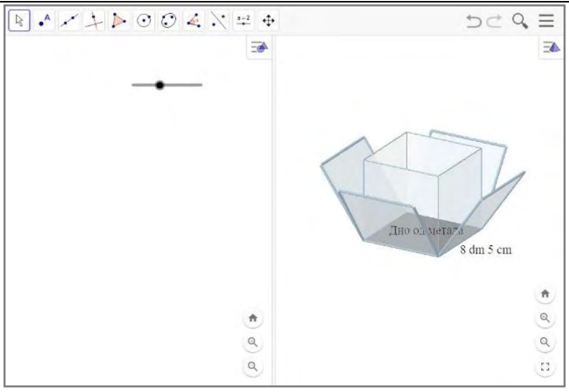


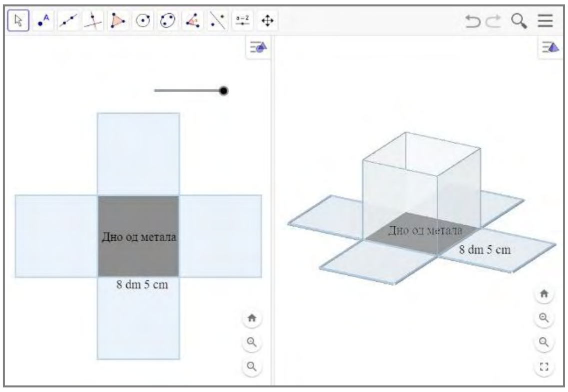
Одузимањем површине дела који је отпао приликом резања мреже од укупне површине картона добија се површина фигуре која одговара мрежи коцке. Даље, применом обрасца за израчунавање површине коцке ученици најпре одређују површину једне стране коцке, а затим и дужину њене ивице.

4. Колико је стакла потребно за прављење акваријума облика коцке ивице 8 dm 5 cm ако је дно акваријума метално?

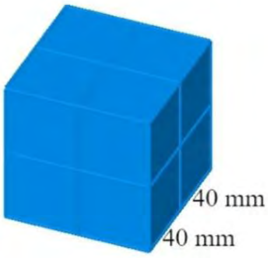
   У хеуристичком разговору са ученицима требало би да дођу до закључка да акваријум нема поклопац, као и да је на основу услова задатка дно акваријума од метала, због чега и модел који одговара датом акваријуму не садржи горњу и доњу страну (линк). Из тог разлога, мрежа коцке која одговара акваријуму садржи четири подударна квадрата па приликом израчунавања површине потребног стакла треба узети у обзир ову чињеницу.



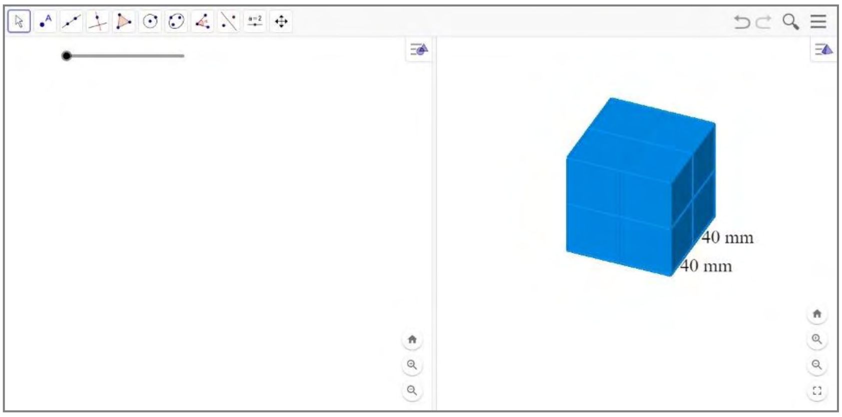


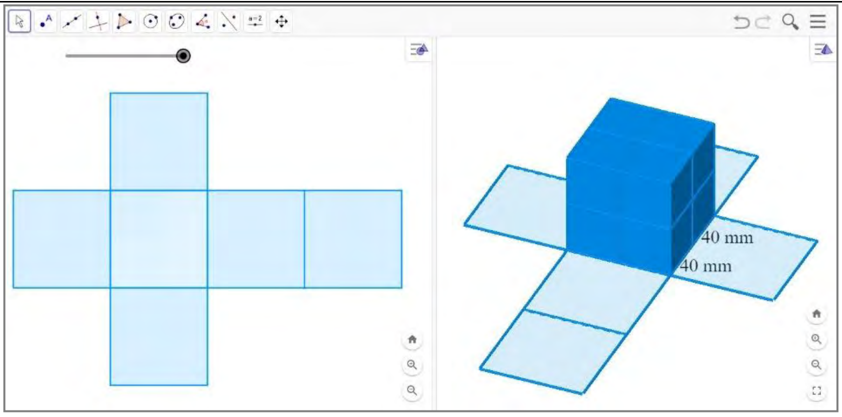


5. Осам коцки ивица дужине 40 mm поређане су тако да граде велику коцку као на слици. Колико износи површина велике коцке?



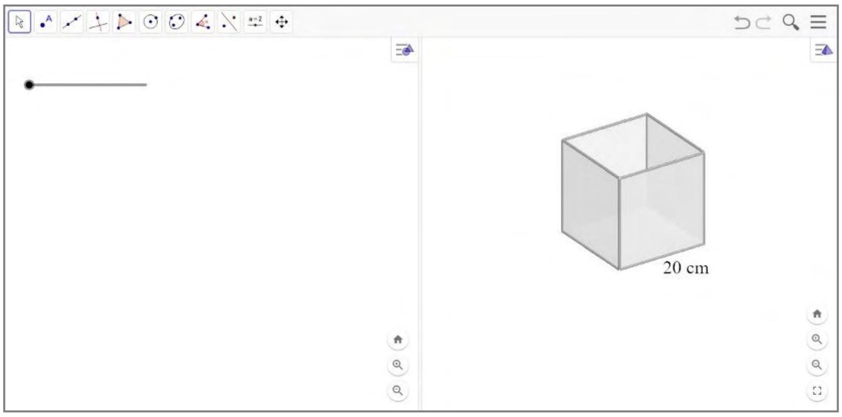
Уз помоћ тродимензионалног модела ученици могу да визуелизују велику коцку насталу ређањем осам мањих коцки (линк). Могу уочити да ивице малих коцки формирају и ивице велике коцке, па је дужина ивице велике коцке једнака дужини две ивице малих коцки. У дводимензионалном прозору пакета дат је и приказ мреже овако формиране коцке.

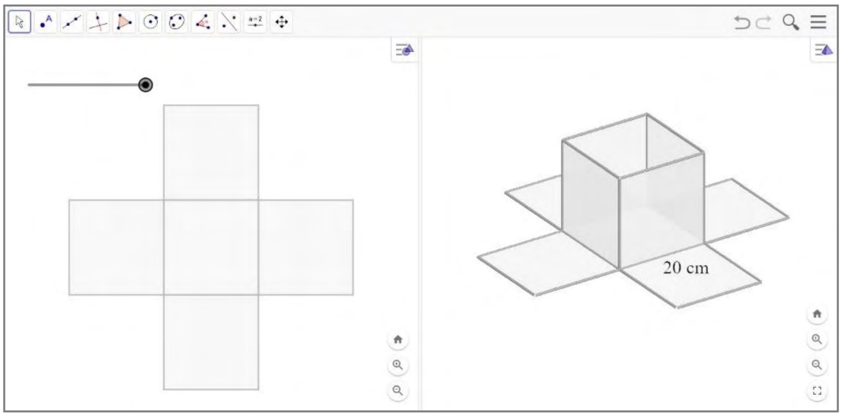




6. Кутију облика коцке без поклопца са ивицом дужине 20 cm треба офарбати. Ако се за фарбање 1 dm^2 потроши 50 g фарбе, колико је потребно припремити фарбе за фарбање целе кутије?

Како би се одредила количина фарбе која је потребна, најпре треба израчунати површину површи коју треба офарбати. На основу захтева задатка кутија нема поклопац, односно приказани модел коцке не садржи горњу страну. Ученици закључују да се мрежа састоји од пет подударних квадрата са страницама које одговарају дужини ивица коцке (линк).



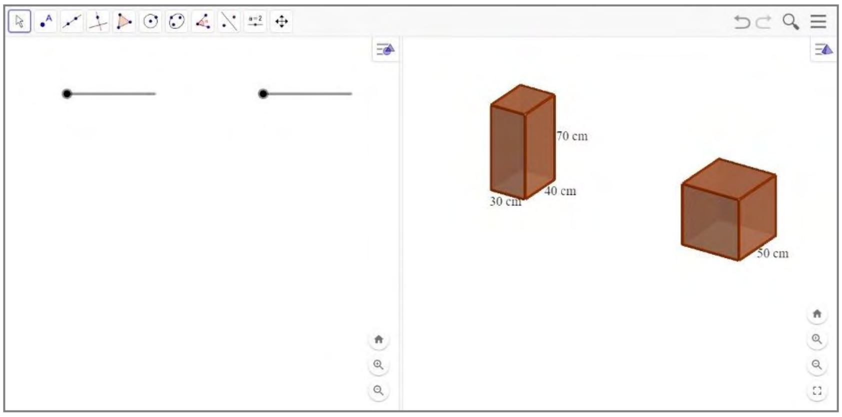


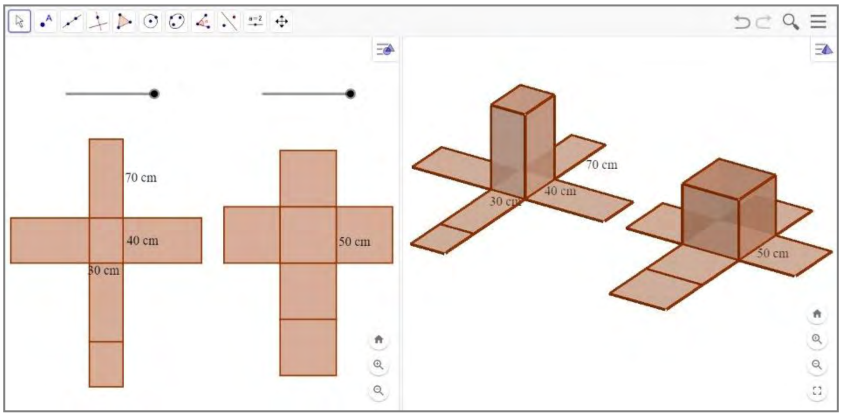
Након што израчунају површину кутије облика коцке потребно је да добијену величину преведу у квадратне дециметре, а затим помноже количином фарбе која се утроши за фарбање једног квадратног дециметра.

ВЕЖБА 21.	
Наставна јединица	Израчунавање површине квадра и коцке
Тип часа	Утврђивање

1. Музеј је наручио два дрвена ормана за одлагање експоната. Орман облика квадра има димензије 30 cm, 40 cm и 70 cm, док орман облика коцке има ивицу дужине 50 cm. Израчунај колико укупно дрвета је потребно за израду оба ормана.

   Уз помоћ модела ученици могу лакше визуелизовати ормане облика квадра и коцке (линк).



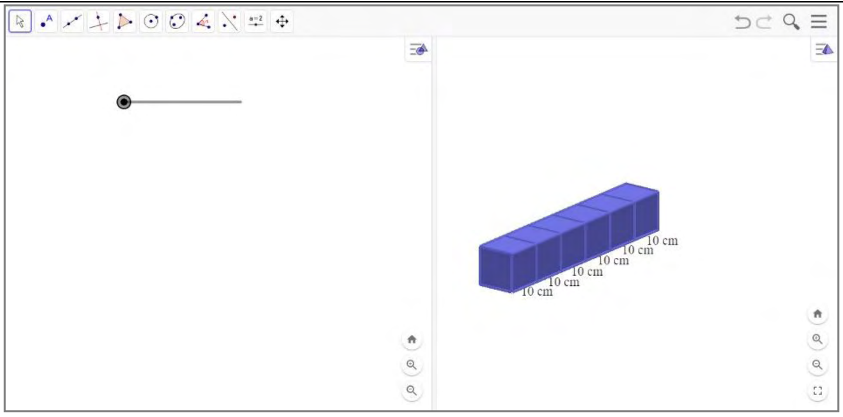


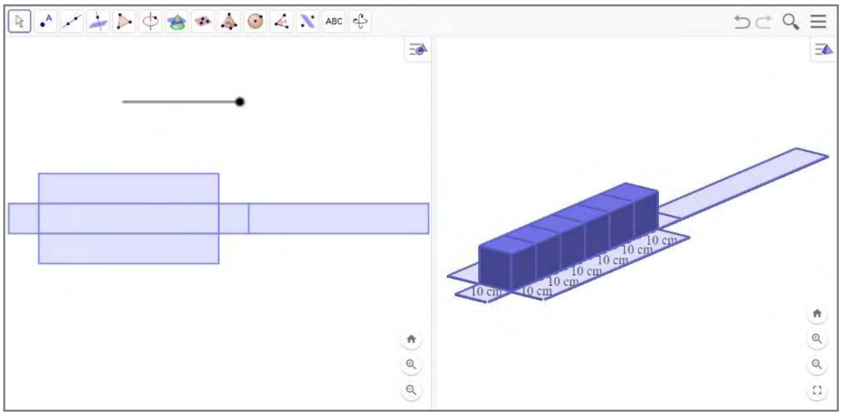
   Како би израчунали укупну површину дрвета потребну за израду ормана, потребно је најпре израчунати површине квадра и коцке датих димензија на основу њихових мрежа, а затим добијене мерне бројеве сабрати.

2. Квадар је састављен од шест једнаких коцки ивице 10 cm. Колика је површина тог квадра?

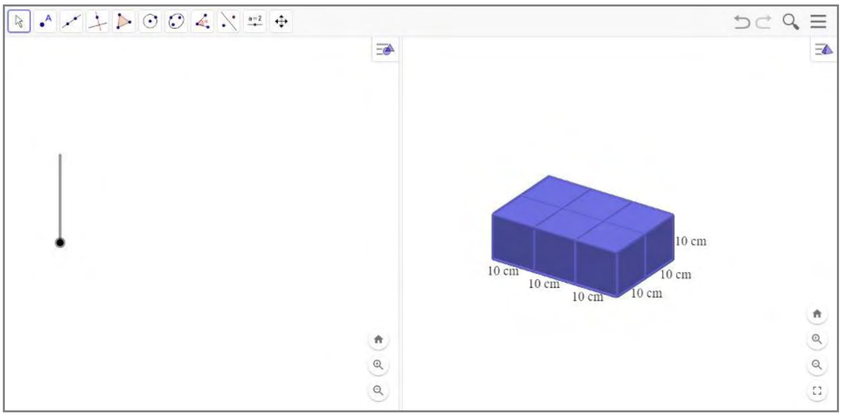
   С обзиром на то да уз задатак није приказана слика, задатак има два тачна решења па треба размотрити оба.

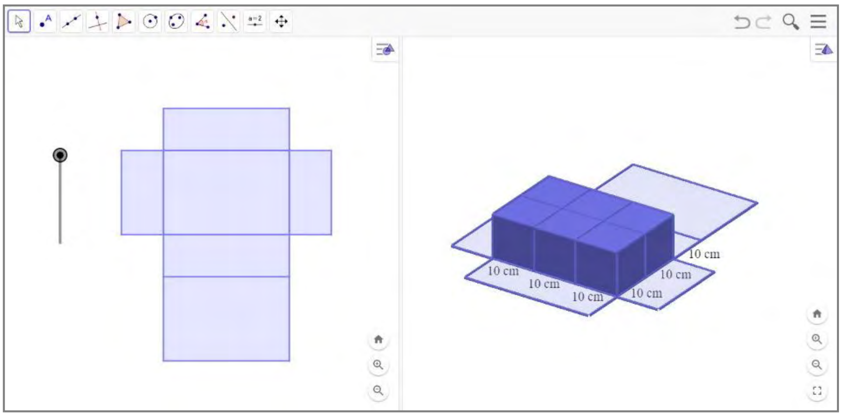
   Једно решење јесте да коцке буду поређане у низ формирајући квадар дужине 60 cm, ширине 10 cm и висине 10 cm (линк).





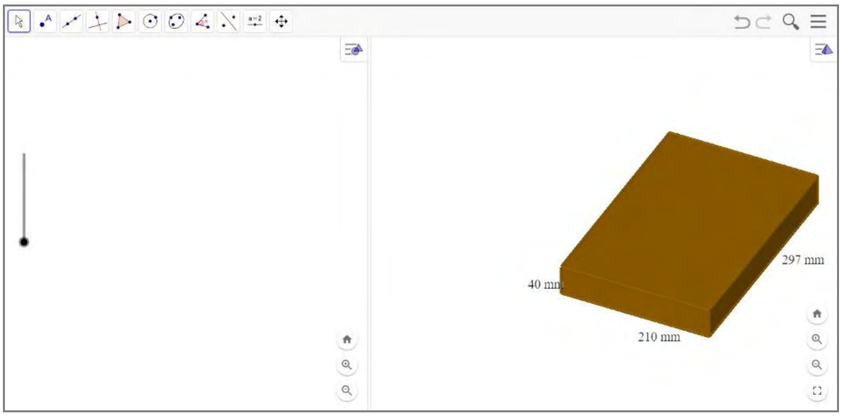
Друго решење јесте да коцке буду поређане у два низа формирајући квадар дужине 30 cm, ширине 20 cm и висине 10 cm ([линк](#)).

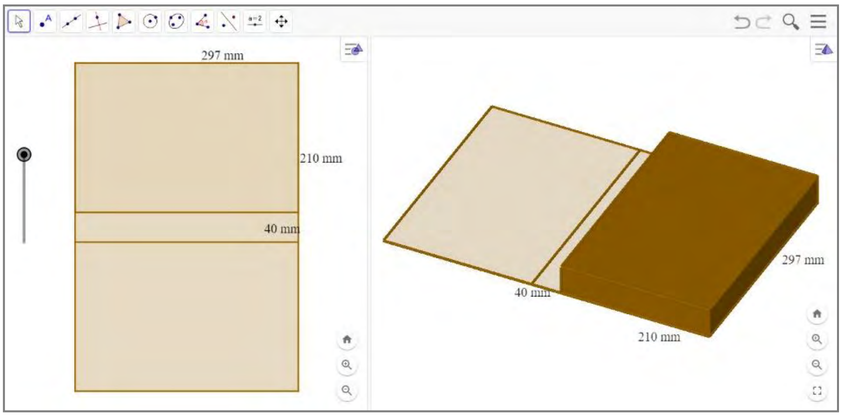




3. Књигу облика квадра треба укоричити. Израчунај колико је картона потребно да би се направиле корице ако су димензије књиге 40 mm, 210 mm и 297 mm, а књига се листа по најдужој ивици.

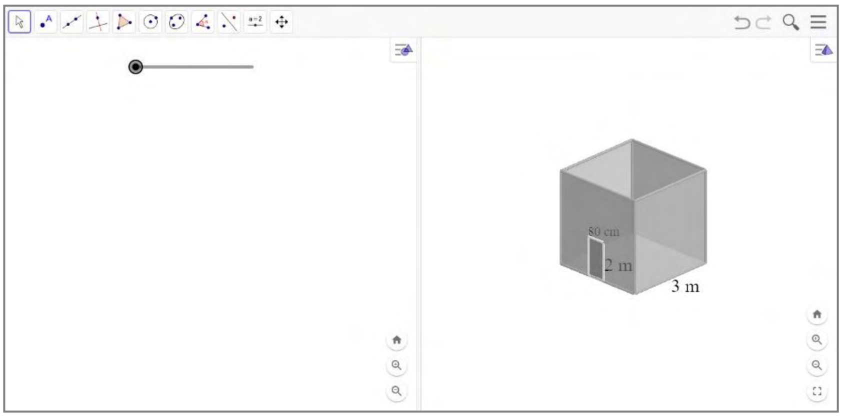
   Књигу треба укоричити са горње, доње и дуже бочне стране, па се мрежа одговарајућег квадра састоји из три правоугаоника (линк). Израчунавањем њихових површина добија се количина картона која је потребна за коричење књиге.

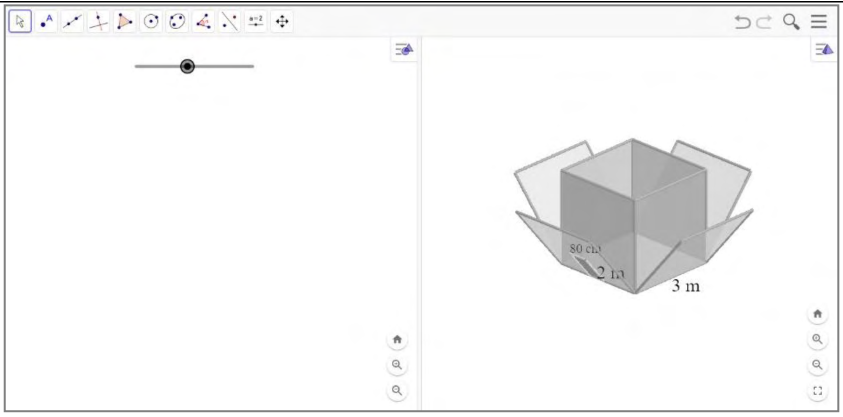


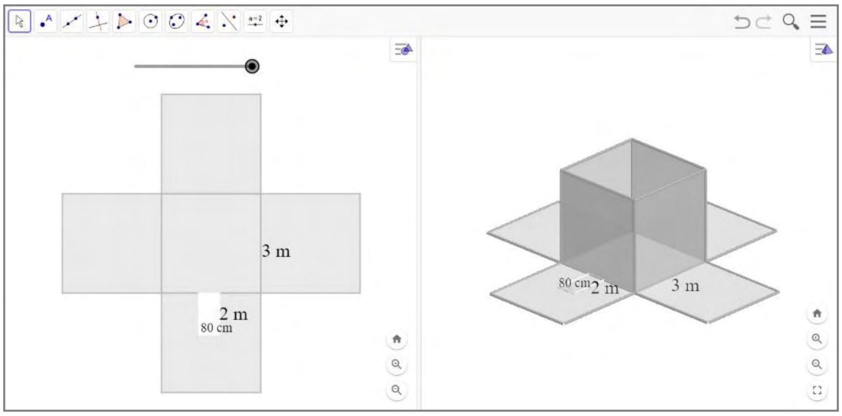


4. Зидове и под оставе облика коцке дужине 3 m треба поплочати керамичким плочицама. Колико је плочица облика квадрата странице 20 cm потребно да се поплоча остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2 m и широка 80 cm?

   Број плочица потребних за поплочавање израчунава се дељењем површине дела оставе који треба поплочати површином једне плочице. Не треба поплочати плафон оставе, због чега модел коцке не садржи горњу страну (линк).



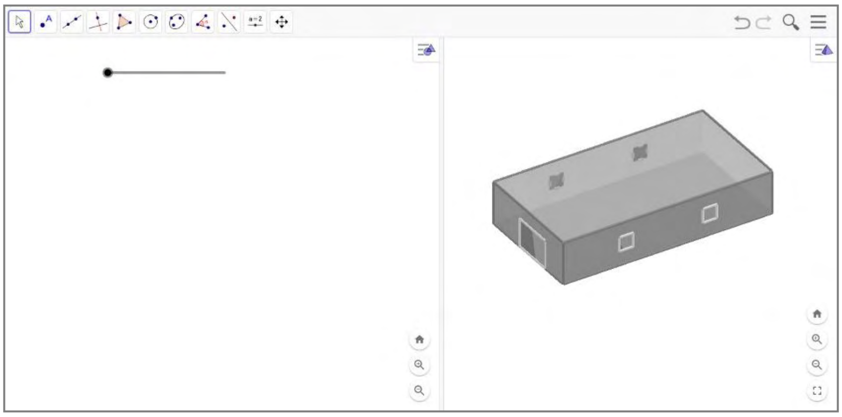


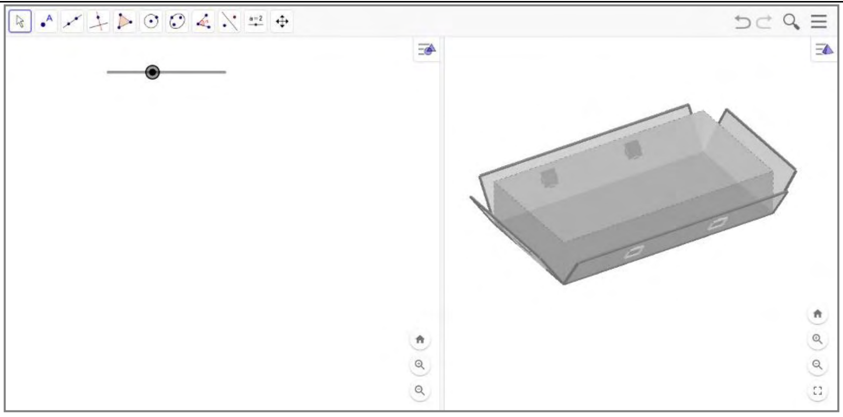


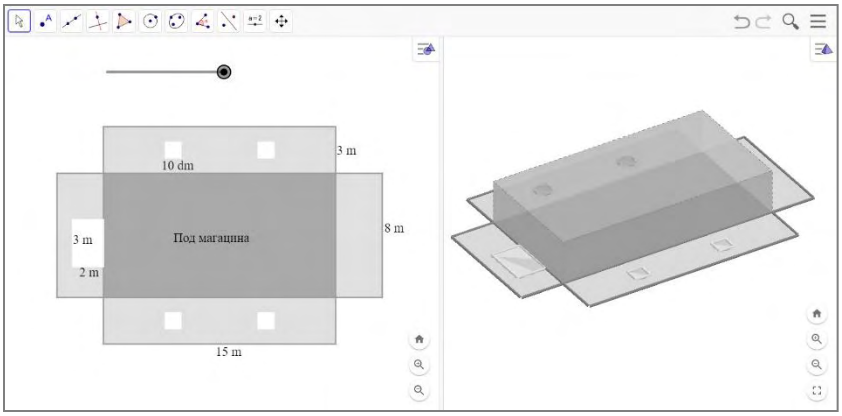
Мрежа коцке која одговара остави датих димензија садржи пет подударних квадрата и приликом израчунавања површине треба изоставити површину квадрата који одговара горњој страни коцке. Након израчунавања површине треба одузети и површину врата пошто се тај део оставе такође не поплочава. Плочице имају облик квадрата па се површина једне плочице израчунава уз помоћ обрасца за површину квадрата.

5. Зидове магацина треба споља окречити. Његове димензије су 15 m, 8 m и 3 m. На зидовима магацина налазе се једна врата висока 2 m и широка 3 m и четири иста прозора облика квадрата димензија 10 dm. Израчунај површину зидова магацина коју треба окречити.

   Према условима задатка треба окречити зидове магацина, па приликом израчунавања површине зидова које треба окречити треба изоставити плафон и под магацина, односно мрежа квадра који представља модел садржи четири правоугаоника које чине бочне стране квадра (линк).







Површину бочних страна квадра треба умањити за укупну површину четири прозора и површину коју захватају врата магацина, пошто се тај део не кречи.

ПРИЛОГ 9, 10, 11, 12. СТАТИСТИЧКА ИЗРАЧУНАВАЊА

ПРИЛОГ 9. Нормалност расподеле иницијалног, финалног тестирања и ретеста знања

Иницијално тестирање

Descriptives

	Група			Statistic	Std. Error
Иницијално тестирање	Експериментална група	Mean		45,0218	1,80549
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	41,4407	
			Upper Bound	48,6030	
		5% Trimmed Mean		45,2636	
		Median		45,9200	
		Variance		335,758	
		Std. Deviation		18,32371	
		Minimum		6,00	
		Maximum		77,00	
		Range		71,00	
		Interquartile Range		26,25	
		Skewness		-0,242	0,238
		Kurtosis		-0,742	0,472
	Контролна група	Mean		43,2863	1,52386
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	40,2640	
			Upper Bound	46,3085	
		5% Trimmed Mean		43,5563	
		Median		43,5000	
		Variance		241,505	
		Std. Deviation		15,54042	
		Minimum		5,00	
		Maximum		76,00	
		Range		71,00	
		Interquartile Range		20,17	
		Skewness		-0,303	0,237
		Kurtosis		-0,330	0,469

Финално тестирање

Descriptives

	Група			Statistic	Std. Error
Финално тестирање	Експериментална група	Mean		55,1068	2,55568
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	50,0376	
			Upper Bound	60,1760	
		5% Trimmed Mean		56,7853	
		Median		64,0000	
		Variance		672,743	
		Std. Deviation		25,93730	
		Minimum		0,00	
		Maximum		80,00	
		Range		80,00	
		Interquartile Range		32,00	
		Skewness		-1,069	0,238
		Kurtosis		0,010	0,472
	Контролна група	Mean		41,8462	1,87699
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	38,1236	
			Upper Bound	45,5687	
		5% Trimmed Mean		42,3483	
		Median		45,0000	

		Variance		366,403	
		Std. Deviation		19,14166	
		Minimum		0,00	
		Maximum		80,00	
		Range		80,00	
		Interquartile Range		18,75	
		Skewness		-0,681	0,237
		Kurtosis		0,267	0,469

Ретест знања

Descriptives

	Група			Statistic	Std. Error
Ретест	Експериментална група	Mean		48,9806	1,45593
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	46,0927	
			Upper Bound	51,8684	
		5% Trimmed Mean		49,9180	
		Median		51,0000	
		Variance		218,333	
		Std. Deviation		14,77609	
		Minimum		,00	
		Maximum		80,00	
		Range		80,00	
		Interquartile Range		15,00	
		Skewness		-1,144	,238
		Kurtosis		1,682	,472
	Контролна група	Mean		33,1731	1,79709
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	29,6090	
			Upper Bound	36,7372	
		5% Trimmed Mean		32,8718	
		Median		35,0000	
		Variance		335,873	
		Std. Deviation		18,32683	
		Minimum		,00	
		Maximum		80,00	
		Range		80,00	
		Interquartile Range		25,00	
		Skewness		,095	,237
		Kurtosis		-,467	,469

ПРИЛОГ 10. Табеле са коригованим средњим вредностима (пол)

Estimated Marginal Means

1. Група

Dependent Variable: Финално тестирање

Група	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
			Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	54,729[a]	2,180	50,430	59,027
Контролна група	41,945[a]	2,203	37,601	46,288

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values Иницијално тестирање = 44,1499.

2. Пол

Dependent Variable: Финално тестирање

Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
			Lower Bound	Upper Bound
Мушки	46,237[a]	2,300	41,701	50,772
Женски	50,437[a]	2,076	46,343	54,530

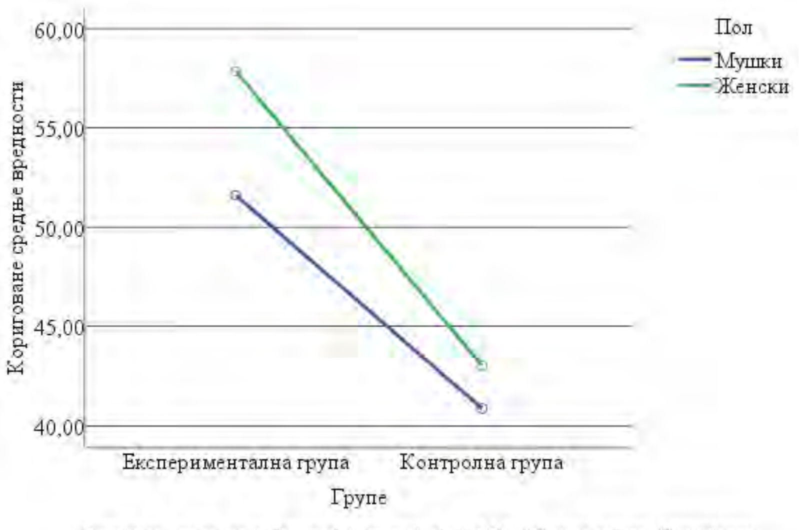
a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1499.

3. Група * Пол

Dependent Variable: Финално тестирање

Група	Пол	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
				Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Мушки	51,603[a]	3,126	45,439	57,768
	Женски	57,854[a]	3,038	51,865	63,844
Контролна група	Мушки	40,870[a]	3,379	34,207	47,533
	Женски	43,019[a]	2,830	37,438	48,599

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1499.



Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1499

ПРИЛОГ 11. Табеле са коригованим средњим вредностима (оцена из математике)

Estimated Marginal Means

1. Група

Dependent Variable: Финално тестирање

			95% Confidence Interval	
Група	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	46,862[a]	3,536	39,889	53,834
Контролна група	37,567[a]	3,064	31,524	43,610

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1499.

2. Оцена

Dependent Variable: Финално тестирање

			95% Confidence Interval	
Оцена	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Довољан (2)	33,021[a]	6,802	19,607	46,435
Добар (3)	40,238[a]	5,206	29,972	50,504
Врлодобар (4)	42,129[a]	3,278	35,665	48,593
Одличан (5)	53,468[a]	2,094	49,339	57,598

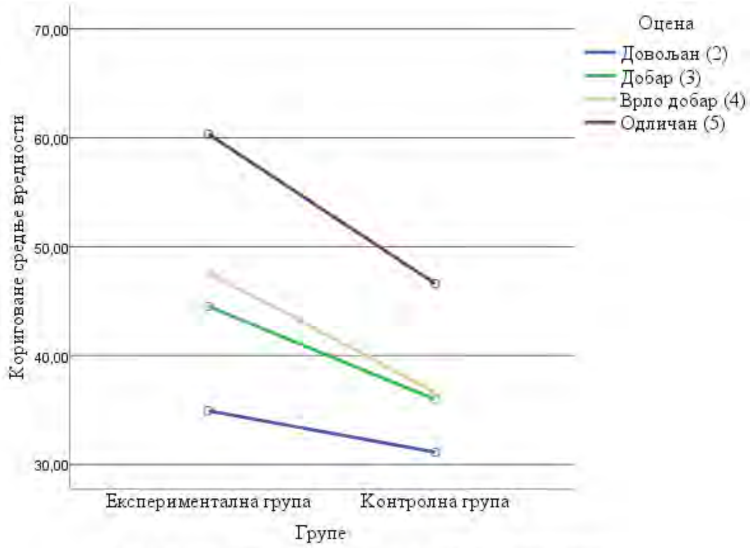
a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1499.

3. Група * Оцена

Dependent Variable: Финално тестирање

				95% Confidence Interval	
Група	Оцена	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Довољан (2)	34,926[a]	10,165	14,880	54,971
	Добар (3)	44,518[a]	7,490	29,747	59,289
	Врлодобар (4)	47,658[a]	4,756	38,280	57,036
	Одличан (5)	60,345[a]	2,828	54,768	65,922
Контролна група	Довољан (2)	31,117[a]	8,421	14,511	47,722
	Добар (3)	35,958[a]	6,955	22,244	49,673
	Врлодобар (4)	36,600[a]	4,288	28,145	45,055
	Одличан (5)	46,592[a]	2,880	40,913	52,271

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1499.



Covariates appearing in the model are evaluated at the following values:
Иницијално тестирање = 44,1499

ПРИЛОГ 12. Табеле са коригованим средњим вредностима (општи успех)

Estimated Marginal Means

1. Група

Dependent Variable: Финално тестирање

			95% Confidence Interval	
Група	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	44,201[a]	7,117	30,167	58,236
Контролна група	33,996[a]	7,904	18,409	49,582

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1486.

2. Општи успех

Dependent Variable: Финално тестирање

			95% Confidence Interval	
Општи успех	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Довољан	29,838[a]	15,626	0,978	60,653
Добар	34,437[a]	13,543	7,730	61,144
Врлодобар	41,632[a]	4,154	33,441	49,823
Одличан	50,487[a]	1,748	47,040	53,934

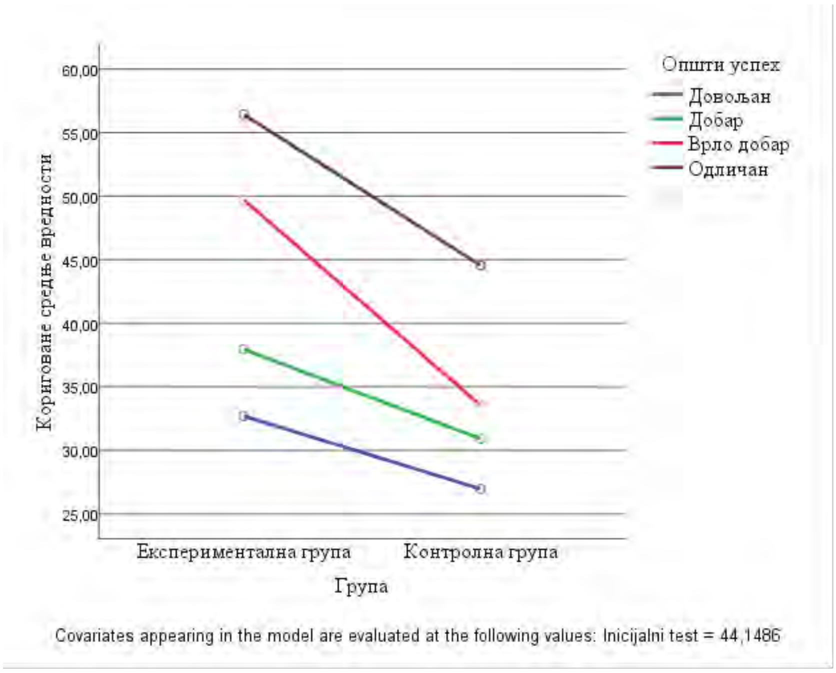
a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1486.

3. Група * Општи успех

Dependent Variable: Финално тестирање

				95% Confidence Interval	
Група	Општи успех	Mean	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
Експериментална група	Довољан	32,702[a]	22,129	-10,936	76,340
	Добар	37,951[a]	15,734	6,924	68,979
	Врлодобар	49,723[a]	6,094	37,705	61,741
	Одличан	56,429[a]	2,411	51,674	61,184
Контролна група	Довољан	26,974[a]	21,925	-16,263	70,211
	Добар	30,923[a]	21,924	-12,312	74,157
	Врлодобар	33,541[a]	5,091	23,501	43,582
	Одличан	44,545[a]	2,461	39,692	49,397

a. Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Иницијално тестирање = 44,1486.



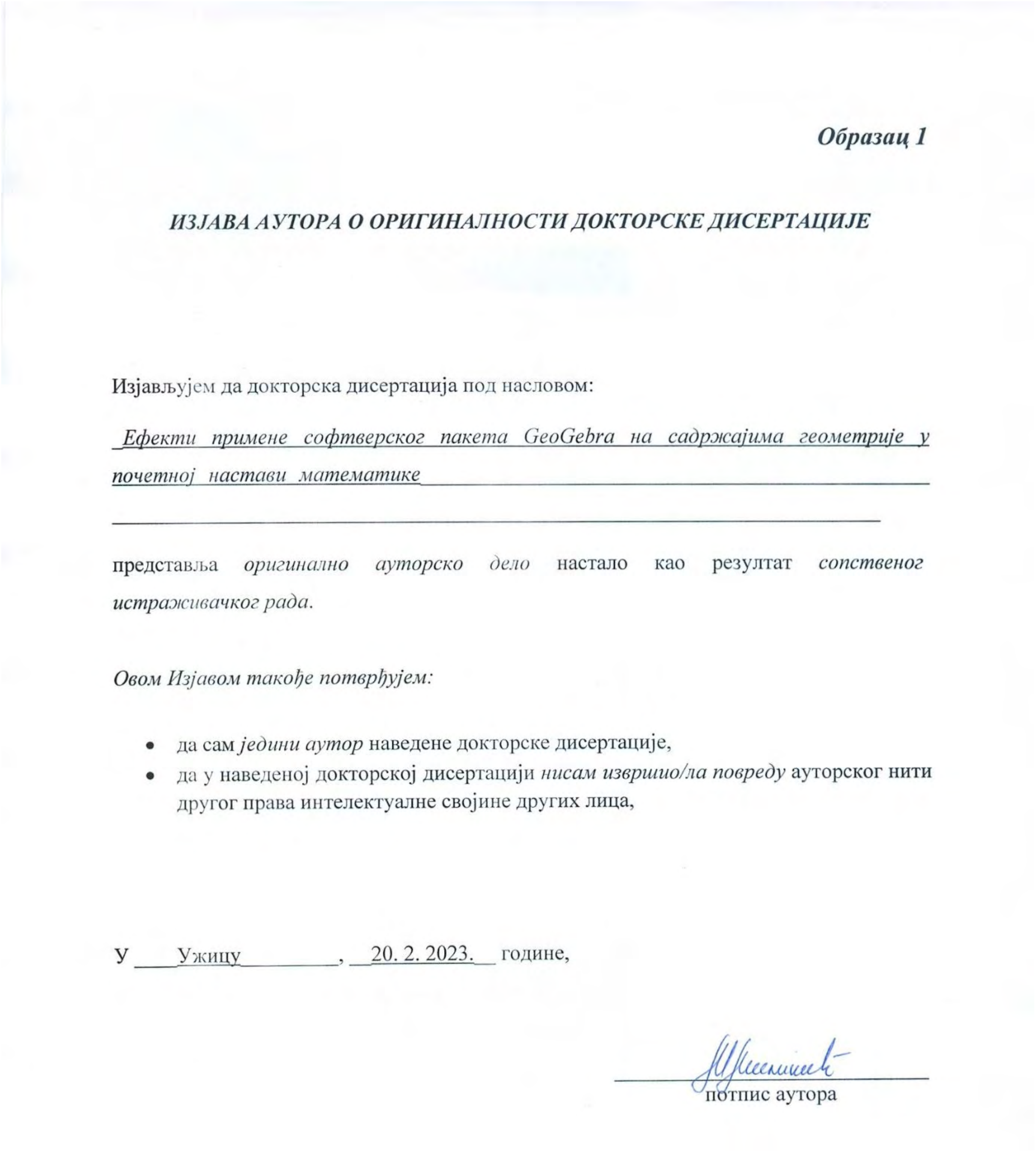
Covariates appearing in the model are evaluated at the following values: Inicijalni test = 44,1486

Биографија

Милан Миликић рођен је 8. августа 1988. године у Крагујевцу. Основну школу „Драгиша Михаиловић” и Прву крагујевачку гимназију завршио је у Крагујевцу. Основне академске студије на Природно-математичком факултету у Крагујевцу (студијски програм Математика) завршио је 2010. године, а мастер академске студије на истом факултету завршио је 2012. године одбранивши рад на тему „Три нормалне пројекције тела чије су основе у пројекцијским равнима” и тиме стекао академско звање Мастер математичар. Школске 2014/2015. године уписао је докторске академске студије (студијски програм Доктор наука – методика разредне наставе) на Учитељском факултету у Ужицу и положио све испите предвиђене програмом докторских студија са просечном оценом 9,50.

Професионални ангажман започео је 2013. године у Паланачкој гимназији у Смедеревској Паланци, као наставник математике, где је радио до 2015. године. Од 2015. године ангажован је на Факултету педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, у Јагодини, као асистент за ужу научну област Методика наставе математике. Тренутно је ангажован на предметима: Методика наставе математике, Методички практикум математике, Методика развоја почетних математичких појмова и Методички практикум развоја почетних математичких појмова. У периоду од 2016. до 2018. године био је ангажован као реализатор три акредитована семинара стручног усавршавања Завода за унапређивање образовања и васпитања Републике Србије. Од 2019. године члан је Комисије за давање стручне оцене квалитета рукописа уџбеника и уџбеничких комплета за математику при Заводу за унапређивање образовања и васпитања. Члан је Савета Факултета педагошких наука у Јагодини и Друштва математичара Србије.

Аутор је и коаутор 15 оригиналних научних и стручних радова из уже научне области Методика наставе математике. До сада је учествовао у више међународних и интеринституционалних научних и развојних пројеката. Учесник је бројних домаћих и међународних конференција и научних скупова из области Методике наставе математике.



Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Ефекти примене софтверског пакета GeoGebra на садржајима геометрије у почетној настави математике

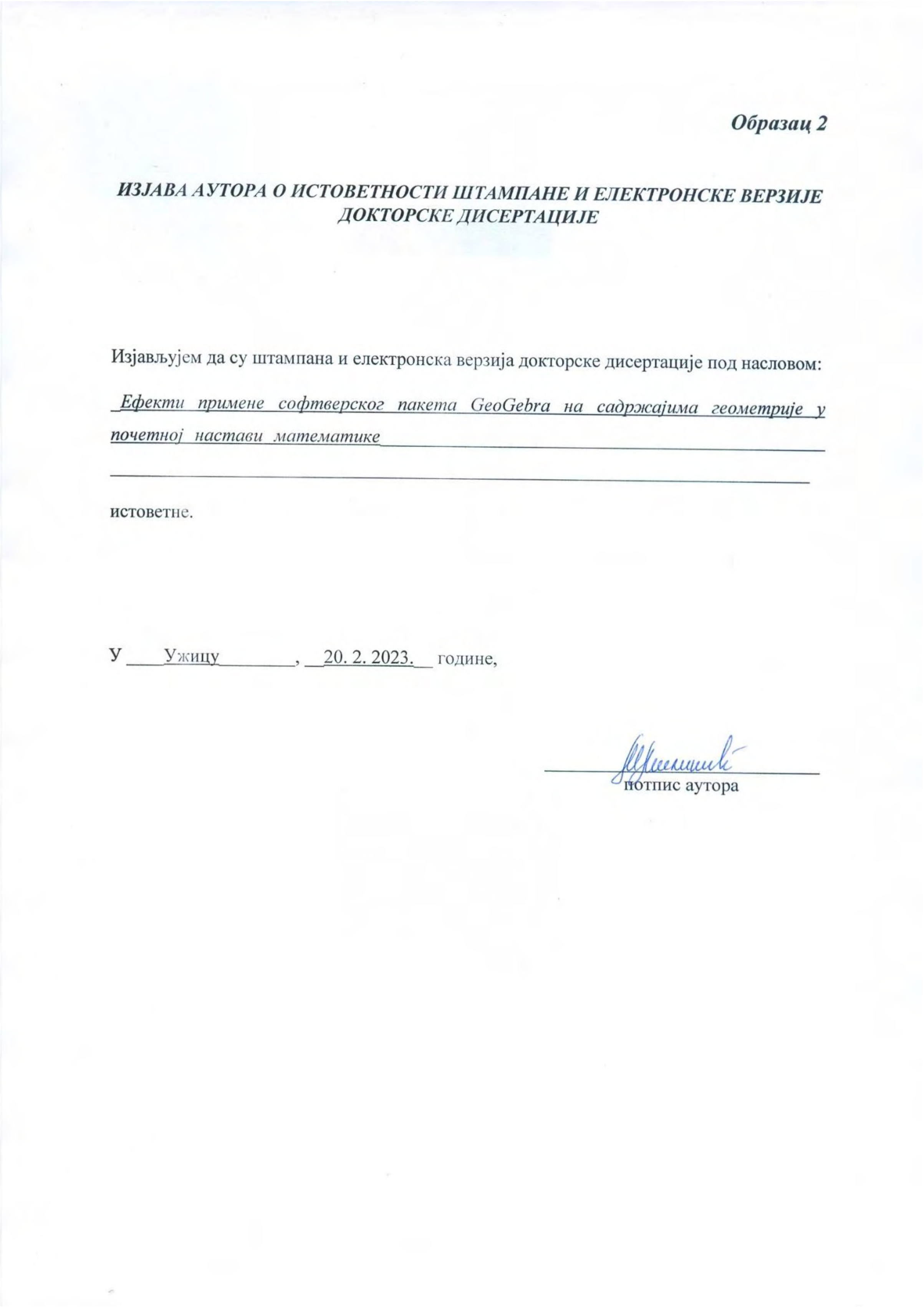
представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада.*

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,

У ____Ужицу________, __20. 2. 2023.__ године,

потпис аутора



Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да су штампана и електронска верзија докторске дисертације под насловом:

_*Ефекти примене софтверског пакета GeoGebra на садржајима геометрије у почетној настави математике*____

истоветне.

У ____Ужицу________, __20. 2. 2023.__ године,

____
потпис аутора

Образац 3

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Милан Миликић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Ефекти примене софтверског пакета GeoGebra на садржајима геометрије у почетној настави математике

и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

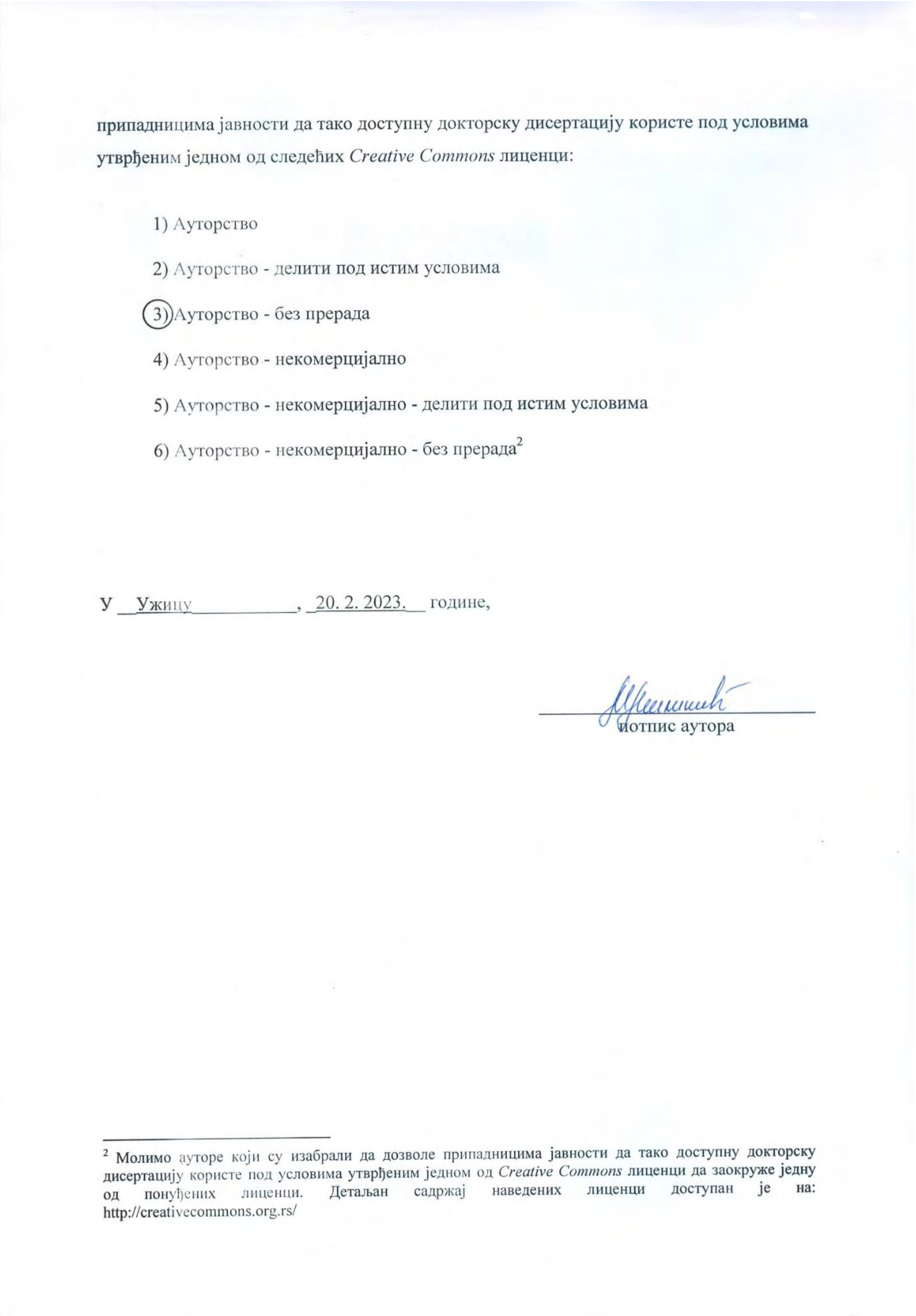
Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

---

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.



припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство
2) Ауторство - делити под истим условима
[✓ 3) Ауторство - без прерада]
4) Ауторство - некомерцијално
5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима
6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У __Ужицу___________, _20. 2. 2023.__ године,

потпис аутора

---

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/