



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА



Мр Иван М. Милетић

**РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ИНТЕРФЕЈСНЕ
ПРСЛИНЕ У ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНИМ
И ОЈАЧАНИМ МАТЕРИЈАЛИМА**

Докторска дисертација

Крагујевац, мај 2015.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ***I. Аутор***

Име и презиме: **Иван Милетић**
Датум и место рођења: **17.07.1976. Крагујевац**
Садашње запослење: **Асистент на Факултету инжењерских наука
Универзитета у Крагујевцу**

II. Докторска дисертација

Наслов: **РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА ИНТЕРФЕЈСНЕ ПРСЛИНЕ У
ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНИМ И ОЈАЧАНИМ МАТЕРИЈЛИМА**
Број страница: 126
Број слика: 69
Број библиографских података: 90
Установа и место где је рад
израђен: **Факултет инжењерских наука Универзитета у
Крагујевцу**
Научна област (УДК): **539.421:620.178.3(043.3).**
Ментор: **др Ружица Николић, ред. проф. Факултета инжењерских
наука Универзитета у Крагујевцу**

III. Оцена и одбрана

Датум пријаве теме: **10. 10. 2012. год**
Број одлуке и датум прихватања
докторске дисертације: **01-1/3401-10 од 20. 12. 2012**
Комисија за оцену подобности
теме и кандидата:

1. **Др Ружица Николић**, ред. проф., Факултет инжењерских наука
Универзитета у Крагујевцу
2. **Др Весна Марјановић**, доцент, Факултет инжењерских наука
Универзитет у Крагујевцу
3. **Др Зорица Ђорђевић**, доцент, Факултет инжењерских наука
Универзитет у Крагујевцу
4. **Др Јелена Ђоковић**, ванр. проф., Технички факултет у Бору
Универзитет у Београду
5. **Др Александар Седмак**, ред. проф., Машински факултет у
Београду

Комисија за оцену докторске
дисертације:

1. **Др Весна Марјановић**, доцент, Факултет инжењерских наука
Универзитет у Крагујевцу
2. **Др Зорица Ђорђевић**, доцент, Факултет инжењерских наука
Универзитет у Крагујевцу Машински факултет у Београду
3. **Др Нина Анђелић**, ванр. проф., Машински факултет у Београду
Универзитет у Београду
4. **Др Јелена Ђоковић**, ванр. проф., Технички факултет у Бору
Универзитет у Београду
5. **Др Ружица Николић**, ред. проф., Факултет инжењерских наука
Универзитета у Крагујевцу - **ментор**

Комисија за одбрану докторске
дисертације:

1. **Др Весна Марјановић**, доцент, Факултет инжењерских наука
Универзитет у Крагујевцу
2. **Др Зорица Ђорђевић**, доцент, Факултет инжењерских наука
Универзитет у Крагујевцу Машински факултет у Београду
3. **Др Нина Анђелић**, ванр. проф., Машински факултет у Београду
Универзитет у Београду
4. **Др Јелена Ђоковић**, ванр. проф., Технички факултет у Бору
Универзитет у Београду
5. **Др Ружица Николић**, ред. проф., Факултет инжењерских наука
Универзитета у Крагујевцу - **ментор**

Датум одбране дисертације: **2015. година**

РЕЗИМЕ

Прслина се најчешће појављује на интерфејсу између два различита материјала, јер је жилавост интерфејса мања од жилавости материјала који га образују. Одређивање жилавости интерфејсне прслине у биматеријалним комбинацијама је основно за анализу механизма лома у примењеним материјалима.

У дисертацији је разматран проблем прслине која скреће са интерфејса и наставља да се шири у једном од материјала. Анализиран је утицај еластичности материјала који образују интерфејс на понашање прслине која се шири на интерфејсу, као и прслине која се приближава интерфејсу. Резултати добијени у дисертацији наводе на закључак да ће прслина тежити да остане на интерфејсу без обзира на оптерећење уколико је еластичнији материјал јачи од интерфејса, а материјал веће кртости јак бар колико и интерфејс.

У овој дисертацији је приказано и решење за проблем прслине на интерфејсу између два еластично-пластична материјала унутар оквира дефинисаног нелинеарном механиком лома у хомогеним материјалима. Решења су изведена за материјале описане J_2 -деформационом теоријом. Напонско поље близу врха прслине за спојене еласто-пластичне материјале у условима течења у малом обиму, добро се слаже са мешовитим модом HRR поља за хомогене материјале.

У оквиру дисертације дата је и анализа понашања танких филмова и превлака примењујући еластичну механику лома. Дата је анализа ивичног раслојавања превлаке и утицаја положаја ивице превлаке у односу на ивицу основе као и услови под којима наступа раслојавање бубрењем. Анализом се дошло до закључка да угловне ивице основног материјала дају суштинску унутрашњу заштиту против раслојавања превлака интерфејса. Унутрашње ивице немају ту карактеристику. На основу анализе приказане у овој дисертацији може да се изведе закључак да еластичне карактеристике основе имају значајан утицај на раслојавање превлаке бубрењем у облику дугачког равностраног мехура.

Дата је такође и анализа раслојавања танког филма са основе у условима када се у једном од материјала који чине интерфејс јављају нелинеарне, еласто-пластичне деформације. Користећи се предностима програмског пакета *Mathematica*® уз аналитичко-нумеричку анализу одређене су границе у којима се јавља течење у малом и великом обиму. Анализом је приказано да у случају појаве еласто-пластичних деформација дебљина филма игра значајну улогу на величину побудне силе само у једном малом опсегу. Чим се та зона пређе у области врха прслине се јављају само течења у малом обиму и се могу применити закључци из главе три овог рада.

ABSTRACT

In this dissertation is considered the problem of an interfacial crack that is deflecting from the interface and continues to propagate in one of the two materials. The influence of elasticity of materials that constitute the interface, on behavior of a crack that propagates along the interface and the crack approaching the interface was analyzed. Results obtained in this research point to the conclusion that the crack would tend to remain at the interface regardless of the applied loading if the more ductile of the two materials is tougher than the interface and the more brittle material is at least as tough as the interface.

The solution for the problem of a crack at the interface between the two elastic-plastic materials, within the framework defined by the nonlinear fracture mechanics, is also presented in this dissertation. The solutions were derived for materials defined by the J_2 -deformation theory. The stress field at the crack tip for the joined elastic-plastic materials, within the small scale yielding conditions, is in good agreement with the mixed mode HRR field for the homogeneous materials.

Analysis of the thin films behavior and coatings is also presented with application of the elastic fracture mechanics. An analysis is presented of the coating edge delamination, as well as analysis of influence of the edge position with respect to the edge of the substrate and the conditions in which the delamination by bubbling would occur. That analysis led to conclusion that corner edges of the substrate material act as substantial interior protection against the interface delamination. The interior edges do not possess that characteristic. Based on analysis, presented in this dissertation, one can come up with the conclusion that elastic characteristics of the substrate have significant influence on coating delamination by bubbling in the case of the straight double-sided blister.

The analysis of thin film delamination from the substrate is also presented for the case when in one of the materials, which constitute the interface, appear nonlinear, elastic-plastic strains. The limits of appearance of the small scale or large scale yielding were established by exploiting the advantages of the symbolic programming routine Mathematica®, accompanied by the analytical-numerical analysis. It was shown, that in the case of appearance of the elastic-plastic strains, the thin film thickness imposes the significant influence on magnitude of the excitation force, only within the small range. As soon as that range is exceeded, in the vicinity of the crack tip appear only the small scales yielding conditions.

Мојој мајци Боси

Породица и дом су свето место и људи са којима увек прво делим лепе вести и место на које бежим од свих мука као у мирну и сигурну луку. Место у коме прекор никада није осуда и похвала никада није завист. Због тога што су увек били ту за мене у лепим и још више у мојим најтежим тренуцима неизмерну захвалност дугујем мајци Боси и брату Марку. Ви сте ме научили и примером показали шта треба да пружим највећој љубави у свом животу сину Борђу.

Велику захвалност дугујем ментору професору Ружици Николић без чије помоћи и жеље овог рада не би било. Нисте ми били само ментор ове дисертације већ и предани учитељ. Много сам Вам захвалнији за све оне лекције из живота које сте ми несебично поклонили.

Захвалност за изузетну помоћ при изради ове дисертације дугујем професору Јелени Ђоковић. За подршку и помоћ при изради ове дисертације захваљујем се и члановима комисије професорима Нини Анђелић, Весни Марјановић и Зорици Борђевић.

Ову прилику користим да се захвалим свим колегама са Катедре за Машинске конструкције и механизацију за подршку и разумевање у току рада на овој дисертацији.

САДРЖАЈ

Списак ознака	i
Списак слика	vi
1. Увод	1
2. Проблеми простирања интерфејсне прслине у изотропним и анизотропним материјалима	6
2.1. Линеарно еластична механика лома за прслину на интерфејсу.....	6
2.2. Утицај положаја прслине у односу на интерфејс на ширење прслине	18
Скретање прслине са интерфејса	18
Прслина је паралелна са интерфејсом	28
2.3. Прслина се приближава интерфејсу	30
Прслина нормална на интерфејс	20
Прслина напада интерфејс под произвољним углом	35
Прслина се приближава интерфејсу под произвољним углом, а на површинама прслине делује концентрисана сила	37
Прслина напада интерфејс под произвољним углом, а на површинама прслине делује концентрисана сила	42
3. Еластично-пластична анализа прслине на интерфејсу	45
3.1. Математичке основе еластично-пластичне механике лома	46
J -интеграл као нелинеарна еластична брзина ослобођања енергије	46
HRR сингуларитет	50
3.2. Структура поља у условима течења у малом обиму	53
3.3. Облик асимптотског поља у врху прслине	57
Закон материјала	61
3.4. Мешовити облик поља у врху интерфејсне прслине	61
4. Раслојавање превлака	69
4.1. Ивично раслојавање превлака	69
4.2. Утицај ивица на раслојавање превлака	73
4.3. Раслојавање превлака бубрењем	81
5. Деламинација танког филма код еластично-пластичних материјала	88
5.1. Модели нелинеарног лома интерфејса	91
EPZ модел	91
SSV модел	92
5.2. Еластични филм на еластично-пластичној основи	93
EPZ модел	93
SSV модел	95
5.3. Еластично-пластични филм на еластичној основи	99
6. Закључак	102
Литература	

СПИСАК ОЗНАКА

a	- дужина прслине
b	- половина ширине мехура
c, d	- бездимензионалне комплексне функције од ω , α и β
c_1, d_1, e_1	- бездимензионалне комплексне функције од α и β
c_2, d_2, e_2	- бездимензионалне комплексне функције од $\omega_1, \omega_2, \alpha$ и β
c_3	- бездимензионална комплексна функција од $\omega_2, \ell/\ell_0, \alpha$ и β
c_4, d_4	- бездимензионалне комплексне функције од $\omega_1, \omega_2, a/\ell, \alpha$ и β
ds	- инкремент дужине дуж контуре Γ^*
e_{ij}	- дводимензионални симбол
E_i	- Јангов модул еластичности
E^*	- ефективни Јангов модул еластичности
f	- бездимензионална функција која зависи од геометрије узорка и параметара материјала
f_{ij}	- бездимензионалне функције бездимензионалних параметара
G	- брзина ослобођања енергије
G^*	- брзина ослобођања енергије за $\bar{\psi} = \psi$
G_+, G_-	- максимална и минимална брзина ослобођања енергије
G_0	- брзина ослобођања енергије за прслину која се шири дуж интерфејса
G_d	- брзина ослобођања енергије за дефлектовање прслине
G_p	- брзина ослобођања енергије за пенетрацију прслине
G_c	- жилавост лома материјала

G_{IC}	- жилавост лома интерфејса
h	- растојање суб-интерфејсне прслине од интерфејса, дебљина филма или превлаке
h_{ij}	- бездимензионалне функције које зависе од θ , M^p и n
\tilde{h}_{ij}	- бездимензионалне функције које зависе од карактеристика материјала и ξ
H_p	- величина зоне пластичности
I_n	- интеграциона константа
J	- Рајсов интеграл
k	- интензитет напонске функције
k_I	- фактор пропорционалан оптерећењу
K	- комплексни фактор интензитета напона
K_I, K_{II}, K_{III}	- фактори интензитета напона за Мод I, II, III, респективно
K_1, K_2	- нормална и смицајна компонента фактора интензитета напона
K^p	- пластични фактор интензитета напона
ℓ	- растојање места деловања концентрисане силе од врха прслине
ℓ_0	- растојање места деловања концентрисане силе од интерфејса
L	- карактеристична дужина
M^p	- параметар мешовите пластичности
M^e	- параметар мешовите пластичности у условима линеарнееластичности
n_i, N	- коефицијенти деформационог ојачања
n_j	- компоненте јединичног вектора нормале на Γ^*
N	- унутрашња сила у филму
P	- концентрисана сила која делује на површине прслине на одређеном растојању од врха прслине

r, θ	- поларне координате
r_i	- радијус мале нехомогености и/или неправилности
r_k	- радијус области око врха прслине
r_p	- радијус зоне нелинеарности материјала - пластичне зоне
r_c	- радијус контактне зоне
$R(\theta, \xi)$	- бездимензионална функција која зависи од θ и ξ
s_{ij}	- девијатор напона
t	- вектор интерфејсних сила, дебљина траке без пластичних карактеристика
T	- интензитет напона услед примењеног оптерећења
T_i	- компоненте вектора сила
u_i	- компоненте вектора померања
$\tilde{u}_i(\theta, n)$	- бездимензионалне угловне функције
W	- густина енергије деформације, ширина узорка
w	- угиб плоче
x_1, x_2, x_3	- координате правоуглог координатног система
Y	- бездимензионална реална позитивна величина
z	- комплексна величина
α, β	- Дундурсови параметри
α_i	- константа материјала
δ	- висина мехура
γ	- мали произвољан позитиван број
ε	- биеластична константа или осцилаторни индекс
ε^*	- фазни индекс
ε_{ij}	- компоненте тензора деформације

$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$	- бездимензионалне угловне функције
ε^p	- пластична деформација
ε_0	- деформација течења
φ	- просторни угао
φ_1	- линеарна комбинација параметара α и β
Φ	- напонска функција
$\tilde{\Phi}$	- бездимензионална напонска функција
Γ	- жилавост лома интерфејса
Γ_s	- жилавост лома основе
Γ_f	- жилавост лома филм
Γ_p	- пластична фракција жилавост лома
λ	- реална величина која зависи од α и β
μ	- модул клизања
ν	- Поасонов коефицијент
Θ, Ω	- углови дефинисани на слици 3.6
σ_{ij}	- компоненте тензора напона
σ_{0k}	- напон течења материјала ($k = 1, 2$)
$\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$	- бездимензионалне угловне функције
σ_Y	- напон течења
$\hat{\sigma}$	- екстремна вредност нормалног напона
$\Sigma_{ij}^{I,II,III}(\theta)$	- угловне функције
ω	- угао скретања прслине
ω_1	- угао правца пенетрације прслине
ω_2	- угао наилажења прслине на интерфејс

- ξ - пластични фазни параметар
- ψ - фазни угао комплексног фактора интензитета напона или фазни угао примењеног оптерећења
- $\hat{\psi}$ - локални фазни угао

СПИСАК СЛИКА

- Слика 2.1 Прслина која лежи на интерфејсу између два различита материјала
- Слика 2.2 Зависност промена напона у функцији промене угла θ , за произвољну биматеријалну комбинацију, [28], [48]
- Слика 2.3 Дундурсови параметари за неке комбинације материјала који образују интерфејс [14]
- Слика 2.4 Мешовити мод дефинисан преко просторних углова у K -простору (а) за $\varepsilon = 0$, (б) $\varepsilon \neq 0$
- Слика 2.5 Промена нормалног напона $\sigma_{\theta\theta}$ у функцији фазног угла оптерећења ψ
- Слика 2.6 Крива жилавости лома интерфејса
- Слика 2.7 Геометрија за прслину која скреће са интерфејса
- Слика 2.8 Дијаграм промене брзине ослобођене енергије са дужином сегмента прслине која је скренула за $\beta \neq 0$
- Слика 2.9. Промена G/G_0 са променом угла скретања за комбинације оптерећења одређене са $\psi = \arctan(K_2/K_1)$ за различите вредности α и $\beta = 0$ (табеларни подаци) [22]
- Слика 2.10. Промена G/G_0 са променом угла скретања за комбинације оптерећења одређене са $\psi = \arctan(K_2/K_1)$ за различите вредности α и $\beta = 0$ (коришћењем (2.56))
- Слика 2.11 Упоредни приказ односа G/G_0 добијених табеларно и аналитичком методом [64]
- Слика 2.12 Дијаграм G^*/G_0 у функцији ω
- Слика 2.13 Контурни приказ максималне вредности G_{\max}^*/G_0 као функције α и β
- Слика 2.14 За комбинацију оптерећења $\psi = \arctan(K_2/K_1)$ која задовољавају област $0 \leq \psi \leq \psi_{\max}$ прслина неће да скрене са интерфејса у материјал 2
- Слика 2.15 Полубесконачна прслина паралелна са интерфејсом

- Слика 2.16 Прслина нормална на интерфејс: (а) врх прслине је у интерфејсу, (б) пенетрира интерфејс, (с) дефлектује у интерфејс и (д) двострано дефлектује у интерфејс
- Слика 2.17 Зависност реалне величине λ од параметра α при $\beta = 0$
- Слика 2.18 Однос брзина ослобађања енергије за једнострано и двострано дефлектовану прслину и вредност фазног угла за исте дужине прслине a у функцији α
- Слика 2.19 Прслина која напада интерфејс под произвољним углом ω_2 : (а) врх прслине је у интерфејсу, (б) пенетрира интерфејс у правцу дефинисаном углом ω_1 и (с) дефлектује у интерфејс
- Слика 2.20 Однос G_d / G_p^{\max} за исте дужине a , $\beta = 0$ и $\omega_1 = 45^\circ$, у функцији α
- Слика 2.21 Прслина која се приближава интерфејсу а оптерећена је отварајућом концентрисаном силом која делује на површинама прслине
- Слика 2.22 Однос K_{II} / K_I у зависности од ℓ / ℓ_0 на основу табеларних резултата
- Слика 2.23 Однос K_{II} / K_I у зависности од ℓ / ℓ_0 на основу аналитичке апроксимације
- Слика 2.24 Приближавање прслине интерфејсу: (а) прслина скреће ка интерфејсу и (б) прслина „бежи“ од интерфејса
- Слика 2.25 Нормализована брзина ослобођања енергије за прслину која се приближава интерфејсу
- Слика 2.26 Прслина која напада интерфејс под произвољним углом ω_2 и оптерећена је концентрисаном силом. Прслина: (а) врх прслине је у интерфејсу (б) пенетрира интерфејс и (с) дефлектује у интерфејс
- Слика 2.27 Однос брзина ослобођања енергије за дефлектовање прслине и максималне брзине ослобођене енергије за пенетрацију прслине
- Слика 2.28 Однос брзине ослобођене енергије за дефлектовање прслине и максималне брзине ослобођања енергије за пенетрацију прслине
- Слика 3.1 Прслина на интерфејсу између два еластично-пластична материјала
- Слика 3.2 Затворена контура Γ^* у дводимензионалном телу
- Слика 3.3 Две произвољне контуре Γ_1 и Γ_2 које окружују врх прслине
- Слика 3.4 Дводимензионално тело са прслином ограничено контуром Γ'
- Слика 3.5 Две кружне контуре око врха прслине

- Слика 3.6 Област отварања прслине у K равни
- Слика 3.7 Промена напона у функцији угла са коефицијентом ојачања $n = 1$
- Слика 3.8 Промена напона у функцији угла са коефицијентом ојачања $n = 3$
- Слика 3.9 Промена напона у функцији угла са коефицијентом ојачања $n = 10$
- Слика 3.10 Промена напона у функцији угла за различите услове оптерећења и коефицијенте ојачања $n_1 = 1$ и $n_2 = 10$
- Слика 3.11 Промена напона у функцији угла за различите услове оптерећења и коефицијенте ојачања $n_1 = 1$ и $n_2 = 3$
- Слика 3.12 Промена напона у функцији угла за различите услове оптерећења и коефицијенте ојачања $n_1 = 3$ и $n_2 = 10$ и $n_1 = 5$ и $n_2 = 10$
- Слика 4.1 Танак филм нанет на основу
- Слика 4.2 Облици разарања филмова изложених затезању
- Слика 4.3 Облици разарања танких филмова и превлака изложених притиску
- Слика 4.4 Конфигурације у условима раванског стања деформације
- Слика 4.5 Утицај положаја ивице филма на дужину преноса силе
- Слика 4.6 Дефиниција и решавање проблема заосталих напона
- Слика 4.7 Брзина ослобађања енергије за проблем прслине која почиње из унутрашње ивице
- Слика 4.8 Брзина ослобађања енергије за проблем прслине која полази из угла ивица
- Слика 4.9 Фазни угао оптерећења за проблем прслине која полази из угла ивица
- Слика 4.10 Расподела напона: (а) $\sigma_{\theta\theta}$ и (б) $\sigma_{r\theta}$ испред врха прслине која почиње из унутрашње ивице
- Слика 4.11 Расподела напона: (а) $\sigma_{\theta\theta}$ и (б) $\sigma_{r\theta}$ испред врха прслине која полази из угла ивица
- Слика 4.12 Услови за појаву различитих врста ширења прслине са интерфејса
- Слика 4.13 Услови за појаву различитих врста ширења прслине која прилази интерфејсу

- Слика 4.14 Равностранни дугачки мехур: (a) поглед одозго, (b) поглед спреда, (c) 3D приказ и (d) геометрија и силе у пресеку дугачког равностраног мехура
- Слика 4.15 Зависност фазног угла оптерећења ψ , од σ/σ_c
- Слика 4.16 Утицај разлика у еластичним карактеристика превлаке и основе на брзину ослобађања енергије дуж страна мехура
- Слика 4.17 Утицај разлика у еластичним карактеристика превлаке и основе на просечну брзину ослобађања енергије дуж чела мехура
- Слика 5.1 Стационарно стање деламинације танког филма са појавом течења
- Слика 5.2 Два модела деламинације танког филма са појавом течења у основи
- Слика 5.3 Редуковани модел оптерећења у EPZ и SSV моделу
- Слика 5.4 Критична вредност G у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (EPZ модел)
- Слика 5.5 Критична вредност $\sigma\sqrt{h}$ у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (EPZ модел)
- Слика 5.6 Критична вредност G у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (SSV модел)
- Слика 5.7 Фазни угао ψ у врху прслине у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (SSV модел)
- Слика 5.8 Критична вредност G у функцији дебљине еластичне траке када се течење јавља у основи (SSV модел)
- Слика 5.9 Критична вредност G у функцији знака напона када се течење јавља у основи (SSV модел)
- Слика 5.10 Критична вредност G у функцији $\hat{\sigma}/\sigma_y$ када се течење јавља у филму (EPZ модел)
- Слика 5.11 Критична вредност G у функцији R_0/t када се течење јавља у филму (SSV модел)
- Слика 5.12 Фазни угао ψ у врху прслине у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (SSV модел)

1. УВОД

Дати право тумачење настанка и раста прслине на интерфејсу два материјала неопходно је за разумевање процеса лома у новим, модерним материјалима као што су композити и керамички материјали. На пример, врло важан проблем лома у влакнима, или вискером ојачаним керамичким материјалима, је проблем раздвајања веза између матрице и ојачавајуће фазе. Овај процес раскидања веза се може одвијати квази-статички или динамички зависно од врсте оптерећења којима је изложена композитна структура. Прслина се најчешће појављује на интерфејсу између два различита материјала, јер је жилавост интерфејса мања од жилавости материјала који га образују. Одређивање жилавости интерфејсне прслине у биматеријалним комбинацијама је основно за анализу механизма лома у примењеним материјалима какви су влакнасти композити и композитна керамика.

Танки филмови, изложени притисном оптерећењу, најчешће се раслојавају стварањем мехурова. Интерфејсна прслина у том случају настаје између мехура и основе. Раслојавање танких филмова стварањем мехурова је посебно интересантно код раслојавања металних филмова на основи од полимера, где постоји велика разлика у еластичним карактеристикама материјала. Услови под којима се стварају мехурови, брзина ослобађања енергије, као и фазни угао оптерећења за прслину на интерфејсу, дефинишу се у зависности од разлика у еластичним карактеристикама танког филма и основног материјала.

Деламинација или раслојавање танких еластичних филмова на цилиндричној основи, која је изложена притисном оптерећењу, је посебно интересантан проблем код оксидних превлака на жичаним елементима изложеним високим температурама или код керамичких превлака на лопатицама турбина или другим компонентама које раде на високим температурама. Танки површински слојеви и превлаке изложене су значајним заосталим притисним напонима. Ово је нарочито изражено код керамичких превлака на металној основи и код металних слојева на основи од полимера, где је температура на којој се ови спојеви образују већа од радне температуре. Примери за то су термоизолационе превлаке као што су Al_2O_3 на Ni-Cr-Al и Fe-Cr-Al легурама, тврде провидне превлаке на оптичким полимерима и металне нити на основи од полимера код електронских модула. Ови површински слојеви су осетљиви на раслојавање бубрењем ако је жилавост интерфејса мала.

Велики заостали притисни напони могу да изазову различите облике бубрења превлака.

Почетак изучавања у области лома на интерфејсу везује се за рад Вилијамса (WILLIAMS) из 1959. године [1], који је истраживао локално поље напона у близини врха полубесконачне прслине на интерфејсу два материјала чије су површине слободне од дејства сила, а где интерфејсна прслина лежи између два идеално спојена полупростора. Вилијамс је приметио да напони око врха прслине на интерфејсу имају осцилаторни карактер, за разлику од хомогених материјала. После њега су Рајс (RICE) и Сих (SIH) у свом раду из 1964. [2] као и Сих и Рајс 1965. [3] одредили експлицитне изразе који описују напонско поље у близини врха прслине, а самим тим и удаљена еластична напонска поља за различите проблеме. Даљи допринос развоју ове области дали су радови Ердогана (ERDOGAN) из 1965. [4], Ингланда (ENGLAND) из 1965. [5] и Малишева (MALYSHEV) и Салганика (SALGANIK) из 1965. [6], а сви у области истраживања дводимензионалног сингуларног модела за једну или више прслина у биматеријалним системима.

Такође, основу за проучавање ове области представљају и рад Рајса и Розенгрин (ROSENGREN) из 1968. [7], који изучава ојачане материјале, као и публикација Дундурса (DUNDURS) из 1969. [8], који изучава утицај и облик дислокација на напонско поље у области прслине. Даљи напредак у области истраживања статичких ломова на биматеријалном интерфејсу дали су радови Хачинсона и осталих (HUTCHINSON ET AL.) из 1988. [9], Андерсона (ANDERSON) и Рајса из 1987. [10], као и Рајса из 1987. [11] и 1988. [12]. Такође ту су и радови Сиха из 1991. [13] и Хачинсона и Суа (SUO) из 1992. године [14].

Проблем понашања прслине на интерфејсу, тј. њеног скретања са истог и пробијања у интерфејс разматрао је већи број аутора. Тако су пре свих Кук (COOK) и Ердоган у свом раду из 1972. [15] и Ердоган и Бирицикоглу (BIRICIKOGLU) из 1973. [16] истраживали понашање прслине која се приближава интерфејсу под правим углом. Они су разматрали пенетрирање односно пробијање прслине кроз интерфејс.

Дефлекцију, односно ширење прслине дуж интерфејса, ако прслина напада интерфејс под правим углом разматрали су у радовима Гор (GORRE) и Венеција (VENEZIA) 1977. [17] и Лу (LU) и Ердоган 1983. [18] и [19]. Ширење прслине, која се под произвољним углом приближава интерфејсу, разматрали су у радовима Ердоган и Арин (ARIN) 1975, а после њих и Комниноу (COMNINOU) и Дундурс 1979. [20]. Хи (HE) и Хачинсон су 1988. [21] дали детаљан опис понашања овакве прслине као и понашање прслине која скреће са интерфејса [22]. Понашање прслине која је паралелна интерфејсу разматрали су Хачинсон и остали 1987. у раду [9].

Значајан допринос развоју изучавања области еластичног и еласто-пластичног ширења прслина у биматеријалном интерфејсу и понашања истих пружили су и Вељковић радовима из 1998. [27] и 2001. [28], као и Николић и Вељковић (Ђоковић) радовима из периода од 2002. до 2013. својим радовима из 2002. [29] када су обрадиле проблем динамичког ширења прслине на интерфејсу, 2003. [30] и 2006. [31] у којима су анализирале раздвајање интерфејса, 2010. [32] где је детаљно објашњено понашање прслине на интерфејсу и услове под којима ће прслина напустити интерфејс и 2011. где су кроз монографска поглавља покриле

широк спектар понашања прслине на интерфејсу у еластичном окружењу, динамичко ширење прслине и многе друге аспекте [33], [34], [35] и [36].

Да би могли да се анализирају експериментални резултати, како квазистатичког тако и динамичког лома неопходно је познавати тродимензионални математички модел услова ширења прслине у интерфејсу. Ово се посебно односи на област близу врха прслине за коју могу и да се добију најтачнија мерења. Хомогени лом еластичних материјала у тродимензионалним статичким и динамичким условима изучавали су Парсонс (PARSONS), Хол (HALL) и Розакис (ROSAKIS) 1986. и Кришнаснами (KRISHNASNAJI) Розакис и Равичардан (RAVICHANDRAN) 1991. [37]. Тродимензионалне аспекте прслина у хомогеним еластичним плочама анализирали су Накамура (NAKAMURA) и Паркс (PARKS) у својим радовима из 1988. и 1989. [38], [39].

Међутим, спроведена су врло ограничена истраживања у испитивању улоге тродимензионалности код интерфејсне прслине. У овом случају тродимензионални утицаји у близини интерфејсне прслине нису условљени само присуством саме прслине, већ су зависни и од присуства неслагања материјала дуж интерфејса. Гахремани (GHANREMANI) 1991. [40], а после њега и Барсум (BARSOUM) и Чен (CHEN) 1991. [41] су анализирали угловни сингуларитет биматеријала користећи метод коначних елемената. Они су доказали да многе комбинације материјала не показују осцилаторни карактер поља близу угловног сингуларитета. Све то се дешава у таквим случајевима када је сингуларност симетричних и антисиметричних модова у области од 0.5 до 0.75, тј. када неслагање материјала постаје веће. Ово је логично из разлога да је величина зоне много мала и добро уочљив хоризонтални део криве која представља зависност K - вредности од дебљине је доминантан.

Накамура је 1991. [42] извео тродимензионалну анализу биматеријалне плоче са централном прслином. У његовој анализи, модул клизања и Поасонов коефицијент два различита материјала су изабрани тако да се добија уобичајено осцилаторно напонско поље које је у условима раванског стања деформације.

Процес разарања ће да се одвија динамички, ако је интерфејс већ ослабљен постојањем грешака тако да оне могу послужити као иницијатори прслине која нестабилно пропагира дуж самог интерфејса. Ако се узме у обзир комплексност проблема разумљиво је да постоји само неколико теоријских резултата динамичког раста прслине.

Експерименталним истраживањима поља деформације у врху интерфејсне прслине бавили су се Типур (TIPUR) и Розакис 1991. [43] и Розакис и остали 1991. [44] користећи оптички метод *Coherent Gradient Sensor (CGS)* и брзу фотографију. Разматрали су брзине до 90% од Рејлијеве (RAYLEIGH) таласне брзине за PMMA (биматеријални систем polimetilmetacilat/Al који је коришћен у експерименту). На основу добијених резултата Јанг и остали (YANG) 1991. [45] добили су структуру еластодинамичког поља за равномерни раст прслине на интерфејсу. У свом раду Ву (WU) је исте године потврдио добијене резултате [46]. Приказ напонског поља у врху биматеријалне прслине у условима равномерног раста дао је Денг (DENG) 1992. степеним редом [47].

Експерименталним истраживањима се у својим радовима највише бавио Розакис. Он је са Лиуом (LIU) и Ламбросом (LAMBROS) у раду из 1993. [48]

претпоставио постојање убрзања у врху прслине и врло велику брзину раста прслине. Овом раду претходили су радови који су обрађивали неравномеран раст прслине у условима лома у Моду I у хомогеном изотропном материјалу.

Анализом понашања еласто-пластичне прслине на интерфејсу биматеријалних система у условима малог и великог течења у својим радовима бавили су се Ших (SHIH) и Асаро (ASARO) 1988. [23] и 1989. [24] и [25], као и Ших и остали 1991. [26]. Велики допринос дао је и Хачинсон који се овим проблемима бавио у већем делу своје каријере, а чији су радови детаљније коришћени у овој дисертацији. Такође ту је и Суреш (SURESH) 1998. [49], као и Бјут (BEUTH) и Клингбејл (KLINGBEIL) 1996. [50]. Преглед тренутног стања у области може се наћи у раду Бенкс-Силс (BANKS-SILLS) из 2015. [51].

Тренутно се у области везаној за еласто-пластично понашање издаје велики број радова који су углавном везани за област примене методе коначних елемената и поређење резултата добијених са експериментима. Посебно је интересантна област испитивања танких филмова наноинтендерима чијим притиском на филм долази до пластичне деформације у филму и основи и до деламинације филма.

У делу 2 ове дисертације је дата у краћим цртама основна концепција еластичне механике лома за прслину на интерфејсу и разматрани су проблеми прслине која се приближава интерфејсу. Прслина која се приближава интерфејсу између два различита материјала може да се заустави или може да настави да се шири преко интерфејса или да скрене у интерфејс. У овом делу је разматрани су услови под којима ће се дешавати „такмичење” између пробијања и скретања у интерфејса. Материјал са обе стране интерфејса је еластичан - изотропан. Брзина ослобођања енергије за скретање прслине у интерфејс се пореди са брзином ослобођања енергије за пробијање интерфејса. Ови резултати се даље користе за одређивање релативне жилавости интерфејса и основног материјала, која обезбеђује да прслина скрене у интерфејс. У овом делу је такође анализирано и скретање прслине са интерфејса између два различита изотропна еластична материјала. Пажња је концентрисана на почетак скретања и услов да дужина сегмента који напушта интерфејс буде мала у поређењу са прслином на интерфејсу. На основу ове анализе добијају се фактори интензитета напона и брзина ослобођања енергије за скренуту прслину у зависности од одговарајућих величина за интерфејсну прслину пре скретања. Практична примена ове анализе је за интерфејс код лепљених спојева и заштитних превлака и танких филмова.

У трећем поглављу је дато решење поља напона и померања за прслину која лежи дуж интерфејса еластичног и еластично-пластичног материјала као и између два еластично-пластична материјала. Резултати су добијени коришћењем J_2 -деформационе теорије за материјал са ојачањем. То је теорија по којој пластично течење зависи само од енергије промене облика. У овом делу су дати и резултати за поље напона и померања у условима течења у малом обиму око врха прслине. Показано је да поље близу врха прслине нема развојене модове, као што је то случај код поља HRR типа за хомогени материјал, већ поседује неке специфичне карактеристике поља HRR типа у условима мешовитог мода оптерећења. У условима течења у малом обиму, еластично поље се карактерише комплексним фактором интензитета напона и фазним углом оптерећења, док се пластично поље карактерише новим фазним углом оптерећења који је дефинисан у овој дисертацији.

Такође, у овом делу је одређена величина пластичне зоне у условима раванског стања деформације и поље напона и померања у врху прслине за целу област новог фазног угла. С обзиром на услове течења у малом обиму отварање прслине биће глатко и величина отварања прслине је дефинисана J -интегралом.

У четвртном поглављу је посматрана деламинација танког филма и превлаке у условима еластичног лома. Танки филмови и превлаке се користе све више у пракси. Превлаке спојене за основни материјал често трпе велике заостале раванске напоне који се са превлаке преносе преко напона смицања на интерфејс близу ивица. Ова ивична област игра значајну улогу у тумачењу раслојавања превлака. Разматран је проблем ивичне прслине која настаје на ивици превлаке. Анлизирана су два могућа случаја. Први, када ивица превлаке лежи на унутрашњој страни основног материјала и други, када се ивица превлаке поклапа са ивицом основног материјала. У оквиру анализе разматрано је који параметри утичу на величину дужине прслине при којој се брзина ослобађања енергије налази испод равнотежног нивоа. Такође се дошло до закључка о утицају ивице на брзину ослобађања енергије, односно на који начин она утиче на раслојавање. Превлаке на равној основи, изложене притисном раванском оптерећењу, раслојавају се бубрењем када напон прекорачи критичну вредност. Велики заостали притисни напони могу да изазову различите облике бубрења превлака као што су дугачак равнострани мехур, кружни или елипсасти мехур или тзв. мехур у облику телефонске жице. Утицај еластичних карактеристика основе на раслојавање превлаке бубрењем анализиран је у овој глави.

У петом делу је приказана анализа раслојавања танког филма у условима нелинеарне механике лома. Узета су у обзир два разматрања: раслојавање еластичног танког филма са еласто-пластичне подлоге и раслојавање еласто-пластичног филма са еластичне подлоге. У оквиру овог дела дисертације анализирани су услови под којима наступа течење у великом (LSY - Large Scale Yielding) и малом обиму (SSY – Small Scale Yielding), која је потребна дебљина филма при којој једна врста течења прелази у друго као и колике су брзине ослобађања енергије у овој граничној области. Све ово је посматрано кроз два модела EPZ (Embedded fracture Process Zone) и SSV (Suo-Shih-Varias) чије су карактеристике, сличности и разлике представљене кроз дисертацију. Такође је представљен утицај ојачања на промену анализираних величина. Због компликованог математичког рачуна, у овом и претходним деловима дисертације, коришћене су погодности програмског пакета *Mathematica*® који омогућава лакшу математичку анализу, како у аналитичком делу, тако и у мешовитој аналитичко-нумеричкој примени.

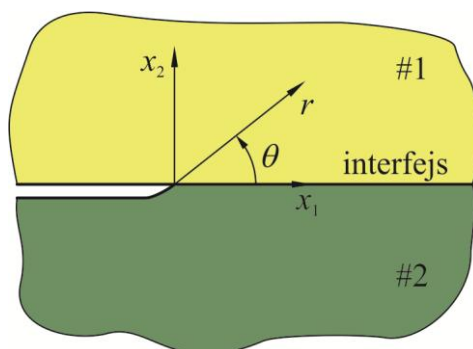
У шестом делу дисертације изнети су закључци на које упућује рад у оквиру ове дисертације као и могућност примене добијених резултата. Такође су дати и могући правци за даља истраживања ове проблематике.

2. ПРОБЛЕМИ ПРОСТИРАЊА ИНТЕРФЕЈСНЕ ПРСЛИНЕ У ИЗОТРОПНИМ И АНИЗОТРОПНИМ МАТЕРИЈАЛИМА

2.1. Линеарно еластична механика лома за прслину на интерфејсу

Прслина на интерфејсу се представља површинама преко којих се не преносе никакве силе из чега произилази решење да се материјали међусобно пробијају врло близу врха прслине. Ова особина може да се занемари при добијању решења због претпоставке да је контактна зона мала у поређењу са физичком величином која се разматра. Иако се за почетак разматрања понашања прслине на интерфејсу узима рад Вилијамса [1], основу за сва каснија разматрања везана за ову област поставили су Рајс и Сих [2] и [3].

За добијање поља напона и померања у врху прслине на интерфејсу између два различита материјала, посматра се дводимензионални еластичан проблем [12] приказан на слици 2.1.



Слика 2.1 Прслина која лежи на интерфејсу између два различита материјала¹

Материјал 1 заузима горњу полураван $x_2 > 0$, а материјал 2 заузима доњу полураван $x_2 < 0$. Еластичне карактеристике материјала 1 су Јангов модул еластичности, Поасонов број и модул клизања E_1 , ν_1 и μ_1 , респективно, а еластичне карактеристике материјала 2 су E_2 , ν_2 и μ_2 . Материјали 1 и 2 су спојени дуж

¹ Све ознаке на сликама су дате латиницом зато што се у већини случајева ради или о енглеском језику због резултата програмирања или су у питању ознаке механичких карактеристика

позитивног дела x_1 -осе. Прслина се шири дуж негативног дела x_1 -осе. На слици 2.1 x_1 и x_2 представљају координате Декартовог правоуглог координатног система, а r и θ су поларне координате.

Напонско поље близу врха прслине на интерфејсу између два различита материјала, је линеарна комбинација два типа поља, спрегнутог осцилаторног поља, које се дефинише комплексним фактором интензитета напона K , и неосцилаторног поља које се мери реалним K_{III} фактором интензитета напона. Напонско поље у близини врха интерфејсне прслине има облик [13]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[\operatorname{Re}(Kr^{i\varepsilon})\Sigma_{ij}^I(\theta, \varepsilon) + \operatorname{Im}(Kr^{i\varepsilon})\Sigma_{ij}^{II}(\theta, \varepsilon) + K_{III}\Sigma_{ij}^{III}(\theta) \right] \quad (2.1)$$

где су:

r, θ - поларне координате,

$i, j = x_1, x_2$, а

$\Sigma_{ij}^{I,II,III}(\theta)$ - угловне функције.

Ове угловне функције одговарају затежућим силама (Мод I), раванском смицању (Мод II) и изван раванском смицању (Мод III), преко интерфејса, тако да силе на интерфејсу испред врха прслине на растојању r имају облик:

$$\begin{aligned} (\sigma_{22} + i\sigma_{12})_{\theta=0} &= \frac{Kr^{i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi r}} \\ (\sigma_{23})_{\theta=0} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функције угла за Мод I и Мод II, $\Sigma_{ij}^{I,II}(\theta)$ за материјал 1, могу се одредити као [28], [52], [63]:

$$\begin{aligned} \Sigma_{rr}^I(\theta) &= -\frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin \theta) \\ \Sigma_{\theta\theta}^I(\theta) &= \frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{\theta}{2} (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin \theta) \\ \Sigma_{r\theta}^I(\theta) &= \frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{\theta}{2} (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin \theta) \\ \Sigma_{rr}^{II}(\theta) &= \frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{3\theta}{2} - \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \varepsilon \sin \theta) \\ \Sigma_{\theta\theta}^{II}(\theta) &= -\frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{3\theta}{2} - \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{\theta}{2} (\sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin \theta) \\ \Sigma_{r\theta}^{II}(\theta) &= \frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi - \theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{\theta}{2} (\sin^2 \frac{\theta}{2} + \varepsilon \sin \theta) \\ \Sigma_{rz}^{I,II}(\theta) &= \Sigma_{z\theta}^{I,II}(\theta) = 0, \quad \Sigma_{zz}^{I,II}(\theta) = \nu (\Sigma_{rr}^{I,II}(\theta) + \Sigma_{\theta\theta}^{I,II}(\theta)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

За добијање угловних функција $\Sigma_{ij}^{l,III}(\theta)$ за материјал 2, а које имају облик аналоган облику једначина (2.3), потребно је π заменити са $-\pi$, и обрнуто. Угловне функције за Мод III, $\Sigma_{ij}^{III}(\theta)$ имају исти облик као за хомоген материјал [13], [52], [63]:

$$\begin{aligned}\Sigma_{rr}^{III}(\theta) &= \Sigma_{\theta\theta}^{III}(\theta) = \Sigma_{r\theta}^{III}(\theta) = \Sigma_{z\theta}^{III}(\theta) = 0, \\ \Sigma_{rz}^{III}(\theta) &= \sin \frac{\theta}{2}, \quad \Sigma_{\theta z}^{III}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Приказ промене раванских напона у функцији промене угла θ за произвољно биматеријалну комбинацију, према једначини (2.1), приказан је на слици 2.2.

Оно што се одмах може приметити на овим дијаграмима везаним за прслину на интерфејсу је карактеристичан скок напона преко интерфејса. Код компоненте напона σ_{11} јавља се дисконтинуитет преко линије споја за $x_2 = 0$. За разлику од напона, компонента деформације ε_{11} је континуална, односно важи:

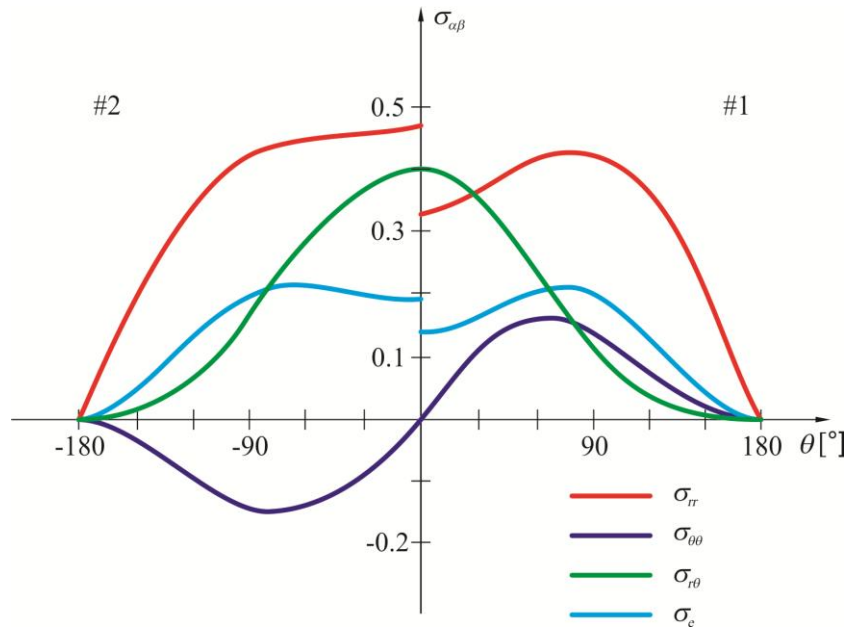
$$(\varepsilon_{11})_1 = (\varepsilon_{11})_2, \quad (2.5)$$

тако да ће на основу Хуковог закона за раванско стање напона важити једначина:

$$(\sigma_{11})_2 = \frac{E_2}{E_1}(\sigma_{11})_1 + (\nu_2 - \nu_1 \frac{E_2}{E_1})\sigma_{22}, \quad (2.6)$$

а за раванско стање деформације једначина:

$$(\sigma_{11})_2 = \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_2^2} \right) (\sigma_{11})_1 + \left(\frac{\nu_2}{1 - \nu_2} - \frac{\nu_1(1 + \nu_2)}{1 - \nu_2^2} \nu_1 \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_{22}. \quad (2.7)$$



Слика 2.2 Зависност промена напона у функцији промене угла θ , за произвољну биматеријалну комбинацију, [28], [48]

За разлику од хомогеног материјала код кога су симетрични и кососиметрични модови оптерећења одвојени, за случај прслине на биматеријалном интерфејсу не постоји тако јединствена и једноставна физичка интерпретација. За прслину на интерфејсу симетрични и кососиметрични модови (Мод I и Мод II) оптерећења су међусобно повезани и зависе један од другог. Функције угла $\Sigma_{ij}^{I,II}(\theta)$ зависе од еластичних карактеристика биматеријалне комбинације преко параметра ε се зове *биеластична константа* или *осцилаторни индекс*. Овај параметар је карактеристика прслине на интерфејсу и одређује се као [1], [13]:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right), \quad (2.8)$$

где је β један од два Дундурсова параметра [8] који се дефинишу као:

$$\alpha = \frac{\mu_2(\kappa_1 + 1) - \mu_1(\kappa_2 + 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}, \quad (2.9)$$

$$\beta = \frac{\mu_2(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_2 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)},$$

где је: μ_i - модул клизања, а ν_i - је Поасонов коефицијент. Коефицијенти κ_i се израчунавају по:

$$\kappa_i = 3 - 4\nu_i,$$

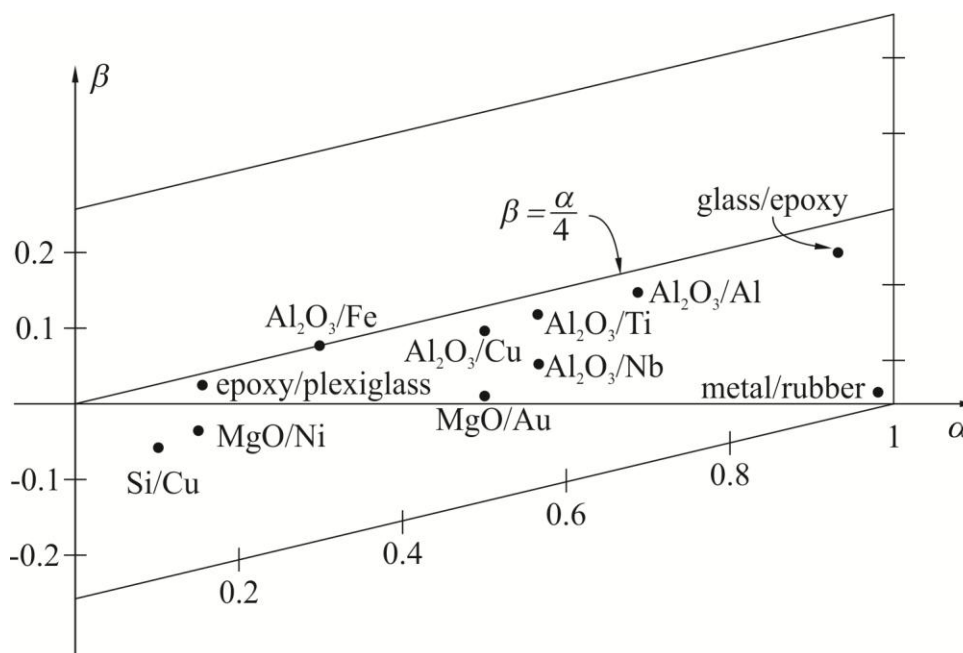
$$\kappa_i = \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i}, \quad (2.10)$$

за раванско стање деформације и за раванско стање напона респективно. Индекси 1 и 2 односе на материјал изнад и испод интерфејса, респективно. Дундурсови параметри морају да задовоље услове $\alpha \in [-1, 1]$ и $(\alpha - 4\beta) \in [-1, 1]$.

На слици 2.3 приказана је вредност Дундурсових параметара за неке комбинације материјала који чине интерфејс.

K_{III} у једначини (2.1) представља фактор интензитета напона за Мод III који има облик аналоган оном код хомогеног тела. За разлику од случаја хомогеног материјала где постоје одвојени фактори интензитета напона за Мод I и Мод II, K_I и K_{II} , овде постоји један комплексни фактор интензитета напона K , за раванске модове. Комплексни фактор интензитета напона K и фактор интензитета напона за Мод III K_{III} имају различите димензије [13]:

$$K = [напон] \cdot [дужина]^{1/2-i\varepsilon} \text{ и } K_{III} = [напон] \cdot [дужина]^{1/2}.$$



Слика 2.3 Дундурсови параметари за неке комбинације материјала који образују интерфејс [14]

Комплексни фактор интензитета напона представља карактеристику самог интерфејса и материјала који га чине. Он се може претставити у уопштеном облику:

$$K = YT\sqrt{L}L^{-i\varepsilon}e^{-i\psi}, \quad (2.11)$$

где су:

Y - бездимензиона реална позитивна величина,

T - интензитет напона услед примењеног оптерећења на узорак,

L - карактеристична дужина,

ψ - фазни угао од $KL^{i\varepsilon}$.

Овде је битно напоменути да L не мора обавезно бити дужина пррлине, већ ова величина може представљати и дебљину слоја или нешто слично. Величина ψ се често зове и *фазни угао комплексног фактора интензитета напона* или *фазни угао примењеног оптерећења*. Величине Y и ψ су карактеристике интерфејса и зависе како од примењеног оптерећења и уопштено од односа модула еластичности тако и од карактеристичних димензија тела са пррлином.

Посматрајући једначине (2.1) и (2.2) закључује се да за биматеријални проблем K_I и K_{II} нису константни као у случају хомогеног материјала [53]. Код пррлине на интерфејсу равански модови су међусобно зависни:

$$K = K_1 + iK_2, \quad (2.12)$$

где су K_1 и K_2 нормална, односно смицајна компонента фактора интензитета напона, респективно. Заправо, ове величине су функције r , и одређују се као:

$$\begin{aligned} K_1 = K_I(r) &\equiv \operatorname{Re}(Kr^{i\varepsilon}) = YT\sqrt{L} \cos[\psi - \varepsilon \ln(L/r)] \\ K_2 = K_{II}(r) &\equiv \operatorname{Im}(Kr^{i\varepsilon}) = YT\sqrt{L} \sin[\psi - \varepsilon \ln(L/r)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ако се анализира једначина (2.13) може се видети да се однос

$$\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}} = \frac{K_2}{K_1} = \tan\left(\psi - \varepsilon \ln \frac{L}{r}\right), \quad (2.14)$$

мења са r . Величина $\psi - \varepsilon \ln \frac{L}{r}$ представља локални фазни угао поља или фазни индекс.

Ради бољег и лакшег дефинисања промене локалног фазног угла са променом растојања r од врха прслине неопходно је да се вектор сила (напона) које делују на интерфејсу претстави као: $t = \{t_1, t_2, t_3\} = \{\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}\}$. За:

$$t = t_1 + i \cdot t_2, \quad (2.15)$$

биће

$$t = |t| \cdot e^{i\psi_r} = \frac{Kr^{i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (2.16)$$

где фазни угао ψ_r представља меру односа нормалних и раванских смичућих сила на растојању r испред врха прслине. При промени растојања од r_1 до r_2 фазни угао се мења сагласно једначини:

$$\psi_{r_1} - \psi_{r_2} = \varepsilon \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \quad (2.17)$$

За материјале који су значајни за практичну примену, промена фазног угла са променом растојања је величине:

$$(180/\pi)\varepsilon \ln(10) = \varepsilon^*. \quad (2.18)$$

Ово се тумачи тако да када се растојање повећа за 10 фазни угао се промени за степен, па је тако за, на пример биматеријалну комбинацију за интерфејс Ti/Al₂O₃, за $\varepsilon = 0.039$ за фазни индекс је $\varepsilon^* = 5.15^\circ$.

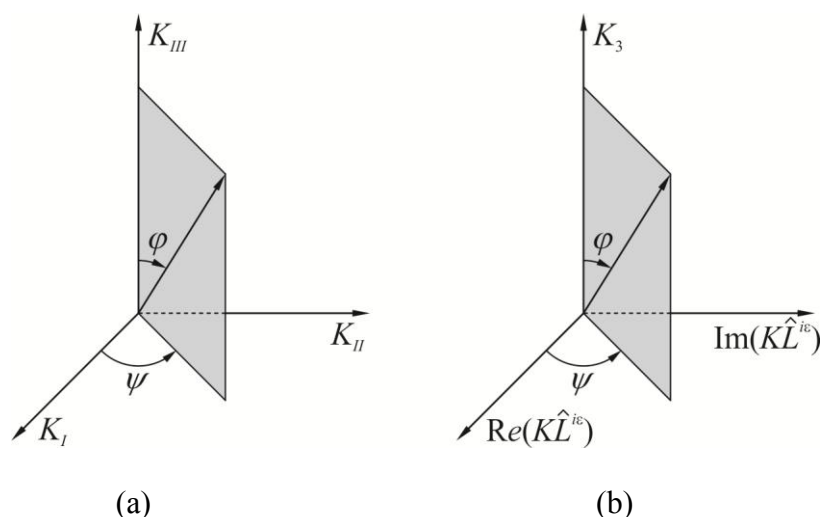
Када је осцилаторни индекс $\varepsilon = 0$, мешовити мод се дефинише на уобичајени начин. Ако су присутна сва три мода, мешовити мод, у близини врха прслине, када $r \rightarrow 0$, је одређен са два просторна угла ψ и φ у простору вектора интерфејсних сила $t = \{\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}\}$:

$$\begin{aligned}\tan \psi &= \left(\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}} \right)_{r \rightarrow 0} \\ \cos \varphi &= \left(\frac{\sigma_{23}}{|t|} \right)_{r \rightarrow 0}\end{aligned}\quad (2.19)$$

По аналогји, еквивалентна дефиниција може да се примени и за (K_I, K_{II}, K_{III}) простор:

$$\begin{aligned}tg \psi &= \frac{K_{II}}{K_I} \\ \cos \varphi &= \frac{K_{III}}{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2}}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Ове дефиниције се такође примењују за пррлине у хомогеним материјалима. Углови ψ и φ су приказани на слици 2.4 [13].



Слика 2.4. Мешовити мод дефинисан преко просторних углова у K - простору
(a) за $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon \neq 0$

Када је осцилаторни индекс ε различит од 0 утицаји затезања и смицања близу врха пррлине нису раздвојени. Да би се одредила релативна зависност смицајних од нормалних сила, односно зависност Моде II према Моду I мора се изабрати карактеристична дужина \hat{L} . За осцилаторно поље мешовити Мод се одређује као:

$$\begin{aligned}tg \hat{\psi} &= \left(\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{22}} \right)_{r \rightarrow \hat{L}} \\ \cos \varphi &= \left(\frac{\sigma_{23}}{|t|} \right)_{r \rightarrow 0}\end{aligned}\quad (2.21)$$

Ова карактеристична дужина \hat{L} се бира произвољно, али се може сматрати инваријантном за сваку појединачну биматеријалну комбинацију [12]. То значи да се \hat{L} може сматрати независном од величине и типа узорка. Нека разумна величина за избор \hat{L} је дужина еластичне области узорка. Због тога се сматра да је уобичајена величина $\hat{L} = 100 \mu\text{m}$ права мера за већину кртих биматеријалних узорака у лабораторијским истраживањима.

Ако је напонско поље дефинисано једначином (2.1), а силе једначином (2.2), мешовити Мод $\hat{\psi}$ и φ у K - простору, слика 2.4, се дефинише као:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \hat{\psi} &= \frac{\operatorname{Im}(K\hat{L}^{i\varepsilon})}{\operatorname{Re}(K\hat{L}^{i\varepsilon})} \\ \cos \varphi &= \frac{K_{III}}{\sqrt{|K|^2 + K_{III}^2}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Последица осцилаторног поља је та да се однос сила (напона) t_1/t_2 полако мења како се координата r удаљава од врха прслине. Нека локални фазни углови $\hat{\psi}_1$ и $\hat{\psi}_2$ одговарају дужинама \hat{L}_1 и \hat{L}_2 , респективно. На основу прве од једначина (2.21) може да се напише:

$$\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_1 = \varepsilon \ln \left(\frac{\hat{L}_2}{\hat{L}_1} \right), \quad (2.23)$$

што нам показује да неће бити велика разлика за различите дужине \hat{L} . На пример, за епокси/стакло интерфејс $\varepsilon = 0.06$, промена локалног фазног угла је $\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_1 = 7.9^\circ$ ако се растојање повећа десет пута.

На основу до сада реченог може да се закључи да напонско поље у врху биматеријалне прслине за мешовити Мод зависи од фазног угла оптерећења. На слици 2.5 приказана је зависност нормалног напона $\sigma_{\theta\theta}$ од фазног угла оптерећења ψ .

Ако се са δ_i , ($i=1,2,3$) означе компоненте релативног померања између две полазне идентичне тачке на површинама прслине, за изотропно тело биће [13]:

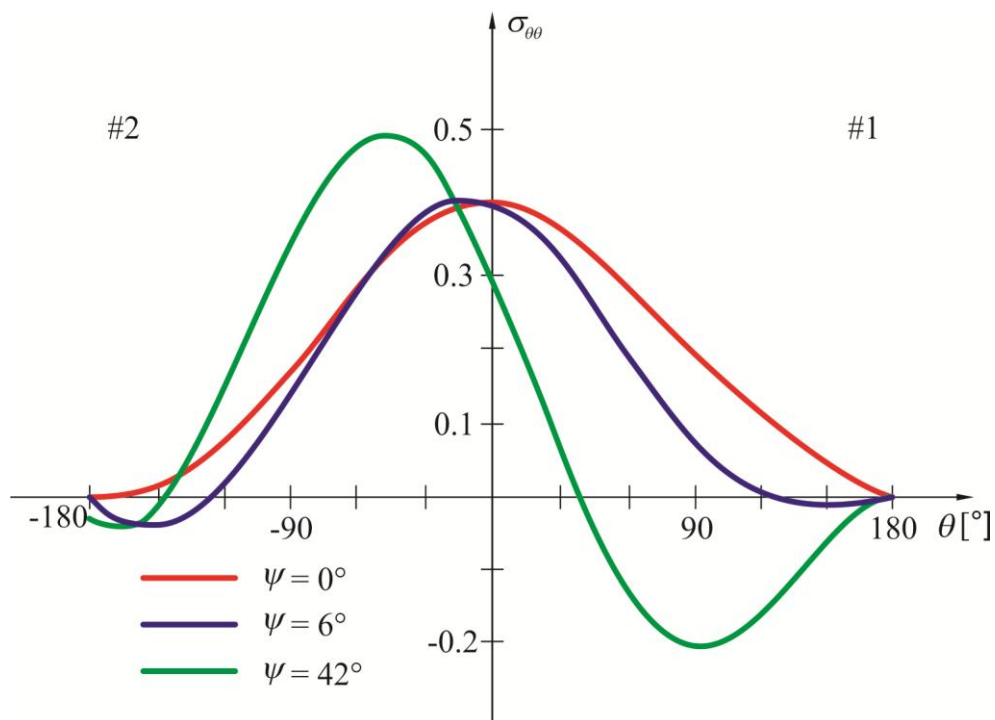
$$\begin{aligned} \delta_2 + i\delta_1 &= \frac{1}{(1 + 2i\varepsilon) \cosh(\pi\varepsilon)} \cdot \frac{4Kr^{i\varepsilon}}{E^*} \cdot \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \\ \delta_3 &= \frac{2K_{III}}{\mu^*} \cdot \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

где је:

$$\frac{2}{E^*} = \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \quad (2.25)$$

$$\frac{2}{\mu^*} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

и $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ за раванско стање деформације, а $E' = E$ за раванско стање напона.



Слика 2.5 Промена нормалног напона $\sigma_{\theta\theta}$ у функцији фазног угла оптерећења ψ

Веза између брзине ослобађања енергије и фактора интензитета напона је:

$$G = \frac{1}{\cosh^2(\pi\varepsilon)} \cdot \frac{|K|^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu^*} \quad (2.26)$$

Преклапање површина и контакт код биматеријалних комбинација не укључује поље Моде III. Ова разматрања су била стриктно ограничена на спрегнуте раванске Модове. Сагласно једначини (2.24) међусобно пробијање површина прслине, $\delta_2 < 0$ дешаваће се за неко довољно мало r . Знајући да је $\delta = \delta_2 + i\delta_1$ и то примењујући у једначи (2.24) добија се:

$$\delta_2 = |\delta| \cos \left[\psi - \arctan(2\varepsilon) - \varepsilon \ln \left(\frac{L}{r} \right) \right] \quad (2.27)$$

Претпоставља се да је величина контактне зоне мала у поређењу са карактеристичном дужином L , па се она одређује из услова да је за довољно велико r , отварање прслине дефинисано са δ_2 једнако нули или постаје негативно. За $\varepsilon > 0$, биће:

$$r_c = Le^{\frac{\frac{\pi}{2} + \psi - \arctan(2\varepsilon)}{\varepsilon}}. \quad (2.28)$$

За $\varepsilon < 0$, ε се мења у $-\varepsilon$ и ψ у $-\psi$ у једначини (2.28). На пример, ако је $L = 10 \text{ mm}$, $|\psi| \leq \pi/4$ и $|\varepsilon| \leq 0.03$, онда је $r_c < 1 \text{ \AA}$, што је мање од физички мерљивих дужина.

Из свега овога може се закључити да се стање у врху прслине може да окарактерише комплексним фактором интензитета напона, K ако је $r_c/L \ll 1$. Рајс [12] је предложио коришћење следећег услова $r_c/L < 0.01$. Ако се овај услов примени у једначини (2.28), добија се следећа област за фазни угао примењеног оптерећења ψ у којима се K може применити, а уз апроксимацију да је за мале вредности углова $\arctan(2\varepsilon) \approx 2\varepsilon$:

$$\varepsilon < 0 \quad -\frac{\pi}{2} + 6.6\varepsilon < \psi < \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon \quad (2.29)$$

$$\varepsilon > 0 \quad -\frac{\pi}{2} + 2\varepsilon < \psi < \frac{\pi}{2} + 6.6\varepsilon \quad (2.30)$$

Ако се са r_k означи карактеристични радијус области око врха прслине, а чије карактеристике могу да се опишу једначином (2.1), може се сматрати да је r_k део релевантне димензије геометрије прслине. На растојању које је довољно близу врха прслине, поље дефинисано једначином (2.1) се не примењује због присуства:

- зоне нелинеарности материјала (пластичности) r_p ,
- контактне зоне r_c и/или
- мале нехомогености и неправилности r_i (зрна, празнина, микропрслина, међудифузна зона).

Ако су ове зоне и/или неправилности довољно мале у поређењу са карактеристичном дужином L , онда постоји кружна област:

$$r_k > r \gg r_p, r_c, r_i \quad (2.31)$$

у којој је напонско поље дефинисано једначином (2.1) доминантно. Другим речима, ако је једначина (2.31) задовољена, K једнозначно одређује поље унутар кружне области око врха прслине. Процену величине r_k за геометрију прслине коначних димензија дали су О'Дауд (O'DOWD) и остали 1992. [54], а за вишеслојне материјале Гу (Gu) и Сих 1992.

У њиховим радовима је показано да је:

$$r_k \approx \frac{L}{10}, \quad (2.32)$$

где је дужина L најмања дужина од прслине, дужина влакна без прслине, дебљина слоја или растојање између врха прслине и тачке у којој делује оптерећење. Комбинујући једначине (2.31) и (2.32) добија се:

$$\frac{L}{10} > r_k \gg r_p, r_c, r_i, \quad (2.33)$$

а из тога произилази да је услов за постојање K кружне области:

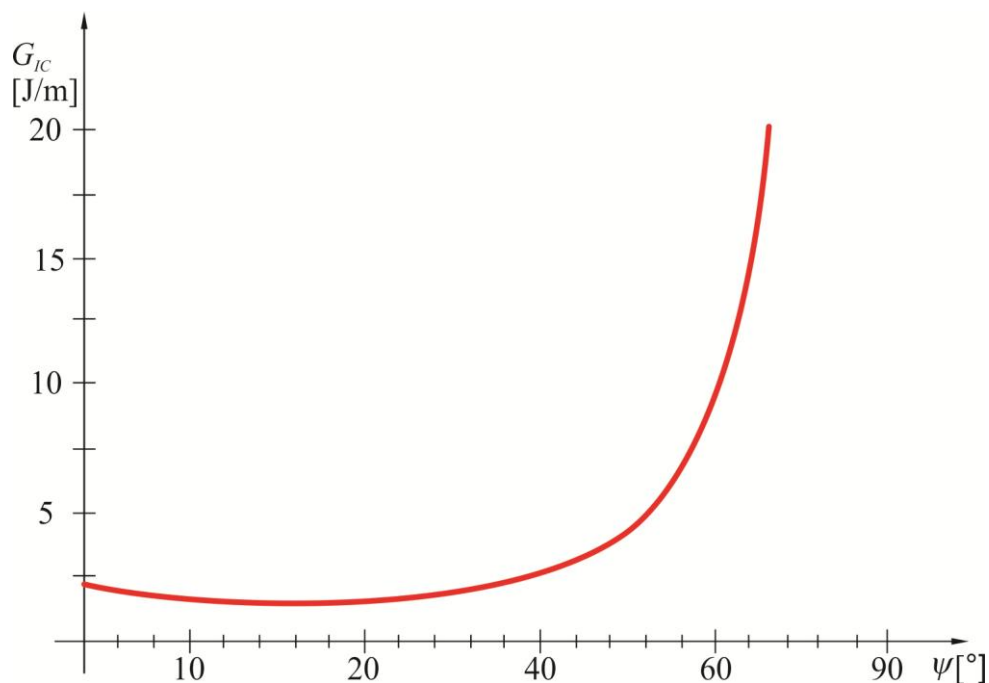
$$L > 100 \cdot (r_p, r_c, r_i). \quad (2.34)$$

На основу једначине (2.28) може се приметити да величина контактне зоне зависи од фазе примењеног оптерећења ψ , али не и од његовог интензитета, док је величина која описује неправилности карактеристика биматеријала ε . Насупрот томе, величина пластичне зоне је пропорционална $|K|^2$, то јест одређује се квадратом интензитета примењеног оптерећења. Ако је биматеријални интерфејс релативно жилав, или један од материјала има нижу границу течења, мерљива пластична зона се развија пре развоја лома. У том случају коришћење K - концепта не даје задовољавајуће резултате.

Ако величина карактеристичне дужине L задовољава једначину (2.34), тада се с обзиром на разматрану геометрију прслине, различитост материјала и примењена оптерећења, са врхом прслине може да се оствари веза само преко комплексног фактора интензитета напона K . Детаљи који не утичу на овај фактор K неће утицати ни на поље у врху прслине све док се оно једнозначно карактерише са K . Даље, овај фактор одређује и граничне услове за унутрашњу област где се процес лома дешава, то јест развој лома може да се изрази у функцији од K . Због свега претходно речног, у линеарно еластичној механици лома хомогених материјала и механици лома на интерфејсу основна идеја је K - доминација.

У експериментима лома је запажено да прслине у хомогеним, изотропним, кртим телима пропагирају дуж равни испред које постоје услови који важе за Мод I. На основу тога се може дефинисати параметар K_{IC} за сваки материјал, а који одређује његову отпорност на лом. Насупрот томе, када постоје равни са нижим отпором лома прслина може да буде „заробљена” у тој равни без обзира на услове мешовитог мода. Пример тога су ортотропни материјали као што су композити и крти кристали. Код ових материјала постоје такозване слабије равни: лонгитудиналне равни за композите и равни цепања за крте кристале. Пример таквих равни представља и интерфејс, ако има већу кртост од основних материјала. Експериментима је показана чињеница да отпорност лому за такве слабије равни јако зависи од мешовитог мода. Из овога се изводи закључак да постоје различите вредности жилавости за различите мешовите модове, чиме се у потпуности карактерише отпорност лома слабијих равни.

За мешовити Мод $\hat{\psi}$ и φ , жилавост лома интерфејса G_{IC} се дефинише као брзина ослобађања енергије која је потребна за почетак раста прслине. Жилавост лома $G_{IC}(\hat{\psi}, \varphi)$ је карактеристика биматеријалног интерфејса. Крива жилавости лома за произвољано дефинисан интерфејс је приказана на слици 2.6.



Слика 2.6 Крива жилавости лома интерфејса

За биматеријални интерфејс $G_{IC}(\hat{\psi}, \varphi)$ представља површ у K - простору која се у принципу одређује експериментално. Под оптерећењем прслина неће пропигирати све док оптерећење не достигне жилавост лома, то јест за мешовити Мод услов лома је:

$$G(\hat{\psi}, \varphi) = G_{IC}(\hat{\psi}, \varphi). \quad (2.35)$$

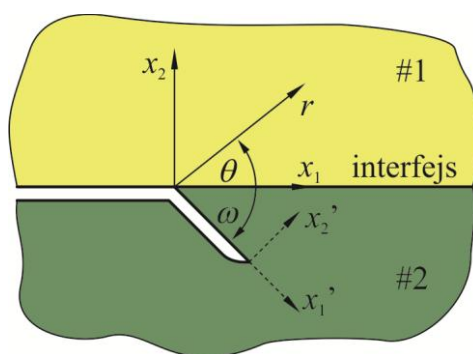
Отпорност лома је недвосмислено одређена кривом $G_{IC}(\hat{\psi}, \varphi)$ заједно са \hat{L} којом се дефинише $\hat{\psi}$. Значи, $G_{IC}(\hat{\psi}, \varphi)$ је критична вредност брзине ослобођања енергије неопходна да прслина напредује дуж интерфејса у условима мешовитог мода. Интерфејсну жилавост за неколико биматеријалних комбинација мерили су Цао (CAO) и Еванс (EVANS) 1989. [55], Ванг (WANG) и Суо (SUO) 1990. [56] и Стаут (STOUT) и остали 1992.

2.2. Утицај положаја прслине у односу на интерфејс на ширење прслине

Како је жилавост интерфејса између два различита материјала мања од жилавости материјала који га образују, то ће се прлина се најчешће појављивати на интерфејсу. У неким случајевима прлина може да се појави у једном од материјала и то тако да напада интерфејс под неким углом или је паралелна са њим - субинтерфејсна прлина. Такође, прлина која се шири дуж интерфејса у неким случајевима може да скрене са истог и да настави да се шири у једном од материјала. Овде је анализирано неколико основних примера приближавања прслине интерфејсу, скретања прслине са интерфејса и субинтерфејсна прлина која је паралелна интерфејсу, као и услови под којима се све то дешава. Одговор на питање да ли ће прлина која се приближава интерфејсу да га пређе или ће да скрене у њега и да настави да се шири дуж интерфејса је од великог значаја за дизајнирање интерфејса између влакана и основе код влакнастих композитних материјала, где се жели да прлина која се шири у основи, а приближава влакну, дефлектује дуж интерфејса остављајући влакно неоштећено. Такође, овде су приказане могућности одређивања релативне жилавости интерфејса према делу материјала без интерфејса да би се осигурало да се прлина шири дуж интерфејса пре него да га пређе и настави да се шири у материјалу преко интерфејса.

Скретање прслине са интерфејса

Овде се разматрају услови под којима прлина скреће са интерфејса у један од материјала који га чине и дефинишу се услови неопходни да прлина настави да се креће дуж интерфејса. Основу за ову анализу поставили су Хи и Хачинсон [13]. Геометрија интерфејса који се посматра је приказана на слици 2.7.



Слика 2.7 Геометрија за прлину која скреће са интерфејса

Прлина која се шири лежи на биматеријалном интерфејсу између два различита полубесконачна изотропна еластична тела. Ширењем прслине праволинијска прлина дужине a скреће под углом ω у материјал испод интерфејса, односно у материјал 2. Претпоставља се да је дужина a мала у поређењу са дужином главне прслине и да се анализира проблем полубесконачне прслине на

интерфејсу. Дакле, напонско поље пре скретања прслине ($a \rightarrow 0$) је сингуларно поље интерфејсне прслине које се карактерише комплексним фактором интензитета напона дефинисаног једначином (2.12).

$$K = K_1 + iK_2$$

Напонско поље у врху прслине која је скренула са интерфејса мора се окарактерисати комбинацијом стандардних фактора интензитета напона за Мод I и Мод II, K_I и K_{II} . Предстојећа анализа треба да дâ везу између фактора интензитета напона K_I и K_{II} за прслину која је скренула и фактора K_1 и K_2 за интерфејсну прслину као функцију угла ω и еластичних модула материјала. Ова веза се добија упоређивањем брзина ослобађања енергије за прслину која је скренула са интерфејса са брзином ослобађања енергије за интерфејсну прслину.

Иако постоје три независна бездимензионална параметра материјала, Дундурс је показао [8] да решење оваквих проблема зависи само од два параметра, (2.9):

$$\alpha = \frac{\mu_2(\kappa_1 + 1) - \mu_1(\kappa_2 + 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)},$$

$$\beta = \frac{\mu_2(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_2 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}.$$

Треба поновити да су оба параметра α и β једнака нули када су материјали са обе стране интерфејса идентични.

Напонско поље за бесконачну интерфејсну прслину ($a = 0$) има облик [57]:

$$\sigma_{ij} = \text{Re} \left[K(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} r^{i\varepsilon} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \right], \quad (2.36)$$

где су:

r и θ - поларне координате,

$K = K_1 + iK_2$ - комплексни фактор интензитета напона, и

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \quad (2.37)$$

биеластична константа или осцилаторни индекс.

Зависност $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$ од угла је комплексна променљива, али је и јединствена за дату биматеријалну комбинацију. На интерфејсу испред врха прслине силе се могу представити једначином [3], [4], [5]:

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = K(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} r^{i\varepsilon}. \quad (2.38)$$

Интерфејсни фактори интензитета напона се дефинишу тако да $K_1 \rightarrow K_I$ и $K_2 \rightarrow K_{II}$ када су материјали који чине интерфејс интерфејса идентични. Такође треба напоменути да за $\beta = 0$ и $\varepsilon = 0$, K_1 представља меру нормалне компоненте напона који делује на интерфејс, док K_2 мери смицајну компоненту са уобичајеном дефиницијом фактора интензитета напона.

У даљем разматрању се комплексни фактор интензитета напона узима као познати параметар оптерећења. За одређени проблем интерфејсне прслине K има следећи димензиони облик (2.11):

$$K = Y T \sqrt{L} L^{-i\varepsilon} e^{-i\psi}$$

или [22]

$$K = K_1 + iK_2 = (\text{применјено оптерећење}) \sqrt{L} L^{-i\varepsilon} f, \quad (2.39)$$

а који следи из једначине (2.38), где L представља неку карактеристичну дужину, а f је бездимензионална функција која зависи од геометрије узорка, карактеристика материјала који образују интерфејс и других фактора.

Напонско поље у врху прслине која је скренула у материјал 2 је напонско поље са факторима интензитета напона K_I и K_{II} такво да је:

$$\sigma_{22'} + i\sigma_{12'} = (K_I + iK_{II})(2\pi r)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.40)$$

на линији испред врха ($x'_1 > 0$, $x'_2 = 0$). Једначина (2.40) важи за координатни систем у врху прслине (x'_1 , x'_2), приказан на слици 2.6.

Овај проблем се посматра као асимптотски, где је a много мање у поређењу са било којом другом дужинском величином. Интерфејсна прслина се може посматрати као полубесконачна, са напонима који се могу дефинисати једначином (2.2). Веза између задатог комплексног фактора интензитета напона за интерфејс, K и фактора интензитета напона за прслину која је скренула може да се напише у облику:

$$K_I + iK_{II} = c(\omega, \alpha, \beta) K a^{i\varepsilon} + \bar{d}(\omega, \alpha, \beta) \bar{K} a^{-i\varepsilon}, \quad (2.41)$$

где је:

$(\bar{\quad})$ - означавање коњуговано комплексне величине,

c и d - комплексне функције у функцији ω , α и β .

Фактори напона K_I и K_{II} имају димензије $K_{I,II} = [\text{напон}] \cdot [\text{дужина}]^{1/2}$, док K има облик дефинисан једначином (2.39). Из димензионе анализе следи закључак да дужина a мора да се комбинује са комплексним фактором интензитета напона K у облику $K a^{i\varepsilon}$ или коњуговано комплексном облику $\bar{K} a^{-i\varepsilon}$, а узимајући у обзир да је у

асимптотском проблему a једина величина која дефинише дужину, а различита је у односу на дужинске величине укључене у K у једначини (2.39).

Једначина (2.40) представља општи приказ $K_I + iK_{II}$ добијен на основу претходног разматрања и линеарности. Ознака \bar{d} , а не d , се користи због договора у означавању. Када је $\varepsilon = 0$, односно када су материјали преко интерфејса идентични, или када је $\beta = 0$, реални и имагинарни делови једначине (2.41) постају:

$$\begin{aligned} K_I &= (c_{\text{Re}} + d_{\text{Re}})K_1 - (c_{\text{Im}} + d_{\text{Im}})K_2 \\ K_{II} &= (c_{\text{Im}} - d_{\text{Im}})K_1 + (c_{\text{Re}} + d_{\text{Re}})K_2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

где су: $c = c_{\text{Re}} + ic_{\text{Im}}$ и $d = d_{\text{Re}} + id_{\text{Im}}$, (Re и Im у индексу означавају реални односно имагинарни део комплексних функција c и d).

Веза између брезине ослобађања енергије G_0 за интерфејсну прслину која се шири дуж интерфејса и комплексног фактора интензитета напона K је [6];

$$G_0 = \left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K \bar{K}}{16 \cosh^2(\varepsilon\pi)}. \quad (2.43)$$

Ако прслина скреће са интерфејса ($a > 0$), брзина ослобођања енергије се може дефинисати једначином:

$$G = \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_2} (K_I^2 + K_{II}^2). \quad (2.44)$$

Комбиновањем једначина (2.41) и (2.44) добија се:

$$G = \frac{\kappa_2 + 1}{8\mu_2} \left[(|c|^2 + |d|^2) K \bar{K} + 2 \text{Re}(cd K^2 a^{2i\varepsilon}) \right]. \quad (2.45)$$

Да би се једначина (2.45) приказала у облику погоднијем за анализу, K се може приказати као:

$$K \equiv K_1 + iK_2 = |K| e^{i\psi} L^{-i\varepsilon}, \quad (2.46)$$

што је сагласно једначини (2.13) и (2.39), а где L представља карактеристичну дужину за проблем интерфејсне прслине када је $a = 0$. Реална угаона величина ψ представља фазни угао комплексног фактора интензитета напона и користи се као мера комбинације оптерећења.

Из једначина (2.43), (2.45) и (2.46) се добија:

$$G = \frac{G_0 \left[(|c|^2 + |d|^2) + 2 \text{Re}(cd e^{2i\bar{\psi}}) \right]}{q^2}, \quad (2.47)$$

где је:

$$q = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1+\alpha}} \quad \text{и} \quad \bar{\psi} = \psi + \varepsilon \ln\left(\frac{a}{L}\right).$$

Када је $\varepsilon = 0$, фактори интензитета напона, K_I и K_{II} и брзина ослобађања енергије G не зависи од дужине ширења прслине после скретања са интерфејса a . Ово је случај када су материјали који чине интерфејс идентични $\alpha = \beta = 0$. На основу једначине (2.37) и [58], [59] $\varepsilon = 0$ и када је $\beta = 0$, без обзира на вредност α . Осцилаторно понашање поља у врху интерфејсне прслине и зависност G од a појављује се само када је када је Дундурсов параметар $\beta \neq 0$.

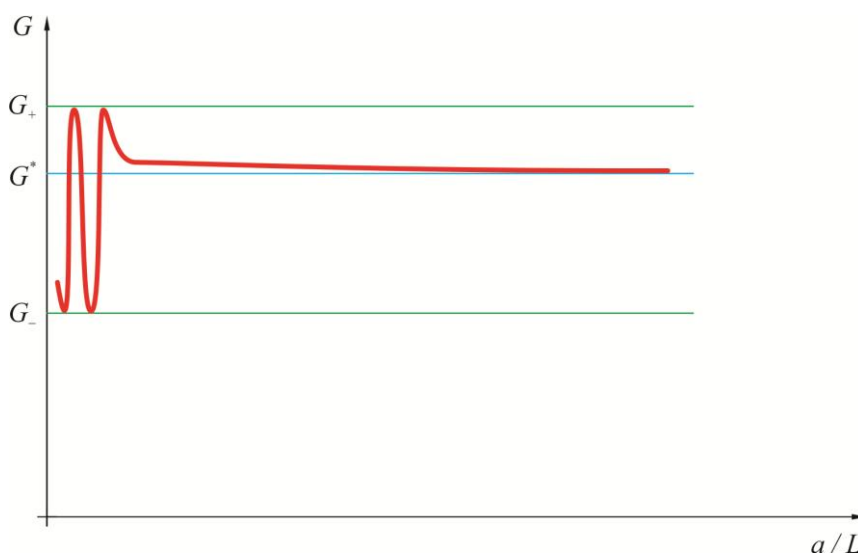
Када је $\beta \neq 0$, а према томе и $\varepsilon \neq 0$, дешава се контакт између површина прслине на неком врло малом растојању од врха интерфејсне прслине са $a = 0$. Контакт између површина прслине је тада мањи него код прслине која скреће ($a > 0$, $\omega > 0$), а оптерећене су тако да су K_I и K_{II} позитивни, па се прслина отвара код скретања. Ипак, контакт ће неизбежно да се дешава ако је $\varepsilon \neq 0$ када је a довољно мало у поређењу са L [9].

Зависност брзина ослобађања енергије G од дужине прслине после скретања са интерфејса a за дати угао скретања ω приказан је на слици 2.8, као што је описано једначином (2.47) када је $\varepsilon \neq 0$.

Када је a/L довољно мало брзина ослобађања енергије G осцилује између максималне G_+ и минималне G_- вредности које се могу одредити из:

$$\begin{aligned} G_+ &= \frac{G_0(|c|+|d|)^2}{q^2} \\ G_- &= \frac{G_0(|c|-|d|)^2}{q^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

а које зависе од K_1 и K_2 само преко брзине ослобађања енергије G_0 .



Слика 2.8 Дијаграм промене брзине ослобађања енергије са дужином сегмента прслине која је скренула за $\beta \neq 0$

За вредност a/L изван области осциловања G се асимптотски приближава вредности G^* датој једначином (2.47) за $\bar{\psi} = \psi$, односно:

$$G^* = \frac{G_0 \left[(|c|^2 + |d|^2) + 2 \operatorname{Re}(c d e^{2i\psi}) \right]}{q^2}. \quad (2.49)$$

Може да се докаже да је G^* идентична са G за случај када је $\varepsilon = 0$. Контакт који се остварује између површина прслине није значајан за предвиђање G преко (2.47) када је a/L у области где се постоји осцилаторно понашање.

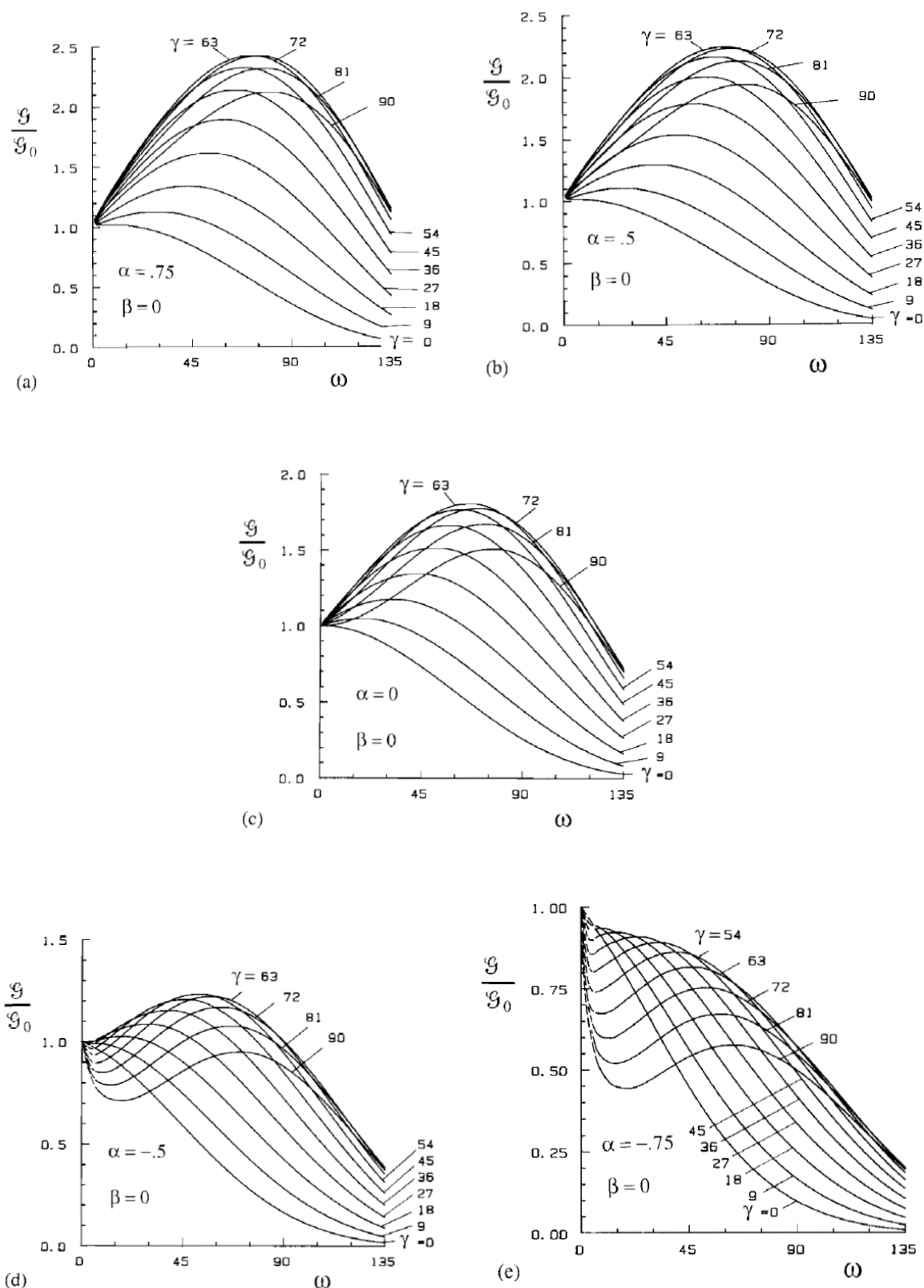
При презентовању резултата за брзину ослобађања енергије G када је $\varepsilon \neq 0$ појављује се карактеристика G^* . Посматрано са физичке тачке гледишта G^* је релевантна ако прслине које се шире из интерфејса имају дужине које су веће од контактне зоне. То значи да се G^* може користити за проверу скретања прслине са интерфејса ако је зона у којој се дешава лом на интерфејсу већа од контактне зоне предвиђене еластичним решењем. Ако то није случај, више пажње треба посветити зависности G од a и разматрати сам контакт. У сваком случају G^* има веома важну улогу у одређивању услова за скретање прслине са интерфејса. Једном емитована закривљена прслина има брзину ослобађања енергије која се рапидно приближава вредности G^* како јој дужина расте.

Све информације везане за проблем прслине која скреће са интерфејса могу се добити из једначина (2.42), (2.43) и (2.44) ако се знају $c(\omega)$ и $d(\omega)$. Ове коефицијенте су Хи и Хачинсон одредили су методом интегралних једначина и приказали их табеларно, [62]. Вељковић је у свом раду [28] дала побољшање ове методе тако што је за табеларне резултате дала апроксимацију следећим једначинама:

$$\begin{aligned} c(\omega) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\alpha}} \left(e^{-\frac{i\omega}{2}} + e^{-\frac{3i\omega}{2}} \right) \\ d(\omega) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} \left(e^{-\frac{i\omega}{2}} - e^{-\frac{3i\omega}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

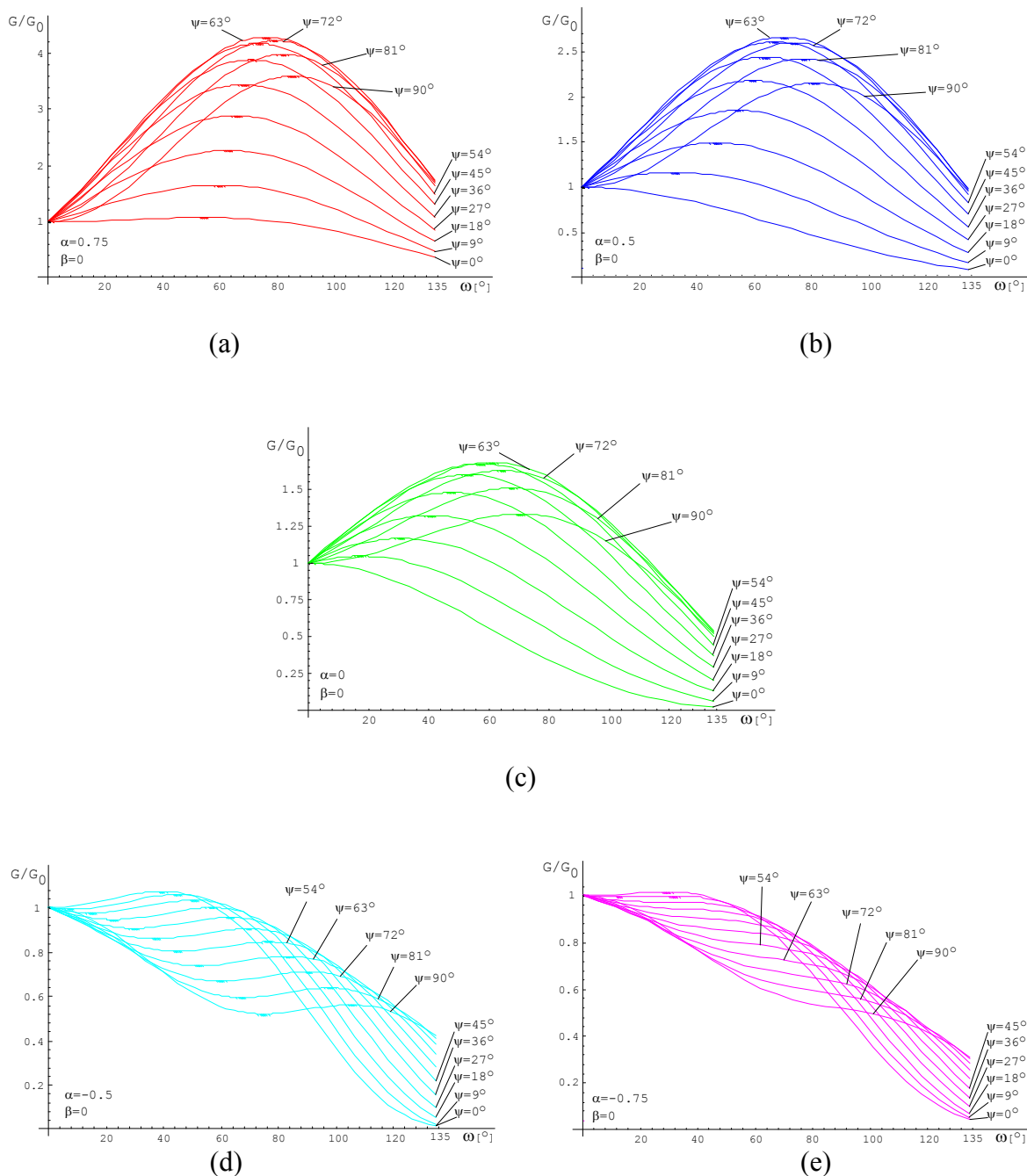
Ова апроксимација даје задовољавајуће резултате, грешка је мања од 1% за вредности $\omega < 45^\circ$, за веће вредности ω , грешка је између 5% и 10%.

На слици 2.9 је дат однос G/G_0 у функцији ω коришћењем табеларних података.



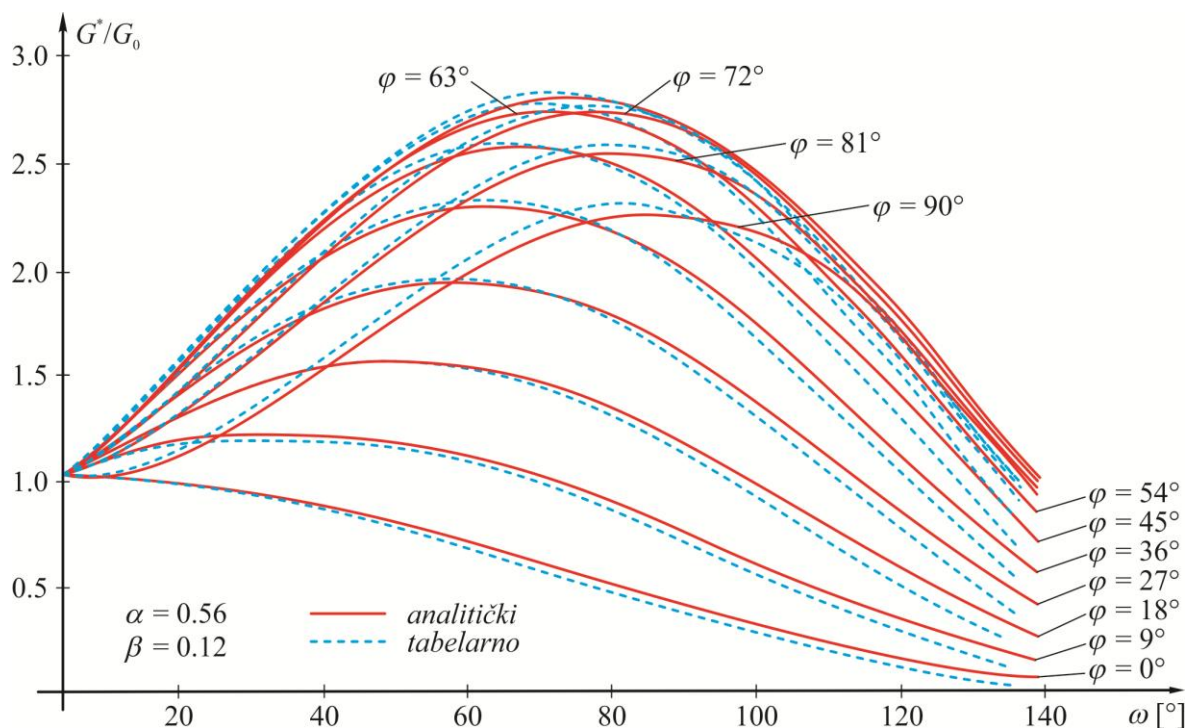
Слика 2.9 Промена G/G_0 са променом угла скретања за комбинације оптерећења одређене са $\psi = \arctan(K_2/K_1)$ за различите вредности α и $\beta = 0$ (табеларни подаци) [22]

На слици 2.10 је дат однос G/G_0 у функцији ω коришћењем једначине (2.47).



Слика 2.10 Промена G/G_0 са променом угла скретања за комбинације оптерећења одређене са $\psi = \arctan(K_2/K_1)$ за различите вредности α и $\beta = 0$ (коришћењем (2.50))

На слици 2.11 дато је поређење односа G/G_0 добијених табеларно и аналитичком методом.



Слика 2.11 Упоредни приказ односа G/G_0 добијених табеларно и аналитичком методом [64]

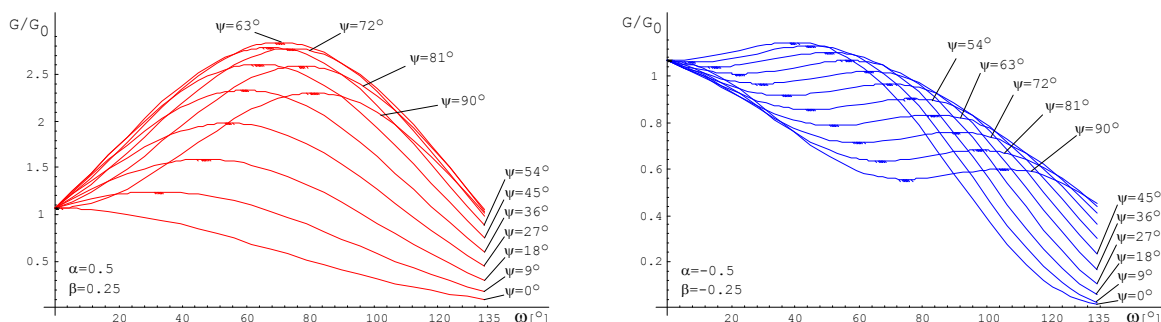
Специјалан биматеријални проблем код кога се не појављује осцилаторни карактер напонског поља представља случај $\beta = 0$ и $\alpha \neq 0$. При овој вредности Дундурсових параметара биеластична константа има вредност $\varepsilon = 0$. Упрошћено речено, када је $\alpha > 0$ значи да је материјал 1 има већу кртост од материјала 2 и обрнуто. Све ово важи за скретање пррлине у материјал 2.

Анализирајући слику 2.9 долази се до следећих закључака:

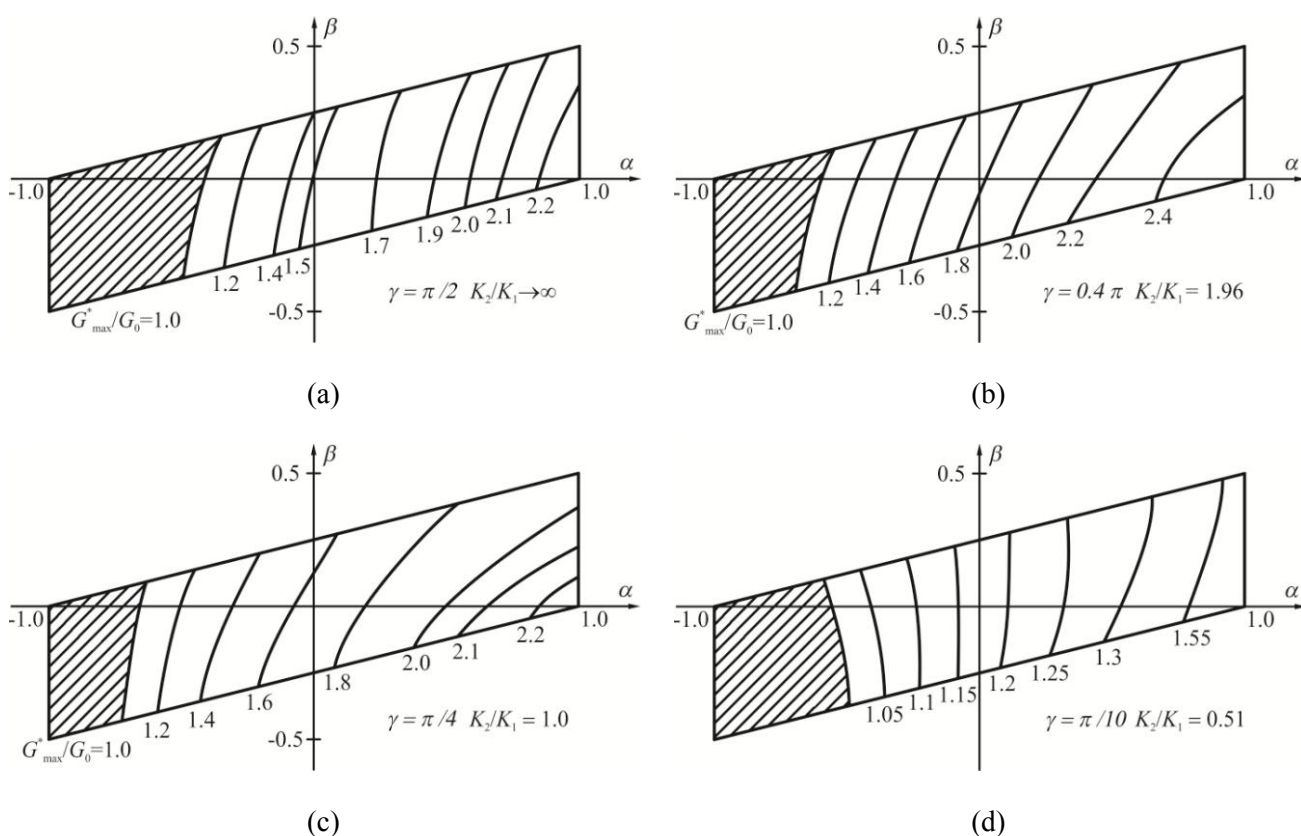
- Што је већа еластичност материјала у који пррлина скреће већа је брзина ослобађања енергије за исте остале факторе.
- Ако је материјал у који пррлина скреће релативно крући, $\alpha > 0$, брзина ослобађања енергије се смањује.

Ови закључци су условљени разликама у модулима еластичности два материјала који образују интерфејс. Ако су разлике у материјалу релативно велике, пррлина скреће у материјал веће кртости. Ово такође значи да у условима када је еластичнији материјал жилав, а мање еластичан материјал и интерфејс релативно крти приближно једнаких жилавости, пррлина ће тежити да настави да се шири дуж интерфејса за све комбинације оптерећења. Ако је крући материјал чак и мало мање жилав од интерфејса, пррлина може да напусти интерфејс, али и не мора да скрене.

На основу анализе једначине (2.47) G зависи од a за $\varepsilon \neq 0$, али се G приближава G^* за врло мало a . Дијаграми G^*/G_0 као функције угла ω приказани су на слици 2.12.

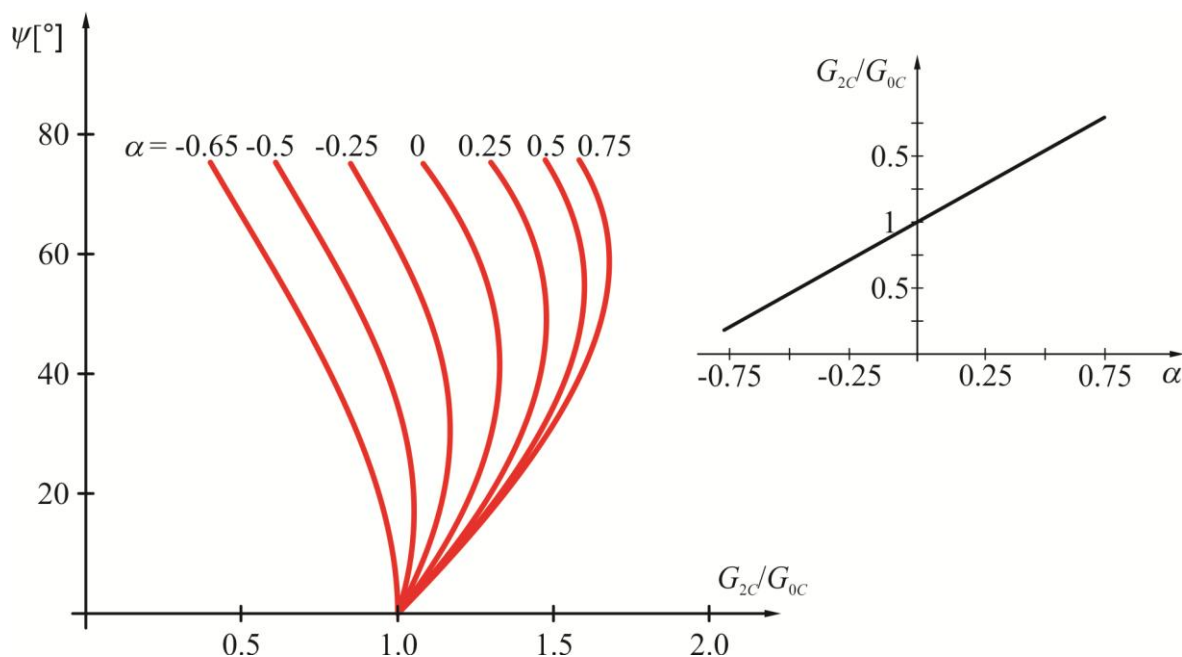

 Слика 2.12 Дијаграм G^*/G_0 у функцији ω

Контурни прикази максималних вредности G^*/G_0 , су приказани на слици 2.13, у функцији од α и β . Сваки од ова четири приказа одговара датој комбинацији оптерећења ψ . Из приложеног се види да однос G_{\max}^*/G_0 може варира и преко 2 пута за област $-1 < \alpha < 1$. Такође се види да у области $-0.1 < \beta < 0.1$ G_{\max}^* није у функцији од β [22].


 Слика 2.13 Контурни приказ максималне вредности G_{\max}^*/G_0 као функције α и β

Најједноставније речено пррлина остаје на интерфејсу све док је брзина ослобађања енергије за ширење пррлине на интерфејсу мања од брзине ослобађања енергије потребне за ширење пррлине у материјалу, односно за област оптерећења,

$0 \leq \psi < \psi_{max}$, прслина остаје на интерфејсу, док ће за $\psi > \psi_{max}$ да скрене у материјал. Слика 2.14 показује зависност ψ_{max} од G_{2c}/G_{0c} за различите вредности α и $\beta = 0$.



Слика 2.14 За комбинацију оптерећења $\psi = \arctan(K_2/K_1)$ која задовољавају област $0 \leq \psi \leq \psi_{max}$ прслина неће да скрене са интерфејса у материјал 2

Убачени дијаграм показује максималну вредност жилавости интерфејса и материјала 2 неопходну да прслина не скреће у материјал 2 за било коју комбинацију оптерећења.

Прслина паралелна са интерфејсом

Случај који је неопходно посебно разматрати је случај када угао скретања прслине $\omega \rightarrow 0$. Када ω постаје мало скренути сегмент постаје паралелан интерфејсу и проблем се своди на решавање полубесконачне прслине паралелне интерфејсу на растојању h испод интерфејса, слика 2.15 [9]. Ова прслина се још назива и субинтерфејсна прслина.

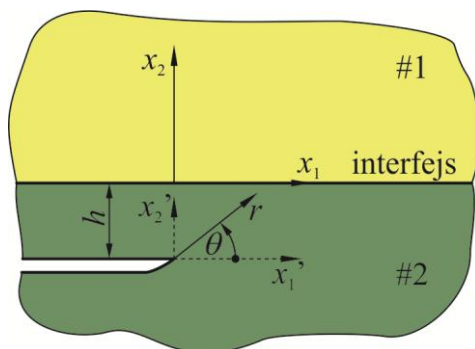
Како је за проблем који се разматра растојање између прслине и интерфејса h једина дужинска величина, то се на основу димензионе анализе једначина (2.41) може написати у облику:

$$K_I + iK_{II} = c K h^{i\varepsilon} + \bar{d} \bar{K} h^{-i\varepsilon}. \quad (2.51)$$

Ако се удаљеност прслине од интерфејса, која се појављује као чинилац $h^{i\varepsilon}$ комбинује се са $L^{-i\varepsilon}$, у једначини (2.39), добија се бездимензиони члан $\left(\frac{h}{L}\right)^{i\varepsilon}$.

Да би полубесконачна прсина напредовала за јединицу дужине, брзина ослобађања енергије дата једначином (2.44), или еквивалентна величина добијена применом J интеграла, мора да буде једнака брзини ослобађања енергије дата једначином (2.43), или $G = G_0$. То значи да је:

$$K_I^2 + K_{II}^2 = q^2 K \bar{K}. \quad (2.52)$$



Слика 2.15 Полубесконачна прсина паралелна са интерфејсом

Анализирајући приказану конфигурацију на слици 2.15, d је једнако нули, а сходно раду Тулеса (THOULESS) и осталих [60], па се заменом једначине (2.51) у (2.52) добија се $c \bar{c} = q^2$, па је:

$$c = q e^{i\varphi_1}, \quad (2.53)$$

тако да је једначина (2.51) потпуно одређена бездимензионалном функцијом φ_1 која је у функцији Дундурсових параметара α и β , а који зависе од еластичних модула материјала. Ако се разматрају довољно мале вредности α и β може се користити линеаризација вредности функције φ_1 [9]:

$$\varphi_1 = 0.1584\alpha + 0.063\beta. \quad (2.54)$$

Примењујући једначину (2.52) у једначини (2.51) добија се факторе интензитета напона за прсину паралелну са интерфејсом у зависности од комплексног фактора интензитета напона K одговарајуће интерфејсне прсине за услове када је $\frac{h}{L} \ll 1$:

$$K_I + iK_{II} = q e^{i\varphi_1} K h^{i\varepsilon}. \quad (2.55)$$

Ако се субинтерфејсна прсина налази у непосредној близини интерфејса, то се ω и h могу сматрати малим величинама, па се може применити апроксимација $a \sin \omega \cong \omega a$ тако да једначина (2.55) добија облик:

$$K_I + iK_{II} \cong q e^{i(\varphi_1 + \varepsilon \ln \omega)} a^{i\varepsilon}. \quad (2.56)$$

Поредећи једначине (2.41) и (2.56) може да се види да за мало ω важи: $c \rightarrow q e^{i(\varphi_1 + \varepsilon \ln \omega)}$, $d \rightarrow 0$ и $G = G_0$.

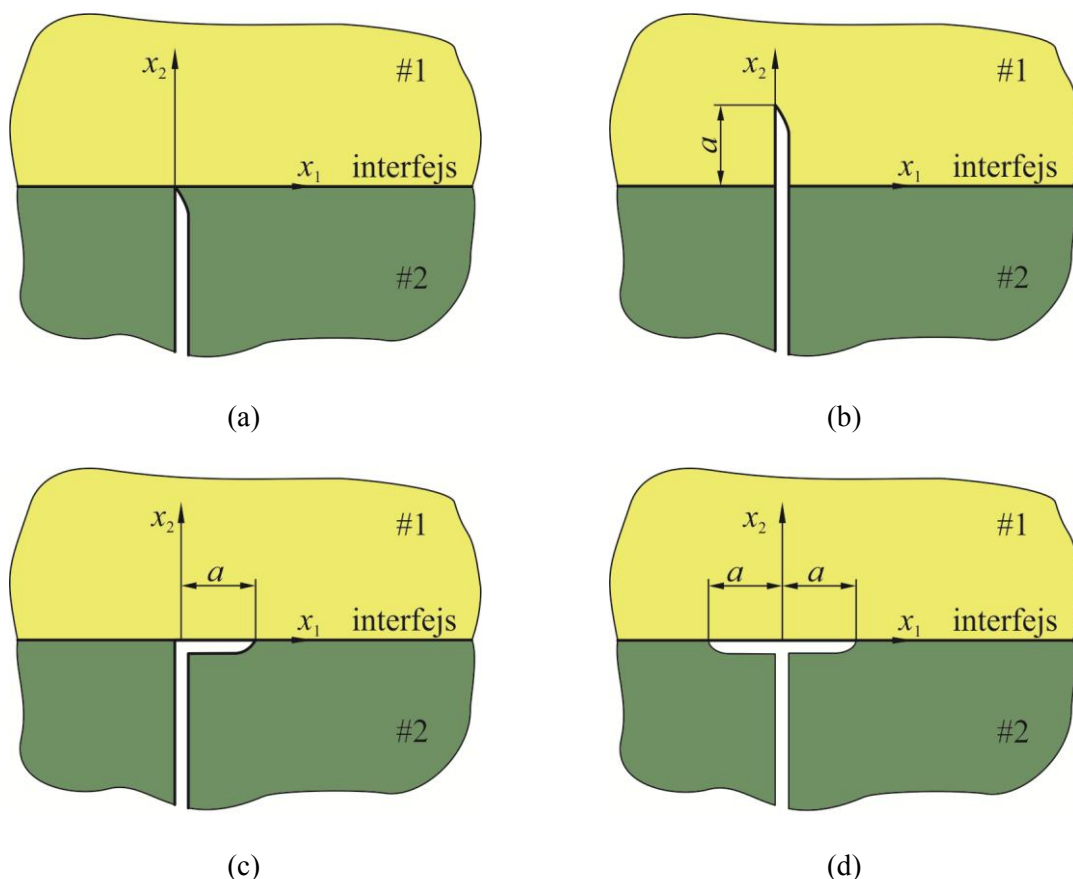
2.3 Прслина се приближава интерфејсу

Одговор на питање каква је улога интерфејса између два различита материјала када му се прслина приближава је неопходан за даљу анализу. Овде приказани резултати дају могућност упоређивања жилавости интерфејса са жилавошћу материјала без интерфејса, а у циљу одређивања да ли ће наилазећа прслина да скрене, то јест дефлектује у интерфејс или ће да га пенетрира, то јест пробије. Анализиране су четири групе проблема. Прву групу чини симетрично оптерећена полубесконачна главна прслина која „напада” интерфејс под правим углом. У оквиру тога анализирана су три проблема и то: прслина која пенетрира интерфејс, прслина која дефлектује у интерфејс и прслина која обострано дефлектује у интерфејс. Другу групу проблема чини главна прслина која напада интерфејс под произвољним углом. Неуобичајена особина ових прслина је чињеница да овде постоји један доминантан мод деформације у врху прслине када је материјал преко интерфејса различит. Дакле, асимптотско понашање у врху прслине зависи од удаљеног оптерећења само преко једног фактора интензитета напона. Претпоставља се да у овом случају „такмичење“ између пенетрације и дефлектовања интерфејса не зависи од природе удаљеног оптерећења у строго асимптотском смислу када је дужина гране a произвољно мала у поређењу са дужином главне прслине. Постојање једног доминантног Моде има за последицу да чињеница да ли ће главна прслина која напада интерфејс под произвољним углом да скрене у интерфејс или да се удаљи од њега, зависи од релативне кртости материјала са обе стране интерфејса. Трећу групу проблема чини понашање праволинијске прслине која је оптерећена концентрисаном силом која делује на површинама прслине која се приближава интерфејсу под произвољним углом. Ова група проблема је значајна, јер се њом објашњава тежња прслине да се криви ка или од интерфејса када му се приближава. Коначно, четврту групу проблема, чини „такмичење“ између пенетрације и дефлектовања у интерфејс за прслину која напада интерфејс под произвољним углом, а површине прслине су оптерећене концентрисаном силом. Ова група проблема је разматрана за коначне вредности a/ℓ где је ℓ - растојање тачке деловања концентрисане силе од интерфејса. Понашање за $a/\ell \rightarrow 0$ разматрано је у оквиру друге групе проблема.

Прслина нормална на интерфејс

Разматрање ове врсте проблема је почело радовима Кука и Ердогана [15] и Ердогана и Бирицикоглуа [16], затим Гора и Венеције [17] и Луа и Ердогана [18]. Један од најдетаљнијих приказа овог проблема дали су Хи и Хачинсон [21].

Прслина која напада интерфејс под правим углом приказана је на слици 2.16.



Слика 2.16 Прсина нормална на интерфејс: (а) врх прсине је у интерфејсу, (б) пенетрира интерфејс, (с) дефлектује у интерфејс и (д) двострано дефлектује у интерфејс

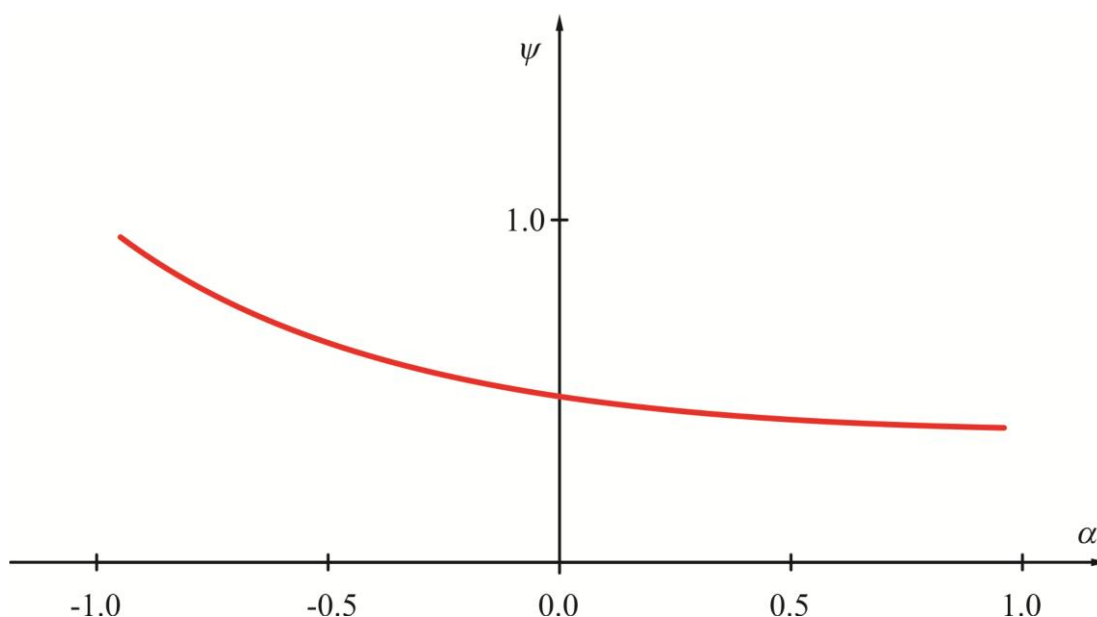
За почетак разматрања проблема са слике 2.16, прсина је полубесконечна прсина са $a = 0$, слика 2.16(a). Прсина је нормална на интерфејс, а врх прсине је у интерфејсу. Напони испред врха прсине, за овај случај, у материјалу 1 биће:

$$\sigma_{11}(0, x_2) = k_I (2\pi x_2)^{-\lambda} \quad (2.57)$$

где је λ реална величина која зависи од Дундурсових параметара α и β . Ова зависност се може приказати једначином:

$$\cos \lambda \pi = \frac{2(\beta - \alpha)}{1 + \beta} (1 - \lambda)^2 + \frac{\alpha + \beta^2}{1 - \beta^2}. \quad (2.58)$$

Зависност реалне величине λ од параметра α при $\beta = 0$ приказана је на слици 2.17 [21].


 Слика 2.17 Зависност реалне величине λ од параметра α при $\beta = 0$

Фактор k_I је фактор који је пропорционалан оптерећењу и није неопходно његово експлицитно познавање за решавање овог проблема. На слици 2.16 приказана су три случаја даљег ширења прррррр. На слици 2.16(b) приказан је случај прррррр која пробија (пенетрира) интерфејс. Ова пенетрација прррррр дешава се само када постоји чисти Мод I. Скретање прррррр у интерфејс (дефлектовање) дешава се у условима постојања мешовитог Мода оптерећења. Дефлектовање прррррр може да буде једнострано, слика 2.16(c) или двострано, слика 2.16(d), а што зависи од услова оптерећења у врху прррррр. Вероватнији и чешћи облик је двострано дефлектовање прррррр, које се дешава када је фазни угао оптерећења $\psi < 45^\circ$. Једнострано дефлектована прррррр јавља се у случајевима када преовлађује Мод II оптерећења у врху прррррр. У овим случајевима фазни угао оптерећења ψ , којим се дефинише мешовити мод оптерећења, је $\psi > 45^\circ$.

Како је у случају пенетрације интерфејса стање напона испред врха прррррр чисти Мод I, то се на основу димензионе анализе може извести закључак да је фактор интензитета напона:

$$K_I = c_1(\alpha, \beta) k_I a^{1-2\lambda}, \quad (2.59)$$

где је $c_1(\alpha, \beta)$ бездимензионална функција параметара α и β . Брзина ослобађања енергије код прррррр која пенетрира интерфејс се може израчунати као:

$$G_p = \frac{1-\nu_1}{2\mu_1} K_I^2 = \frac{1-\nu_1}{2\mu_1} c_1^2 k_I^2 a^{1-2\lambda}. \quad (2.60)$$

Код прслине која дефлектује у интерфејс, слика 2.16(c) и 2.16(d), стање напона на интерфејсу испред врха се може описати са:

$$\sigma_{22}(x_1, 0) + i\sigma_{12}(x_1, 0) = (K_1 + iK_2)(2\pi r)^{\frac{1}{2}} r^{i\epsilon}, \quad (2.61)$$

где је $r = x_1 - a$.

У овом случају се на основу димензионе анализе добија:

$$K = K_1 + iK_2 = k_I a^{\frac{1}{2}-\lambda} \left[d_1(\alpha, \beta) a^{i\epsilon} + e_1(\alpha, \beta) a^{-i\epsilon} \right], \quad (2.62)$$

где су: $d_1(\alpha, \beta)$ и $e_1(\alpha, \beta)$ бездимензионалне комплексне функције параметара α и β . Брзина ослобађања енергије за прслину која дефлектује у интерфејс је:

$$G_d = \left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_1^2 + K_2^2}{16 \cosh^2(\epsilon\pi)}, \quad (2.63)$$

где је:

$$K_1^2 + K_2^2 = k_I^2 a^{1-2\lambda} \left[|d_1|^2 + |e_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(d_1 e_1) \right]. \quad (2.64)$$

Однос брзина ослобађања енергије при дефлексији и пенетрацији у интерфејс G_d / G_p не зависи од a и од k_I и дат је са:

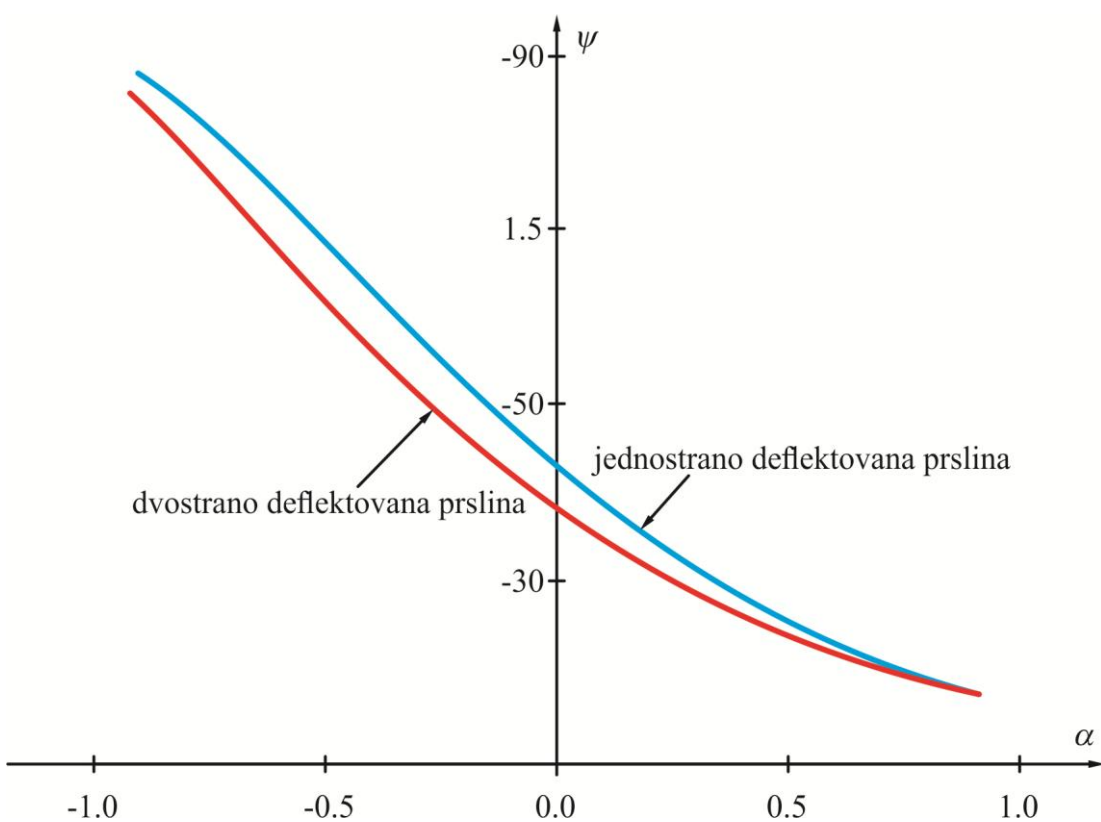
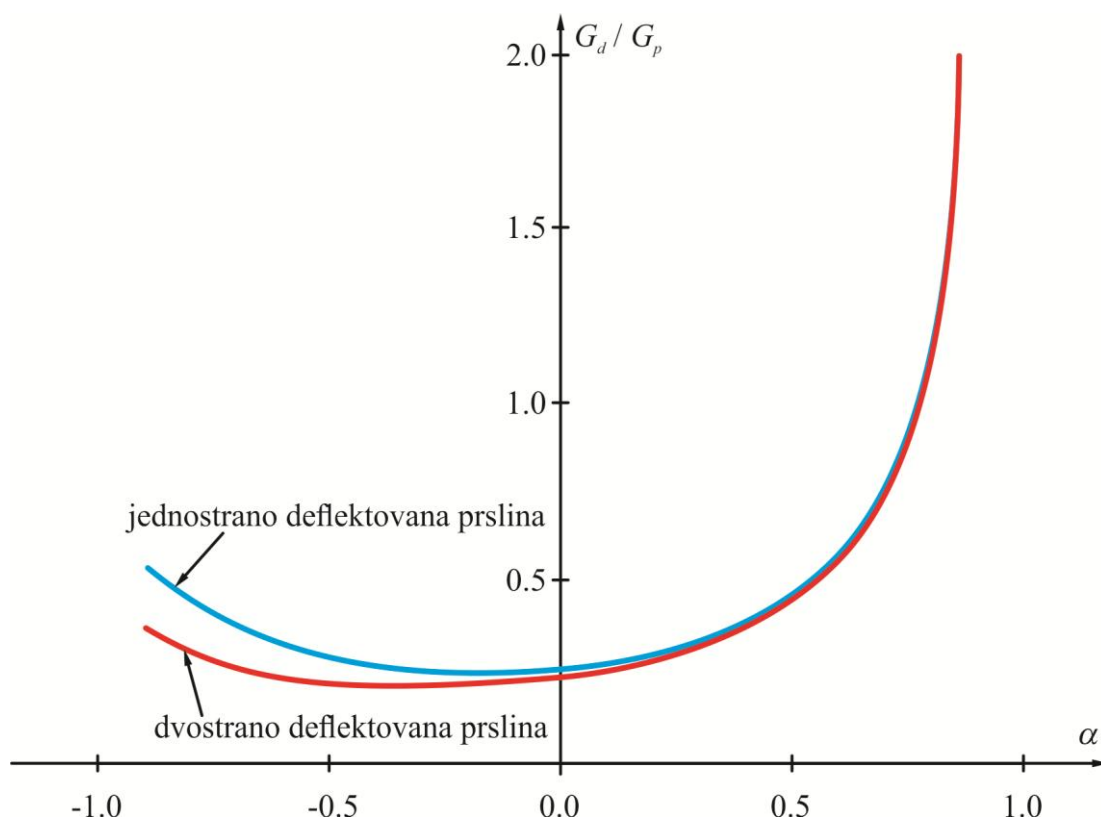
$$\frac{G_d}{G_p} = \left(\frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha} \right) \frac{\left[|d_1|^2 + |e_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(d_1 e_1) \right]}{c_1^2}. \quad (2.65)$$

Значи, релативна тежња прслине да дефлектује или пенетрира интерфејс може да се одреди на основу једначине (2.65).

Познавајући $c_1(\alpha, \beta)$, $d_1(\alpha, \beta)$ и $e_1(\alpha, \beta)$ може да се одреди однос G_d / G_p . Хи и Хачинсон су дали решење овог проблема [21], док је Вељковић [28] дала аналитичку апроксимацију за цео опсег Дандурсових параметара:

$$c_1 = \frac{\alpha^2 + \beta}{\alpha + \beta}, \quad d_1 = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta}, \quad e_1 = \frac{\alpha^2 + \alpha + 2\beta}{\alpha - \beta}. \quad (2.66)$$

Зависност односа G_d / G_p и фазног угла ψ у функцији α , а за $\beta = 0$ приказана је на слици 2.18.



Слика 2.18 Однос брзина ослобађања енергије за једнострано и двострано дефлектовану пррлину и вредност фазног угла за исте дужине пррлине a у функцији α

Однос брзина ослобођених енергија G_d / G_p је практично независан од параметра и β зато што се у једначини (2.65) овај параметар појављује у квадратном облику па се као такав може занемарити.

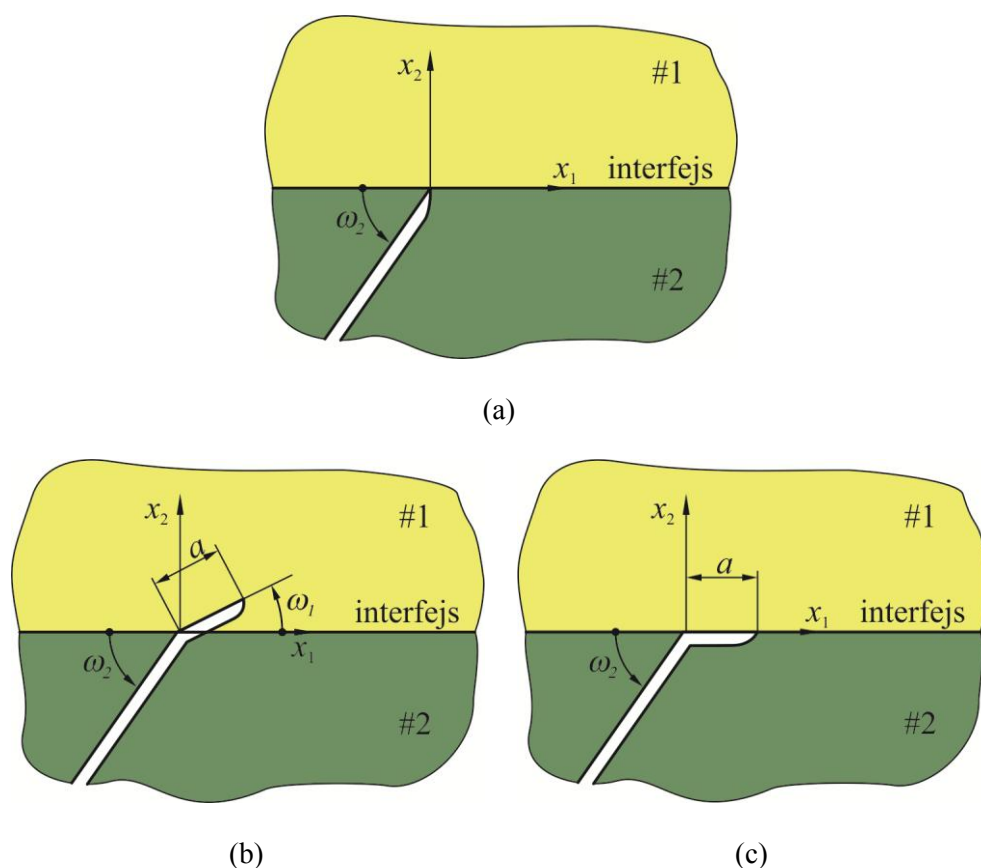
Ако се са G_{IC} означи жилавост лома интерфејса, а са G_C жилавост лома материјала 1, онда ће прслина која напада интерфејс дефлектовати у интерфејс ако је задовољена неједначина:

$$\frac{G_{IC}}{G_C} < \frac{G_d}{G_p}. \quad (2.67)$$

Прслина ће пенетрирати интерфејс ако је знак у неједначини (2.67) обрнут.

Прслина напада интерфејс под произвољним углом

На слици 2.19 приказан је проблем прслине која напада интерфејс под произвољним углом.



Слика 2.19 Прслина која напада интерфејс под произвољним углом ω_2 :
 (а) врх прслине је у интерфејсу, (б) пенетрира интерфејс у правцу дефинисаном
 углом ω_1 и (с) дефлектује у интерфејс

Као и у случају када прслина напада интерфејс под правим углом и овде постоје две могућности, а то су да прслина пенетрира интерфејс, слика 2.19(b), и да дефлектује интерфејс слика 2.19(c). Анализа проблема је врло слична анализи ширења прслине која напада интерфејс под правим углом само се морају узети у обзир и углови под којима прслина напада, односно напушта интерфејс.

У случају када прслина пенетрира интерфејс неходно је одредити правац пенетрације прслине ω_1 . Овај правац мора да задовољи услов да је то правац при коме је брзина ослобађања енергије највећа.

Фактори интензитета напона у врху пенетриране прслине зависе од k_1 и a на следећи начин:

$$K_I + iK_{II} = c_2(\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2) k_1 a^{2-\lambda_1}, \quad (2.68)$$

где је $c_2(\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2)$ бездимензионална функција параметара α и β и углова ω_1 и ω_2 . Брзина ослобађања енергије за пенетрацију прслине је у овом случају је:

$$G_p = \frac{1-\nu_1}{2\mu_1} c_2^2 k_1^2 a^{1-2\lambda_1}. \quad (2.69)$$

Максимална брзина ослобађања енергије за пенетрацију прслине у интерфејс, при углу продирања ω_1 , за константно a , означава се са G_p^{\max} . Фактори интензитета напона за прслину приказану на слици 2.19(c) могу да се срачунају на аналоган начина као што је дато једначином (2.64). На основу тога однос брзине ослобађања енергије за дефлекцију у интерфејс и максималне брзине ослобађања енергије за пенетрацију у интерфејс поново не зависи од a и може се одредити као:

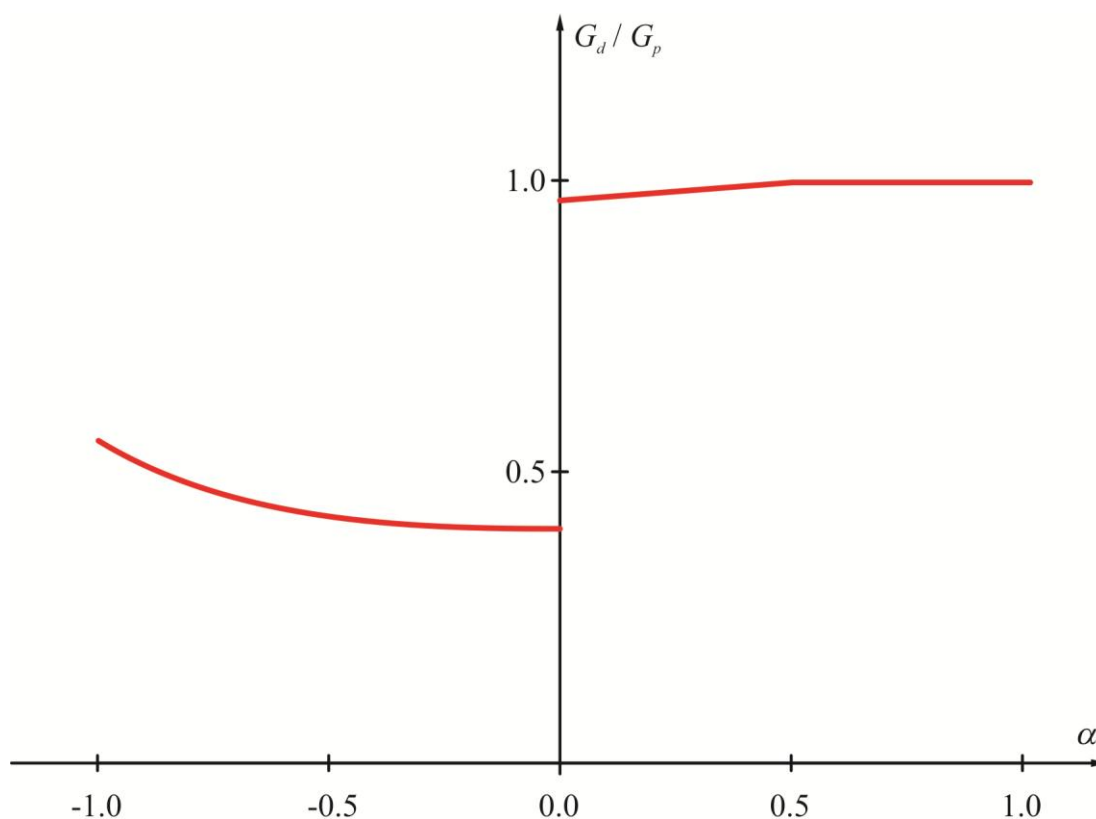
$$\frac{G_d}{G_p^{\max}} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{[|d_2|^2 + |e_2|^2 + 2\operatorname{Re}(d_2 e_2)]}{|c_2|^2}. \quad (2.70)$$

Табеларно решење једначине (2.70) дато је у раду [21], а посматрање и анализа ширења прслине на целом распону интервала омогућила је апроксимација дата у [28]:

$$c_2 = \frac{2-\alpha}{1+\beta} \cdot e^{i(\alpha+\beta^2+\ln \omega_1+\omega_2)}, \quad (2.71)$$

$$d_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\alpha}} \cdot (e^{-i\omega_2} + e^{-3i\omega_1}), \quad e_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\alpha}} \cdot (e^{-i\omega_2} - e^{3i\omega_1})$$

Графички приказ зависности односа дефинисаног једначином (2.70) од α за случај $\omega_2 = 45^\circ$, а када је $\beta = 0$, дата је на слици 2.20 [21].



Слика 2.20 Однос G_d / G_p^{\max} за исте дужине a , $\beta = 0$ и $\omega_1 = 45^\circ$, у функцији α

За анализу понашања прсине битна су два случаја. За случај када материјал 1 има већу кртоност од материјала 2 ($\alpha > 0$) максимална брзина ослобађања енергије за пенетрацију је незнатно већа од брзине ослобађања енергије за дефлексију. За случај када је вредност α нешто већа од 0.5, максимална брзина ослобађања енергије за пенетрацију постаје брзина ослобађања енергије за $\omega_1 \rightarrow 0$ па се критична пенетрација прсине поклапа са дефлексијом прсине, односно прсина се може ширити само кроз интерфејс. Други случај је када је материјал 1 материјал који је еластичнији ($\alpha < 0$). У овом случају брзина ослобађања енергије за пенетрацију значајно премашује брзину ослобађања енергије за дефлексију, ($G_p \gg G_d$).

Прсина се приближава интерфејсу под произвољним углом α на површинама прсине делује концентрисана сила

Поље у врху прсине чији је врх у материјалу 2, је комбинација поља Моде I и Моде II. На слици 2.21 приказана је полубесконачна праволинијска прсина која је оптерећена концентрисаном силом P .

За случај приказан на слици 2.21 фактори интензитета напона могу да се напишу као, [21]:

$$K_I + iK_{II} = c_3(\alpha, \beta, \ell/\ell_0, \omega_2)Pl^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.72)$$

где су:

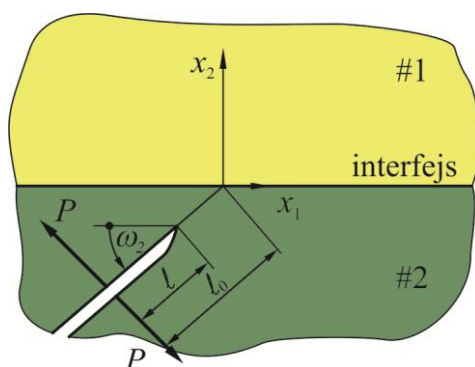
ℓ - растојање концентрисане силе од врха прслине,

ℓ_0 - растојање концентрисане силе од интерфејса, у правцу прслине,

c_3 - бездимензионална функција α , β , ℓ/ℓ_0 и ω_2 .

Када је ℓ мало у поређењу са ℓ_0 , врх прслине је у Моду I са познатим решењем:

$$K_I \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}Pl^{-\frac{1}{2}} \quad \text{за} \quad \frac{\ell}{\ell_0} \ll 1. \quad (2.73)$$



Слика 2.21 Прслина која се приближава интерфејсу а оптерећена је отварајућом концентрисаном силом која делује на површинама прслине

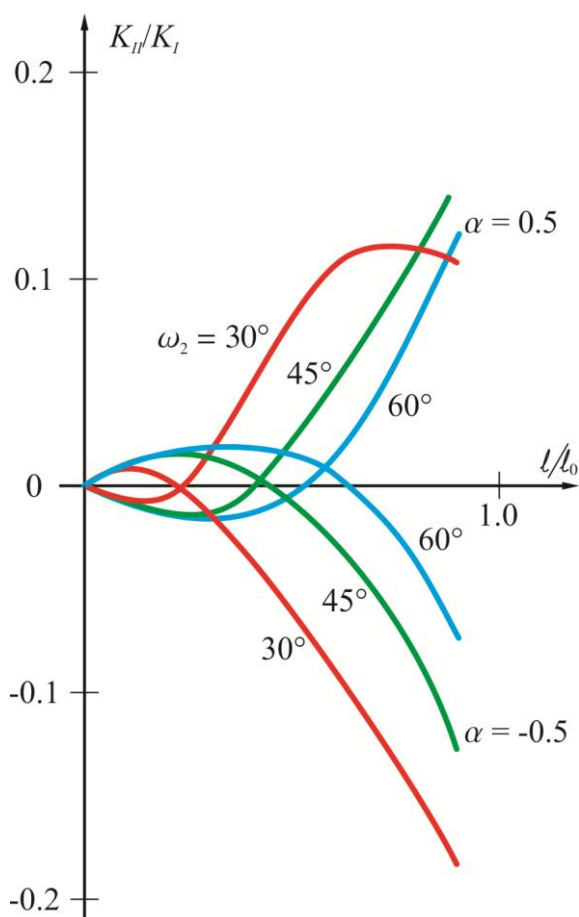
Како се ℓ повећава, врх прслине се приближава интерфејсу и појављује се утицај интерфејса на даљи раст прслине. Овај утицај се огледа у томе да се у некој величини јавља и Мод II.

Дијаграм K_{II}/K_I у зависности од ℓ/ℓ_0 , приказан је на слици 2.22 за три угла прилажења $\omega_2=30^\circ$, $\omega_2=45^\circ$ и $\omega_2=60^\circ$ и за две комбинације материјала $\alpha=-0.5$; $\beta=0$ и $\alpha=-0.5$; $\beta=0$ [21].

Вељковић је у раду [28] предложила аналитичку апроксимацију:

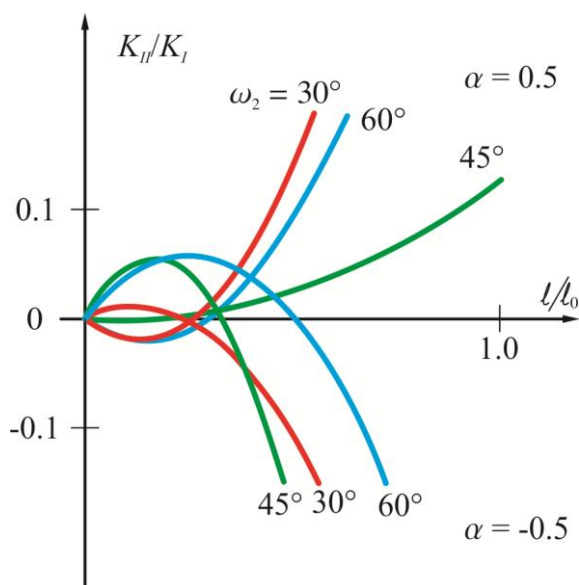
$$c_3 = \frac{1-\beta^2}{1+\alpha} \cdot [(\ell_1^2 - \ell_1) + i(2\ell_1^2 + \ell_1)] \cdot (e^{i\omega_2} + e^{-3i\omega_2}), \quad \ell_1 = \ell/\ell_0. \quad (2.74)$$

Као и претходне, и ова апроксимација омогућава анализу односа K_{II}/K_I на целом распону Дандурсових параметара, а не само на ограниченом табеларном приказу.



Слика 2.22. Однос K_{II}/K_I у зависности од l/l_0 на основу табеларних резултата

Дијаграм K_{II}/K_I у зависности од l/l_0 , коришћењем једначине (2.74), приказан је на слици 2.23 за исте параметре као и претходни дијаграм на слици 2.22.

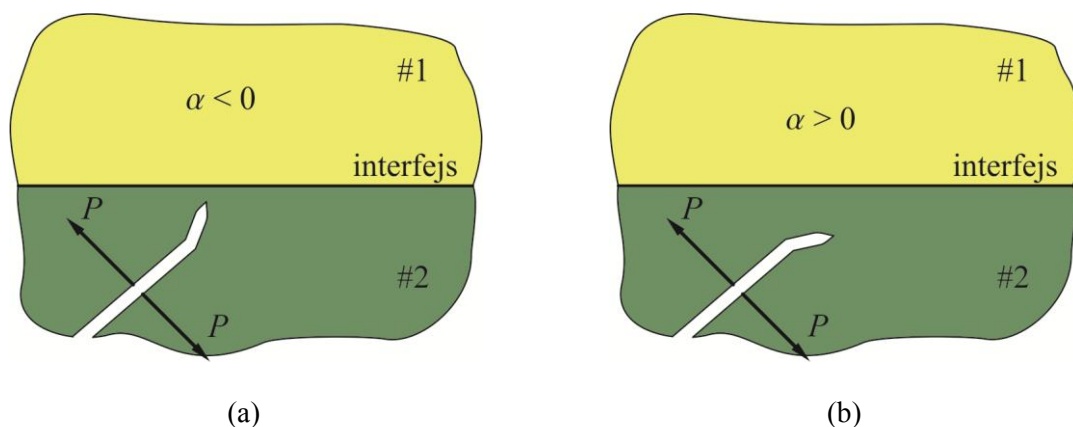


Слика 2.23 Однос K_{II}/K_I у зависности од l/l_0 на основу аналитичке апроксимације

Поређењем дијаграма види се да постоји велика сагласност истих на делу када је однос ℓ/ℓ_0 мањи од 0.7. Из овога се може закључити да, ако је врх прслине близак интерфејсу, апроксимација је више него повољна.

Анализом дијаграма могу се извести следећи закључци:

- Ако се прслина приближава еластичнијем материјалу преко интерфејса ($\alpha < 0$) K_{II} постаје негативно. С обзиром да је $K_{II} < 0$ прслина ће скретати према интерфејсу, слика 2.24(a);
- Насупрот томе, ако се прслина приближава материјалу са већом кртости преко интерфејса ($\alpha > 0$), K_{II} постаје позитивно наводећи на закључак да ће прслина која задовољава $K_{II} = 0$ „бежати“ од интерфејса, слика 2.24(b).



Слика 2.24 Приближавање прслине интерфејсу:

(a) прслина скреће ка интерфејсу и (b) прслина „бежи“ од интерфејса.

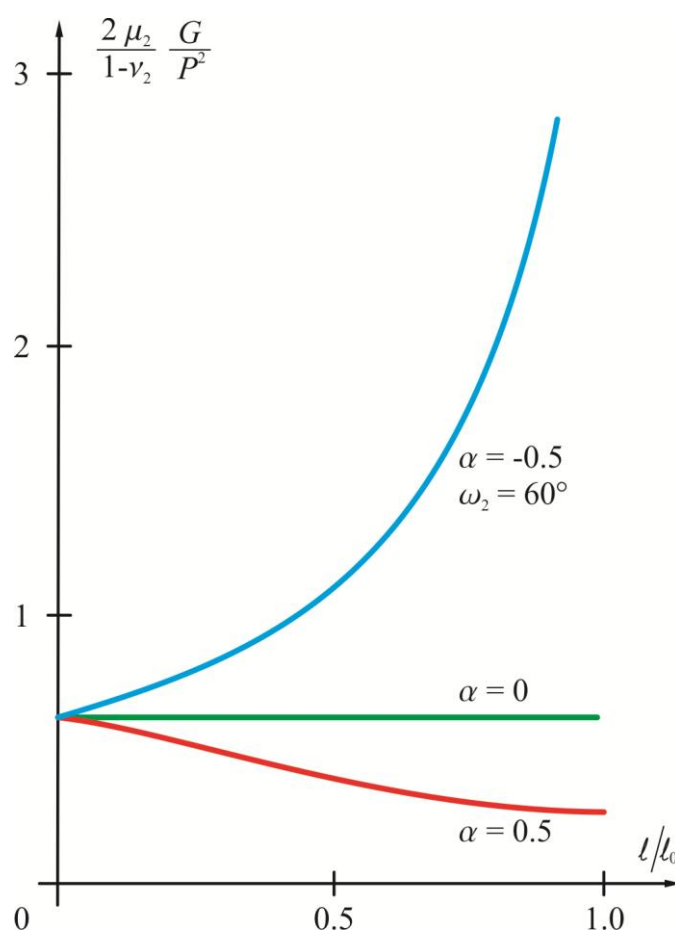
Наравно, логично је да се поставља се питање на ком ће растојању прслине од интерфејса исти имати утицај на њено понашање. Ово се формулише и као: на ком растојању од интерфејса прслина почиње да „осећа“ присуство истог. Анализом претходних дијаграма за различите материјале у споју и различите углове наилажења прслине закључује се да ово растојање зависи од односа кртости материјала који образују интерфејс, преко Дундурсовог параметра α , угла наилажења прслине на интерфејс ω_2 и услова оптерећења у врху прслине. Тако, на пример, за биматеријалну комбинацију дефинисану са $\alpha = 0.5$ и $\omega_2 = 30^\circ$ за $K_{II} = 0$, што одговара односу растојања $\ell/\ell_0 = 0.275$, прслина ће да пенетрира интерфејс. За $K_{II} < 0$ прслина ће да се криви ка интерфејсу, а то ће се дешавати за растојања $\ell/\ell_0 < 0.275$. Прслина ће се савијати од интерфејса када је $K_{II} > 0$ за растојања $\ell/\ell_0 > 0.275$. За другу биматеријалну комбинацију или други угао скретања ова растојања су другачија.

Брзине ослобађања енергије у посматраном случају приказаном на слици 2.21 може се одредити по обрасцу:

$$G = \frac{(1 + \kappa_2)}{8\mu_2} |c_3|^2 \frac{P^2}{\ell}, \quad (2.75)$$

Промена брзине ослобађања енергије у функцији од односа ℓ / ℓ_0 приказана је на слици 2.25 за $\omega_2 = 60^\circ$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pm 0.5$ и $\beta = 0$.

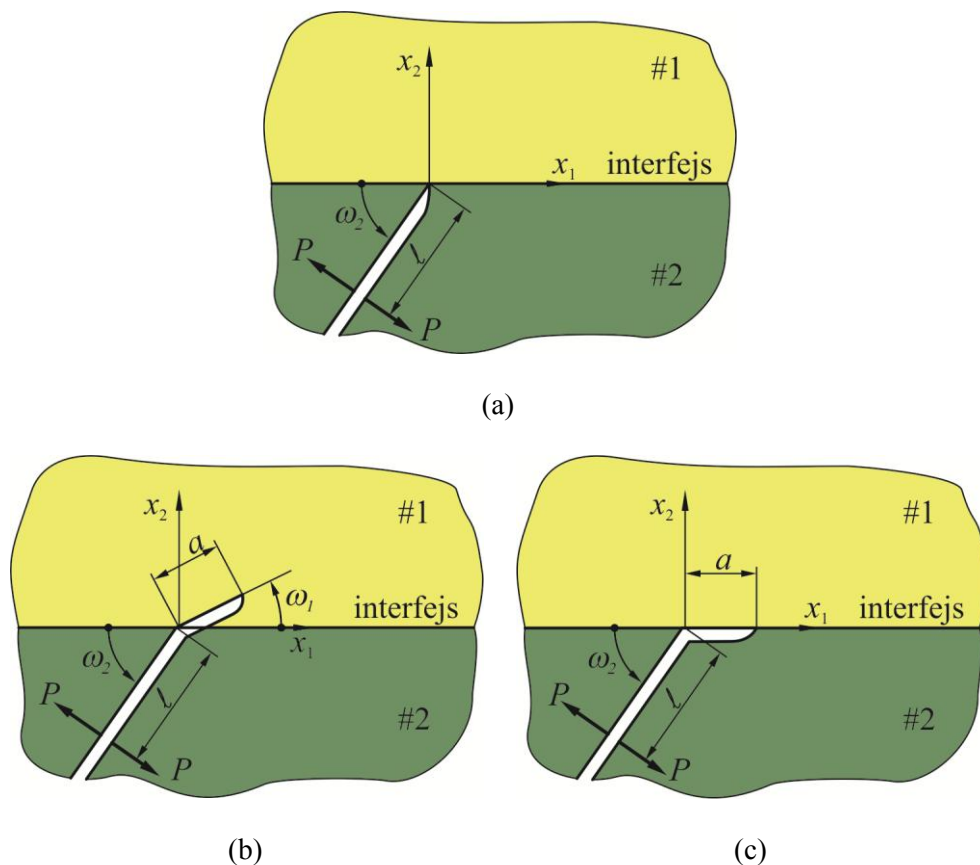
Анализом дијаграма са слике 2.25 може да се закључи да је понашање ове пррлине аналогно понашању које је познато за пррлину која се приближава под правим углом. Када је материјал преко интерфејса веће кртости од материјала кроз који се пррлина шири ($\alpha > 0$), брзина ослобађања енергије G тежи да падне на нулу како се интерфејс приближава. И обрнуто, када је материјал преко интерфејса више еластичан ($\alpha < 0$), брзина ослобађања енергије G драматично расте како се интерфејс приближава.



Слика 2.25 Нормализована брзина ослобађања енергије за пррлину која се приближава интерфејсу

Прслина напада интерфејс под произвољним углом α на површинама прслине делује концентрисана сила

За ову анализу се посматра следећи случај. Главна полубесконачна прслина изложена је концентрисаној сили P на растојању ℓ од интерфејса, слика 2.26(a).



Слика 2.26. Прслина која напада интерфејс под произвољним углом ω_2 и оптерећена је концентрисаном. Прслина: (a) врх прслине је у интерфејсу (b) пенетрира интерфејс и (c) дефлектује у интерфејс

Као и у претходним случајевима и овде се анализира под којим условима ће прслина пенетрирати интерфејс, а под којим дефлектовати у њега. Аналогно претходним анализама, комплексни фактор интензитета напона за пенетрацију прслине може да се напише као:

$$K = K_I + iK_{II} = c_4(\alpha, \beta, a/\ell, \omega_1, \omega_2)Pl^{\frac{1}{2}}, \quad (2.76)$$

где је: c_4 - бездимензионална функција α , β , a/ℓ , ω_1 и ω_2 .

Брзина ослобађања енергије при пенетрацији прслине је:

$$G_p = \frac{(1+\kappa_2)}{8\mu_2} |c_4|^2 \frac{P^2}{\ell}. \quad (2.77)$$

Максимална вредност G_p , а у функцији од ω_1 и за константно a/ℓ , означава се са G_p^{\max} .

На сличан начин се одређује и комплексни фактор интензитета напона за дефлектовану прслину:

$$K = K_1 + iK_2 = d_4(\alpha, \beta, a/\ell, \omega_2) P \ell^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.78)$$

Брзина ослобађања енергије за дефлектовану прслину G_d , је дата једначином (2.63),

$$G_d = \left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) \frac{K_1^2 + K_2^2}{16 \cosh^2(\varepsilon\pi)}$$

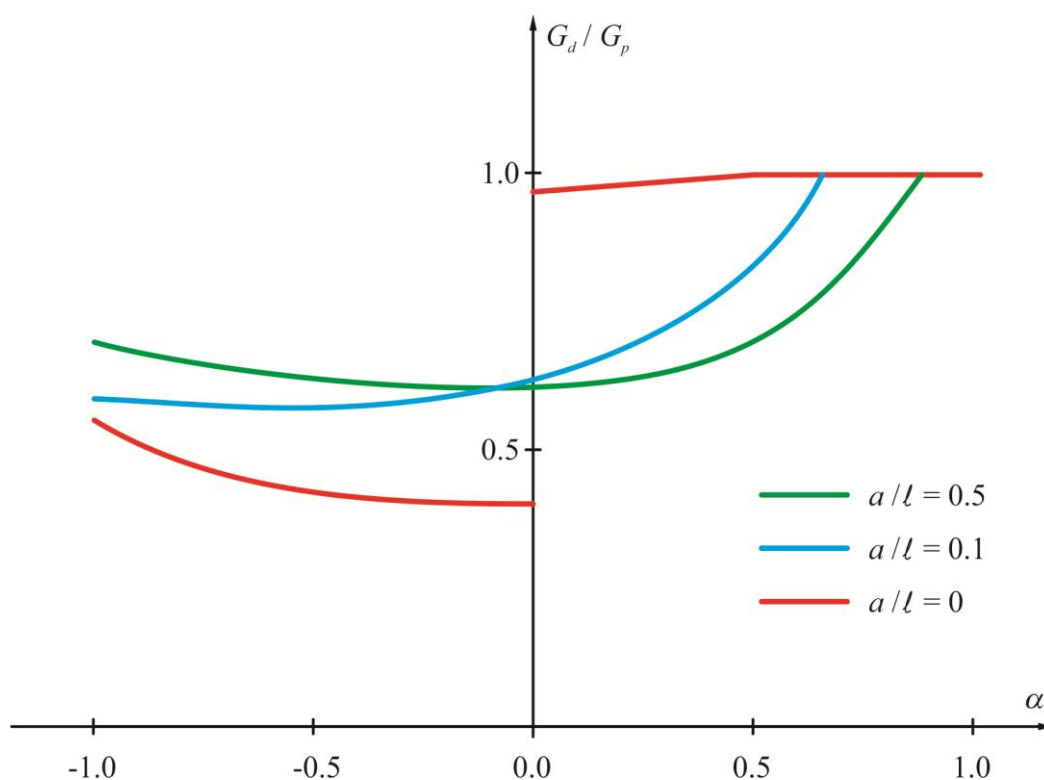
где је:

$$K_1^2 + K_2^2 = |d_4|^2 P^2 / \ell \quad (2.78)$$

Однос одговарајућих брзина ослобађања енергије је:

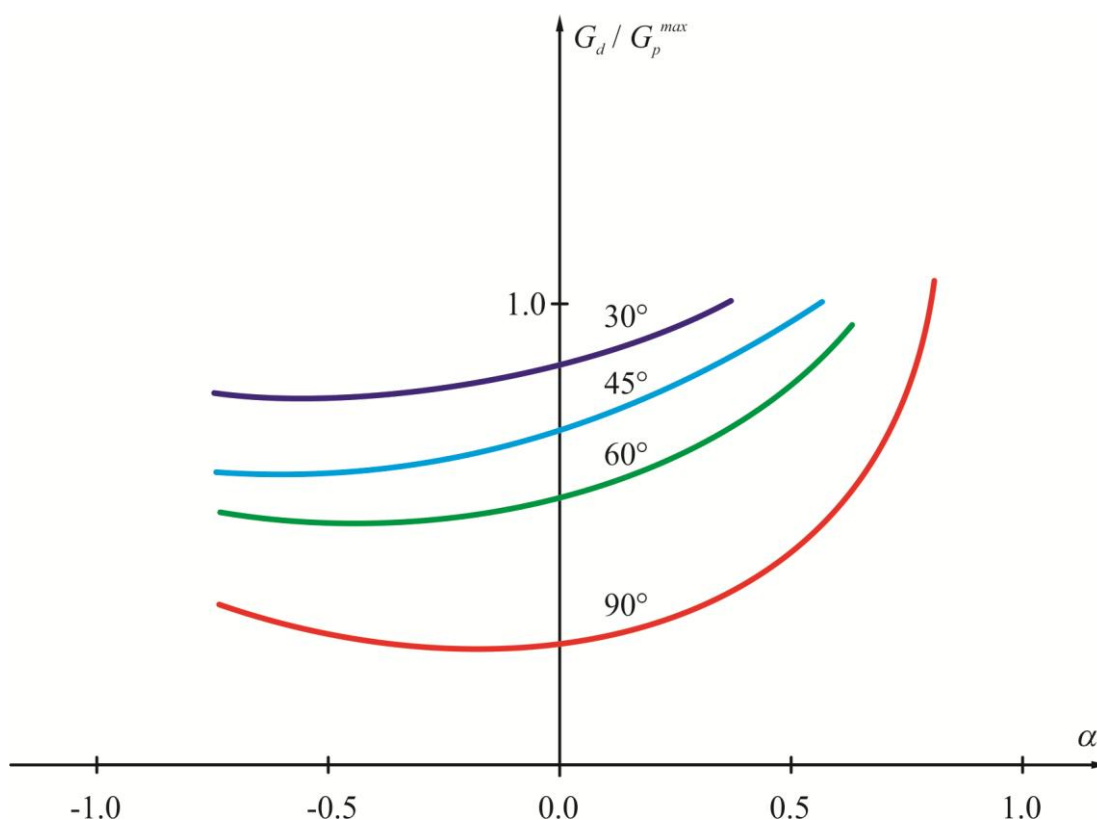
$$\frac{G_d}{G_p^{\max}} = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{|d_4|^2}{|c_4|^2}. \quad (2.79)$$

Однос дефинисан једначином (2.79) приказан је на слици 2.27 у функцији односа α за $a/\ell = \text{const}$, $\omega_2 = 45^\circ$ и $\beta = 0$ [21].



Слика 2.27 Однос брзина ослобађања енергије за дефлектовање прслине и максималне брзине ослобађања енергије за пенетрацију прслине

Крива G_d / G_p^{\max} као функција α приказана је на слици 2.28 за $a/l = 0.1$, $\omega_2 = 30^\circ$, $\omega_2 = 45^\circ$, $\omega_2 = 60^\circ$, укључујући и криву са слике 2.18.

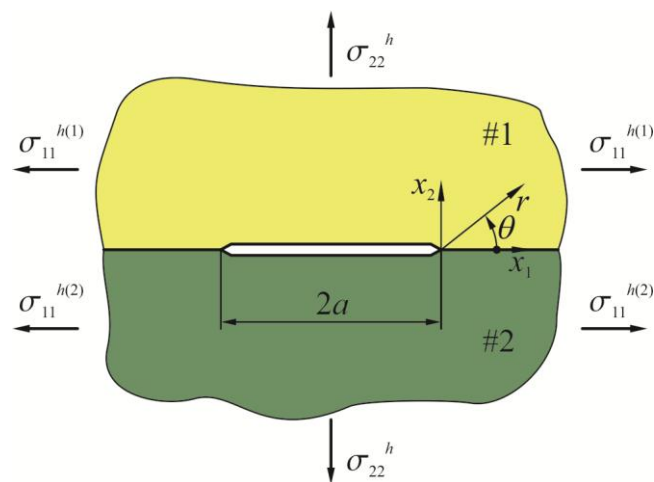


Слика 2.28 Однос брзине ослобађања енергије за дефлектовање прсине и максималне брзине ослобађања енергије за пенетрацију.

На основу спроведене анализе може се закључити да ће за мале углове нападања прсине углавном долазити до дефлектовања прсине. Ако се жели да се дизајнира интерфејс са таквом жилавошћу да ће за било који угао нападања да се јави дефлектовање, мора да се посматра проблем за $\omega_2 = 90^\circ$. За вредност α у опсегу од - 0.5 до 0.25, жилавост интерфејса треба да буде мања од око четвртине жилавости материјала преко интерфејса, ако се жели да прсина увек дефлектује.

3. ЕЛАСТИЧНО-ПЛАСТИЧНА АНАЛИЗА ПРСЛИНЕ НА ИНТЕРФЕЈСУ

Анализирајући литературу долази се до закључка да постоји релативно мали број решења за проблеме прслине која лежи између еластично-пластичних материјала. У овом делу дисертације биће представљена решења за проблем прслине на интерфејсу између два еластично-пластична материјала унутар оквира дефинисаног нелинеарном механиком лома у хомогеним материјалима. Дата је структура напонског и деформацијског поља у близини врха прслине која лежи између еластично-пластичних материјала у условима течења у малом обиму. У том смислу посматра се централна прслина у условима раванског стања деформације која је оптерећена удаљеним хомогеним оптерећењем као што је приказано на слици 3.1.



Слика 3.1 Прслина на интерфејсу између два еластично-пластична материјала

Посматрана прслина лежи на интерфејсу између два еластично - пластична материјала чије је понашање описано J_2 -деформационом теоријом. Поље у врху прслине је анализирано за спој линеарно еластичног и нелинеарног, еластично-пластичног материјала, као и спој два нелинеарна еластично-пластична материјала, у условима течења у малом обиму.

У контексту прслине на интерфејсу, течење у малом обиму, представља услове оптерећења у пластичној зони која истиче из врха прслине. Пластична зона је окружена еластичном зоном у којој важи концепт линеарно-еластичне механике лома за прслину на интерфејсу.

Сва решења су изведена за материјале описане J_2 -деформационом теоријом. Ово је урађено у смислу утврђивања везе између решења за интерфејсну прслину и постојећих решења нелинеарне механике лома за хомогене материјале. Показано је да је понашање у врху интерфејсне прслине сложеније од понашања прслине у хомогеној средини. То значи да пропорционална удаљена оптерећења индукују непропорционално понашање у врху интерфејсне прслине што није случај за хомогену средину, где пропорционално оптерећење индукује пропорционалност понашања.

3.1. Математичке основе еластично-пластичне механике лома

Ради лакшег разумевања компликованог математичког модела прслине у интерфејсу еласто-пластичних материјала овде је дата основа за даље разматрање. Основа свих анализа полази од J -интеграла и Хачинсон-Рајс-Розенгрин (HRR) сингуларитета. Из тог разлога се даје њихово детаљније извођење.

J -интеграл као нелинеарна еластична брзина ослобађања енергије

Да би се разумеле основе еластопластичне анализе прслине на интерфејсу мора се поћи од основа механике лома. Рајс је у радовима [65] [66] први извео математички доказ независности контурног J -интеграла од путање интеграљења. Почео је тако што је израчунао J -интеграл дуж затворене контуре Γ^* , слика 3.2, као:

$$J = \int_{\Gamma^*} (Wdy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds) , \quad (3.1)$$

где је:

W - густина енергије деформације, дефинисана са:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} ,$$

T_i - су компоненте вектора сила, дате са:

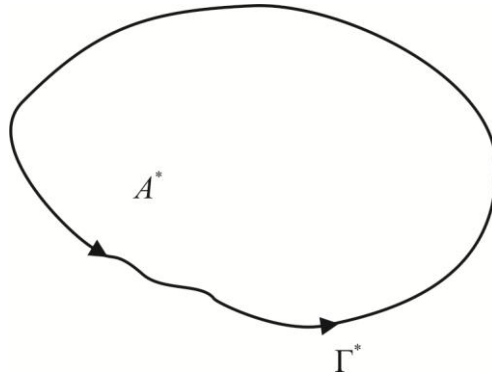
$$T_i = \sigma_{ij} n_j ,$$

σ_{ij} и ε_{ij} - компоненте напонског и деформационог тензора,

n_j - компоненте јединичног вектора нормале на Γ^* ,

u_i - компоненте вектора померања и

ds - инкремент дужине дуж контуре Γ^* .


 Слика 3.2 Затворена контура Γ^* у дводимензионалном телу

Рајс је у раду [65] применио теорему дивергенције да би контурни интеграл дефинисан једначином (3.1) претворио у површински интеграл:

$$J^* = \int_{A^*} \left[\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right] dx dy, \quad (3.2)$$

где је:

A^* - област затворена контуром Γ^* .

С обзиром на дефиницију густине енергије деформације, први члан у угластој загради у једначини (3.2) може да се израчуна преко:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Овде треба истаћи да се једначина (3.3) примењује само када густина енергије представља карактеристику еластичног потенцијала. Примењујући релацију између деформације и померања (за мале деформације) на једначину (3.3) добија се:

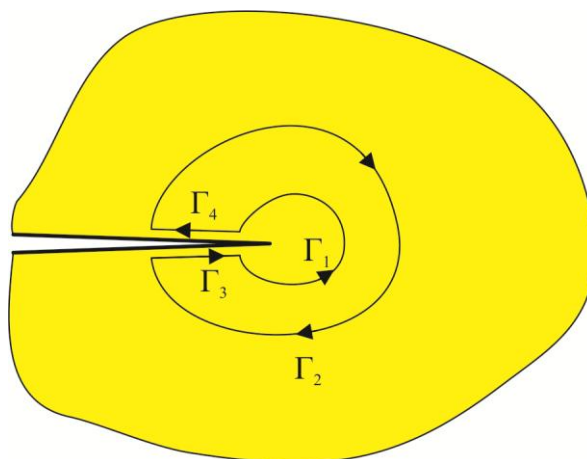
$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right), \quad (3.4)$$

а с обзиром да је $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Увођењем услова равнотеже, долази се до израза:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right), \quad (3.5)$$

који је идентичан другом члану у угластој загради у једначини (3.3). На овај начин интеграл дефинисан једначином (3.3) је једнак нули и $J = 0$ за неку затворену контуру.

Даље се у овом разматрању посматрају две отворене произвољне контуре, Γ_1 и Γ_2 које окружују врх прслине, као што је то показано на слици 3.3.



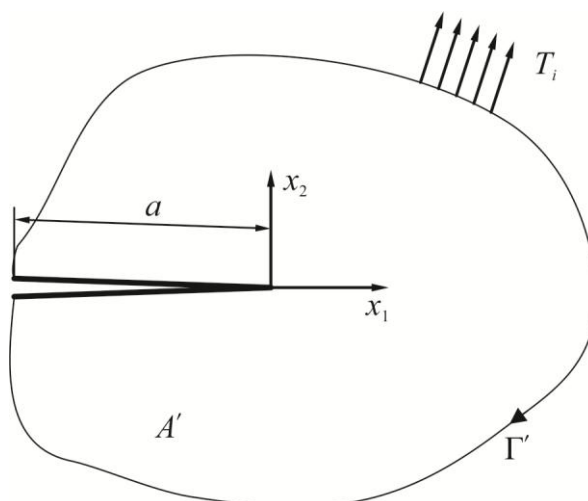
Слика 3.3 Две произвољне контуре Γ_1 и Γ_2 које окружују врх прслине

Ако се контуре Γ_1 и Γ_2 повежу сегментима дуж површина прслине Γ_3 и Γ_4 формира се затворена контура. Укупан J дуж затворене контуре је једнак збиру доприноса за сваки сегмент и једнак нули, јер је у питању затворена контура:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0. \quad (3.6)$$

На површинама прслине је $T_i = 0$ и $dy = 0$, па је $J_3 = J_4 = 0$, а из тога произилази и $J_1 = -J_2$. Према томе, на произвољним путањима интегралења око прслине биће исте вредности J -интеграла. Значи J -интеграл је независан од пута интегралења.

Даље се посматра се дводимензионално тело са прслином ограниченом кривом Γ' , слика 3.4. A' означава површину тела. Координатни почетак координатног система $x_1 - x_2$ је у врху прслине.



Слика 3.4 Дводимензионално тело са прслином ограничено контуром Γ'

У квазистатичким условима и у одсуству запреминских сила, потенцијална енергија је једнака:

$$\Pi = \int_{A'} W dA - \int_{\Gamma''} T_i u_i ds, \quad (3.7)$$

где је Γ'' део контуре на којој су дефинисане силе. Промена потенцијалне енергије, која потиче од виртуалног ширења прслине, може се одредити преко:

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_{A'} \frac{dW}{da} dA - \int_{\Gamma''} T_i \frac{du_i}{da} ds. \quad (3.8)$$

Линијско интегралчење у једначини (3.8) може да се спроведе преко целе контуре, Γ' зато што у области где је задато померање важи $du_i/da = 0$, а у области где су задате силе $dT_i/da = 0$. Разматра се случај када прслина расте, а самим тим се и координатне осе крећу. Извод по дужини прслине може да се напише као:

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.9)$$

зато што је $\partial x/\partial a = -1$. Примењујући једначину (3.9) на једначину (3.8) добија се:

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_{A'} \left(\frac{dW}{da} - \frac{dW}{dx} \right) dA - \int_{\Gamma'} T_i \left(\frac{du_i}{da} - \frac{du_i}{dx} \right) ds. \quad (3.10)$$

Аналогно условима који важе у једначинама (3.3) и (3.4) добија се:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right). \quad (3.11)$$

Увођењем принципа виртуалног рада, из једначине (3.11) се добија:

$$\int_{A'} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right) dA = \int_{\Gamma'} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds. \quad (3.12)$$

Као резултат примене (3.12) једначина (3.10) може да се напише као:

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma'} T_i \frac{du_i}{dx} ds - \int_{A'} \frac{dW}{dx} dA. \quad (3.13)$$

Примењујући теорему дивергенције и множећи обе стране са -1 добија се:

$$-\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma'} \left(W n_x - T_i \frac{du_i}{dx} \right) ds = \int_{\Gamma'} \left(W dy - T_i \frac{du_i}{dx} ds \right), \quad (3.14)$$

јер је $n_x ds = dy$. Према томе, J контурни интеграл је једнак брзини ослобађања енергије за линеарни или нелинеарни материјал под квазистатичким условима.

HRR сингуларитет

Хачинсон [67] са једне и Рајс и Розенгрин [7] са друге стране, су 1968. одвојено анализирали врсту и карактер напонског поља у врху прслине у случају ојачаног материјала. Хачинсон је анализирао и раванско стање напона и раванско стање деформације, док су Рајс и Розенгрин разматрали само услове раванског стања деформације. Обе анализе се слажу да је напонско и деформацијско поље у врху прслине сингуларитета $1/r$. Разлика је у томе што је Хачинсон и математички доказао ову зависност. Због тога је Хачинсонова анализа коју је дао у раду [67] приказана у краћим цртама у наставку, а са посебним аспектом на свеобухватни приступ ове анализе и њену широку примену.

Хачинсон је анализу почео дефинисањем напонске функције Φ за посматрани проблем. Диференцијална једначина деформационе теорије пластичности за равански проблем у Рамберг-Озгуд (RAMBERG-OSGOOD) материјалу [68] је много компликованија него у линеарно еластичном материјалу:

$$\nabla^4 \Phi + \gamma(\Phi, \sigma_e, r, n, \alpha) = 0, \quad (3.15)$$

где се функција γ разликује за проблем раванског стања напона и раванског стања деформације. За проблем прслине у Моду I, Хачинсон је изабрао да напонску функцију Φ представи у зависности од асимптотског израза следећег облика:

$$\Phi = c_1(\theta)r^s + c_2(\theta)r^t + \dots, \quad (3.16)$$

где су: c_1 и c_2 константе које зависе од θ , угла од равни прслине. Једначина (3.16) је аналогна Вилијамсовом [1] изразу за линеарно еластичан случај. Ако је $s < t$ и t мање од свих експонената r , онда је први члан доминантан када $r \rightarrow 0$. Ако је анализа ограничена на област близу врха прслине, онда напонска функција може да се изрази као:

$$\Phi = k\sigma_0 r^s \tilde{\Phi}(\theta), \quad (3.17)$$

где је k интензитет напонске функције и $\tilde{\Phi}$ бездимензионална функција угла θ . Иако је једначина (3.15) различита од еластичног случаја, напони и даље могу да се одреде на основу напонске функције Φ преко једначина:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Напони се на основу тога могу одредити као:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= k\sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_{rr}(\theta) = k\sigma_0 r^{s-2} (s\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}''') \\ \sigma_{\theta\theta} &= k\sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) = k\sigma_0 r^{s-2} s(s-1)\tilde{\Phi} \\ \sigma_{r\theta} &= k\sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta) = k\sigma_0 r^{s-2} (s-1)\tilde{\Phi}' \\ \sigma_e &= k\sigma_0 r^{s-2} \tilde{\sigma}_e(\theta) = k\sigma_0 r^{s-2} \sqrt{\tilde{\sigma}_{rr}^2 + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^2 - \tilde{\sigma}_{rr}\tilde{\sigma}_{\theta\theta} + 3\tilde{\sigma}_{r\theta}^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Гранични услови за проблем прслине су следећи:

$$\tilde{\Phi}(\pm\pi) = \tilde{\Phi}'(\pm\pi) = 0. \quad (3.19)$$

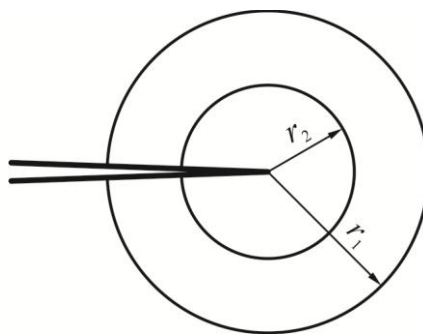
У области близу врха прслине, где се може применити једначина (3.17), еластичне деформације су занемарљиво мале у поређењу са пластичним деформацијама, па је у једначини (3.15) релевантан само је други члан. Користећи граничне услове (3.19) и једначину (3.17) у једначини (3.15), Хачинсон је добио нелинеарну сопствену једначину за s . Нумеричким решењима проширио је ову једначину за област n -вредности. Нумеричка анализа је показала да s може да се опише адекватно и за раванско стање напона и за раванско стање деформације једноставном формулом:

$$s = \frac{2n+1}{n+1}, \quad (3.20)$$

што имплицира да се густина енергије деформације близу врха мења као $1/r$.

Нумеричком анализом се такође могу добити вредности за угловне функције $\tilde{\sigma}_{ij}$. Интензитет напонске функције се, међутим, не може да одреди без повезивања анализе дешавања у врху прслине са удаљеним граничним условима. Увођењем карактеристика J -интеграла, Хачинсон је успео да добије потврду ваљаности једначине (3.20).

То је урадио на следећи начин. Посматрају се две кружне контуре радијуса r_1 и r_2 око врха прслине у условима течења у малом обиму, слика 3.5.



Слика 3.5. Две кружне контуре око врха прслине.

Основна претпоставка је да је r_1 у области која се описује еластичним сингуларитетима, док се r_2 налази унутар пластичне зоне, где су напони описани једначном (3.18). Када се напони и померања за случај еластично изотропног материјала унесу у једначину (3.14) и одреди вредност J -интеграла дуж путање r_1 , добија се да је: $J = K_I^2/E'$, као што се може и очекивати за случај еластично изотропног материјала. Проблем у близини врха прслине у условима течења у малом обиму може се решити израчунавањем J -интеграла за r_2 и његовим поређењем са интензитетом k .

Решавањем подинтегралне функције у J -интегралу за r_2 долази се до:

$$W = \alpha_1 \sigma_0 \varepsilon_0 k^{n+1} \frac{n}{n+1} r^{(n+1)(s-2)} \tilde{\sigma}_e^{n+1} \quad (3.21)$$

и

$$T \frac{\partial u_i}{\partial x} = \alpha_1 \sigma_0 \varepsilon_0 k^{n+1} r^{(n+1)(s-2)} \left\{ \sin \theta [\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{u}_\theta - \tilde{u}'_r) - \tilde{\sigma}_{r\theta}(\tilde{u}_r + \tilde{u}'_\theta)] + \right. \\ \left. + \cos \theta [n(s-2)+1][\tilde{\sigma}_{rr}\tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}\tilde{u}_\theta] \right\} \quad (3.22)$$

где су: \tilde{u}_r и \tilde{u}_θ бездимензионална померања којима се дефинише:

$$u_r = \alpha_1 \varepsilon_0 k^n r^{n(s-2)+1} \tilde{u}_r(\theta) \\ u_\theta = \alpha_1 \varepsilon_0 k^n r^{n(s-2)+1} \tilde{u}_\theta(\theta) \quad (3.23)$$

Величине u_r и u_θ могу да се одреде из зависности између деформације и померања. Одређивањем вредности J -интеграла за r_2 добија се:

$$J = \alpha_1 k^{n+1} r_2^{(n+1)(s-2)+1} I_n, \quad (3.24)$$

где је I_n интеграциона константа која се може одредити из израза [71]:

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{n}{n+1} \tilde{\sigma}_e^{n+1} \cos \theta - \sin \theta [\tilde{\sigma}_{rr}(\tilde{u}_\theta - \tilde{u}'_r) - \tilde{\sigma}_{r\theta}(\tilde{u}_r + \tilde{u}'_\theta)] + \right. \\ \left. + \cos \theta [n(s-2)+1][\tilde{\sigma}_{rr}\tilde{u}_r + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}\tilde{u}_\theta] \right\} d\theta \quad (3.25)$$

Ако се зна да вредност J -интеграла не зависи од пута интеграљења, то не може да зависи ни од радијуса r_2 који је изабран произвољно. У једначини (3.24) радијус r_2 нема утицај само када је експонент:

$$(n+1)(s-2)+1=0, \quad (3.26)$$

односно:

$$s = \frac{2n+1}{n+1}, \quad (3.27)$$

што је идентично резултату добијеном нумеричком процедуром, једначина (3.20). Интензитет напонске функције може се одредити као:

$$k = \left(\frac{J}{\alpha_1 \sigma_0 \varepsilon_0 I_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (3.28)$$

Међујући једначину (3.28) у једначине (3.18) и користећи Хуков закон $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ добија се општи облик HRR сингуларитета [52]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha_1 \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta) . \quad (3.26)$$

Рајс и Розенгрин [7] су добили практично идентичне резултате као Хачинсон [67] за раванско стање деформације, мада је њихов приступ проблему био незнатно другачији. Како су радили независно, и у исто време¹ теорија је приписана свима.

HRR сингуларитет представља веома важан резултат, јер се захваљујући њему уводи J -интеграл као напонско амплитудни параметар унутар пластичне зоне течења, где не важи линеарно еластично решење. Решења Хачинсона, Рајса и Розенгрина показала су да постоје значајне разлике међу напонима у пластичној области. Напони у пластичној области су много већи у условима раванског стања деформације него што су у условима раванског стања напона. Овај закључак је потпуно супротан од резултата које даје еластично решење, а где су равански напони идентични за оба случаја. Овим решењем дато је теоријско тумачење експерименталих запажања утицаја дебљине код теста жилавости лома.

Неопходно је поменути и ограничења HRR решења. Ова анализа даје добре резултате у близини врха прслине, значи дубоко унутар пластичне зоне. Међутим за врло мале вредности r , HRR решење је неадекватно зато што не узима у обзир коначне геометријске промене у врху прслине. Полазна претпоставка у HRR анализи је да је оптерећење пропорционално, тј. да се напони и деформације могу одредити из напонске функције. Ово значи да се и напони и деформације могу описати једним параметром. Велика промена геометрије у врху прслине условљава велику непропорционалност оптерећења што елиминише могућност описивања напона и деформације једним параметром.

3.2. Структура поља у условима течења у малом обиму

У циљу лакше анализе структуре поља у условима када постоји течење у малом обиму, комплексни фактор интензитета напона треба да се изрази преко интензитета и фазе [12], то јест:

$$K = K_1 + iK_2 = |K| e^{i\psi} \quad (3.27)$$

На основу тога, силе на интерфејсу близу врха прслине могу да се опишу изразом:

¹ Ови радови су штампани у истом броју часописа један за другим.

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{|K|}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{L}\right)^{i\varepsilon} = \frac{|K|}{\sqrt{2\pi r}} e^{i\left(\psi + \varepsilon \ln\left(\frac{r}{L}\right)\right)} \quad (3.28)$$

Када се анализира проблем ширења прслине приказан на слици 3.1 дужина прслине означена са L одговара дужини $2a$. У условима течења у малом обиму проблем прслине приказан на слици 3.1 замењен је полубесконачном прслином у бесконачној средини са асимптотским граничним условима тако да се за довољно велико r поље приближава облику датом једначином (3.2). Ако се једна или обе спојене средине деформишу пластично, величина и облик пластичне зоне зависиће од еластичних и пластичних карактеристика средине и фактора интензитета напона. Претпоставља се да се материјали у споју понашају према J_2 -деформационој теорији пластичности [69].

Нека су σ_{01} и σ_{02} напони течења материјала који чине интерфејс, а са σ_0 је означен напон течења слабијег материјала, $\sigma_0 = \min(\sigma_{01}, \sigma_{02})$. Коefицијенти деформационог ојачања су n_1 и n_2 , Јангови модули еластичности и Поасонови коefицијенти су E_1, ν_1 и E_2, ν_2 . У условима течења у малом обиму напони зависе од фактора интензитета напона K и особина материјала изражених преко односа σ_{01}/σ_{02} , E_1/E_2 , ν_1/ν_2 и n_1/n_2 . На основу димензионе анализе, услова равнотеже и једначине (3.27), може да се напише [12], [23]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 f_{ij} \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}}, \theta, \text{faza} \left\{ K \left(\frac{r}{L} \right)^{i\varepsilon} \right\}, \text{bezdimenzionalni parametri materijala} \right), \quad (3.29)$$

где је f_{ij} бездимензионална функција бездимензионалних аргумената.

Зависност σ_{ij} од K и растојања од врха прслине биће:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 f_{ij} \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}}, \theta, \psi + \varepsilon \ln\left(\frac{r}{L}\right) \right), \quad (3.30)$$

где је: $\psi + \varepsilon \ln(r/L)$ - фаза $K(r/L)^{i\varepsilon}$.

За одређивање структуре функције f_{ij} неопходно је три аргумента у једначини (3.30) представити преко једног. То се ради као збир константног фазног угла и променљивог фазног угла који зависи од растојања r . Трећи аргумент треба модификовати одговарајућом зависношћу од првог аргумента, то јест:

$$\psi + \varepsilon \ln \left[\left(\frac{r}{L} \right) \cdot \left(\frac{K\bar{K}}{r\sigma_0^2} \right)^m \right] = \psi + \varepsilon \ln \left(\frac{K\bar{K}}{r\sigma_0^2} \right) + (m-1)\varepsilon \ln \left(\frac{K\bar{K}}{r\sigma_0^2} \right). \quad (3.31)$$

Неопходно је напоменути да фаза може да зависи од $\ln r$ на много сложенији начин него што је то приказано последњим чланом једначине (3.31).

Нека ξ означава нови фазни параметар [12], дефинисан са:

$$\xi = \psi + \varepsilon \ln \left(\frac{K\bar{K}}{L\sigma_0^2} \right), \quad (3.32)$$

Анализом једначине (3.32) може се закључити да новоуведени фазни угао ξ линеарно зависи од ψ , у мањем обиму од $K\bar{K}$ и L , док од r не зависи. Користећи једначину (3.32), десна страна једначине (3.31) може да се напише као:

$$\xi + \text{faza} \left\{ \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}} \right)^{i\Sigma} \right\}, \quad (3.33)$$

где је Σ бездимензионална комбинација материјала која још није одређена. Користећи једначину (3.33), једначина (3.30) може да се напише као:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 f_{ij} \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}}, \theta, \text{faza} \left\{ \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}} \right)^{i\Sigma} \right\}, \xi \right). \quad (3.34)$$

Знајући да је ξ фазни угао комплексне величине, функција f_{ij} има периодичност 2π за аргумент ξ , то јест:

$$f_{ij}(\dots, \xi) = f_{ij}(\dots, \xi + m\pi), \quad m=2, 4, 6, \dots \quad (3.35)$$

Ако се узме у обзир линеарност једначина равнотеже и релација померање-деформација, долази се до:

$$f_{ij}(\dots, \xi) = f_{ij}(\dots, \xi + m\pi), \quad m=1, 3, 5, \dots \quad (3.36)$$

Из претходне анализе се може закључити да ξ представља фазни параметар поља у условима течења у малом обиму, као што ψ представља фазни угао код поља за линеарно еластичан проблем.

Недостатак резултата добијених у једначинама (3.34) и (3.35) је да је математичка структура поља одређена без узимања у обзир контакта између површина прслине. Релативно померање преко површина прслине мора да има облик [12], [23]:

$$\delta_i = \varepsilon_0 \frac{K\bar{K}}{\sigma_0^2} g_i \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}}, \text{faza} \left\{ \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}} \right)^{i\Sigma} \right\}, \xi \right), \quad (3.37)$$

где је:

ε_0 - деформација течења, а

g_i - бездимензионална функција.

Бездимензионална функција g_i има периодичну структуру приказану са (3.35) и (3.36). У овом делу рада пажња је усмерена на интервал ξ када површине прслине нису у додиру.

Ефективни напон σ_e има облик:

$$\sigma_e = \sigma_{ij} f_e g \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}}, \theta, \text{faza} \left\{ \left(\frac{r\sigma_0^2}{K\bar{K}} \right)^{i\bar{\Sigma}} \right\}, \xi \right). \quad (3.38)$$

Еластично-пластична граница у слабијем материјалу лоцирана је у тачкама где је σ_e једнако σ_0 . После замене вредности у једначину (3.38) и сређивања долази се до следећег резултата за величину пластичне зоне [23], [24]:

$$r_p(\theta) = \frac{K\bar{K}}{\sigma_0^2} R(\theta, \xi), \quad (3.39)$$

овде је $R(\theta, \xi)$ бездимензионална угловна функција која зависи од ξ и параметара материјала. С обзиром да се σ_e појављује као величина на квадрат у изразима за компоненте напона, које су одређене једначинама (3.35) и (3.36), угловна функција R има период π за аргумент ξ :

$$R(\theta, \xi) = R(\theta, \xi + m\pi) \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.40)$$

Рајс је у раду [12] димензионом анализом добио аналогну релацију за величину пластичне зоне:

$$r_p(\theta) = \frac{K\bar{K}}{\sigma_0^2} \tilde{R} \left[\varphi - \varepsilon \ln \left(\frac{L}{r_p} \right) \right]. \quad (3.41)$$

Да би се дефинисала величина и облик пластичне зоне неопходно је изједначити еквивалентни напон у врху прслине са напонам течења слабијег материјала. Користећи једначине (3.38) и постављени услов $\sigma_e = \sigma_0$, за величину пластичне зоне се добија израз, [28]:

$$\begin{aligned} r_p(\theta, n) = & \frac{K_1^2}{8\sigma_0^2 \cosh^2(\pi\varepsilon)} \left[(\tilde{\sigma}_{rr}^I)^2 + (\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^I)^2 - \tilde{\sigma}_{rr}^I \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^I + (\tilde{\sigma}_{r\theta}^I)^2 \right] + \\ & \frac{K_2^2}{8\sigma_0^2 \cosh^2(\pi\varepsilon)} \left[(\tilde{\sigma}_{rr}^{II})^2 + (\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{II})^2 - \tilde{\sigma}_{rr}^{II} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{II} + (\tilde{\sigma}_{r\theta}^{II})^2 \right] + \\ & \frac{K_1 K_2}{8\sigma_0^2 \cosh^2(\pi\varepsilon)} \left[2\tilde{\sigma}_{rr}^I \tilde{\sigma}_{rr}^{II} + 2\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^I \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{II} - \tilde{\sigma}_{rr}^I \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{II} - \tilde{\sigma}_{rr}^{II} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^I + \tilde{\sigma}_{r\theta}^I \tilde{\sigma}_{r\theta}^{II} \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

где су функције угла $\tilde{\sigma}_{ij}^{I,II}$ дефинисане једначинама (2.1) и (2.3).

3.3. Облик асимптотског поља у врху прслине

Величина пластичне зоне која се развија у слабијем материјалу одређена је јачином течења слабијег материјала σ_0 , једначина (3.13) [23], [24]. На местима у зони лома, која су удаљена од врха прслине више од дужине која је реда величине пластичне зоне, нивои напона су константни и износе σ_0 . Облик асимптотских поља која се налазе унутар пластичне зоне, тј. у врху прслине, је одређен карактеристикама материјала са мањим коефицијентом ојачања.

Претпоставља се да се сваки од два материјала у споју карактерише Рамберг-Озгуд релацијом између напона и деформације [68], где су једноосне пластичне деформације у функцији напона дате са $\varepsilon^p/\varepsilon_0 = \alpha(\sigma/\sigma_0)^n$ где је $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$. Ако се пластичне карактеристике материјала 1 (материјал изнад интерфејса) дефинишу са α_1 , σ_1 и n_1 , а за материјал 2 (материјала испод интерфејса) са α_2 , σ_2 и n_2 онда се пластичне деформације могу одредити као $\varepsilon_{01} = \sigma_{01}/E_1$ и $\varepsilon_{02} = \sigma_{02}/E_2$, респективно. Због даље анализе већу вредност од n_1 и n_2 означавамо са n , то јест $n = \max(n_1, n_2)$, а материјал 1 ће бити посматран као материјал са нижим пластичним особинама које су обележене са ν , E , α и σ_0 . Са E_{t1} и E_{t2} обележени су тангентни модули материјала 1 и 2, респективно. Када растојање од врха прслине $r \rightarrow 0$, а уз претпоставку да су напони сингуларни, важиће $E_{t1}/E_{t2} \rightarrow 0$. Из овога се може извести закључак да се биматеријални систем понаша као да је пластично деформисан материјал спојен са крутом основом када $r \rightarrow 0$. Анализа се ради за асимптотски облик поља у врху прслине одређен карактеристикама материјала 1.

Даље се претпоставља да је понашање пластично деформабилног материјала описано J_2 -деформационом теоријом пластичности. Као што се зна J -интеграл не зависи од путање интеграљења (3.6). Контура интеграљења за интерфејсну прслину почиње на горњем материјалу, $x_2 = 0^+$, и завршава се на доњем материјалу $x_2 = 0^-$, а у њеном центру је врх прслине, слика 3.4. Ако се претпостави да поље напона зависи од првог аргумента функције f_{ij} у једначини (3.34), онда ће решења, ако постоје, да имају облик [23], [28]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{K\bar{K}}{\sigma_0^2 r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{h}_{ij}(\theta, \text{faza}[\hat{r}^{i\Sigma}], \xi), \quad (3.43)$$

где је:

$$\hat{r} = r / (K\bar{K} / \sigma_0^2 r). \quad (3.44)$$

Бездимензионална функција \tilde{h}_{ij} има период од 2π за аргумент ξ и зависи од карактеристика материјала. Због аргумената који чине функцију \tilde{h}_{ij} она мора да буде ограничена, али ипак она јако осцилује када $r \rightarrow 0$. У условима течења у малом

обиму је $J = G$ и користећи везу између брзина ослобађања енергије и фактора концентрације напона компоненте напона, могу да се представе у облику:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 r} \right)^{\frac{1}{n+1}} h_{ij}(\theta, \text{faza}[\hat{r}^{\lambda}], \xi), \quad (3.45)$$

где је $h_{ij} = (\alpha/\Lambda E)^{1/(n+1)} \tilde{h}_{ij}$ и $\Lambda = [(1-\nu_1)/\mu_1 + (1-\nu_2)/\mu_2]/(4ch^2\pi\varepsilon)$. Оно што се одмах може приметити је да једначина (3.45) по свом одговара облику линеарно еластичног поља напона дефинисаног једначином (2.36).

Корисно је да се испита зависност h_{ij} од r , за неке специјалне случајеве. Претпоставља се да су оба материјала еластична и да је $e \neq 0$. За једну вредност θ , компоненте напона имају облик $\sigma_{ij} \sim \alpha r^{-1/2} h_{ij}(\hat{r}, \xi, n)$. Ако се упореде овај облик и једначина (2.36) може да се закључи да се h_{ij} мења као r , али да ипак јако осцилује када $r \rightarrow 0$.

Други случај који се посматра је спој еластичног и идеално-пластичног материјала. У овом случају, функција h_{ij} има граничну вредност, али је такође и члан који множи функцију $r^{-\frac{1}{n+1}}$ ограничен јер $n \rightarrow \infty$.

Трећи пример погодан за анализу су два материјала са карактеристикама ојачања n_1 и n_2 , при чему је $n_1 > n_2$. Користећи једначину (3.45) напони изнад интерфејса ($\theta = 0^+$) су облика $\sigma_{ij} \sim r^{-\frac{1}{n_1+1}} h_{ij}(\hat{r}, n_1)$. Претпоставља се сада да напони испод линије споја ($\theta = 0^-$) имају облик $\sigma_{ij} \sim r^{-\frac{1}{n_2+1}} h_{ij}(\hat{r}, n_2)$. Због континуалности сила преко интерфејса биће $r^{-\frac{1}{n_1+1}} h_{ij}(\hat{r}, n_1) = r^{-\frac{1}{n_2+1}} h_{ij}(\hat{r}, n_2) = O(r^\lambda)$. За $n_1 \neq n_2$ ова једнакост важи само у случају ако је h_{2j} сингуларна функција када $r \rightarrow 0$, што је супротно почетној претпоставци да је функција h_{ij} ограничена функција. Ово значи да ако се претпостави да су напони степене функције по r , такве да су силе континуалне преко линије споја, то јест ако је $\sigma_{ij} \sim r^\lambda h_{ij}$ за оба материјала 1 и 2, онда континуалност померања преко линије споја неће бити задовољена. Аналогно, ако су померања континуална преко линије споја и имају облик $u_i \sim r^\rho \tilde{u}_i$ за материјале 1 и 2, онда континуалност сила преко линије споја није задовољена. Међутим, ако се претпостави да се када $r \rightarrow 0$ материјални систем понаша као да је пластично-деформабилан материјал спојен са крутом основом, онда једначина (3.45) има прихватљив облик.

По договору, једначина (3.45) се пише у облику [23]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 r} \right)^{\frac{1}{n+1}} h_{ij}(\theta, \hat{r}, \xi, n), \quad (3.46)$$

где је h_{ij} ограничена функција у односу на r , и

$$\xi = \psi + \varepsilon \ln \left(\frac{K\bar{K}}{\sigma_0^2} \right) = \psi + \varepsilon \ln \left(\frac{J}{\Lambda \sigma_0^2} \right). \quad (3.47)$$

Поље близу врха прслине може да се одређује само са $J^{\frac{1}{n+1}}$ с обзиром да h_{ij} врло мало зависи од J -интеграла и то само преко фазног параметра ξ . У ствари, поља напона и деформације у врху интерфејсне прслине имају особине мешовитог облика HRR поља, [7], [67].

Када је раван испред врха прслине оптерећена затезањем и смицањем, поље HRR особина за хомогену средину у условима мешовитог мод,а има облик [71]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 r} \right)^{\frac{1}{n+1}} h_{ij}(\theta, M^p, n). \quad (3.48)$$

Овде је M^p карактеристика мешовитог пластичног поља [13]. У условима течења у малом обиму, утицаји оптерећења и геометрије на поље у врху прслине дефинисани су са J и M^p . Структура поља у близини врха прслине дефинисана једначином (3.46) указује на то да су J и ξ карактеристични параметри поља у близини врха прслине на биматеријалном интерфејсу.

Као што је већ објашњено, код линеарно еластичног решења, преклапање површина прслине ће се дешавати на неком растојању за све вредности за $\varepsilon \neq 0$. За одређени интервал ψ величина области међусобног пробијања површина лома је мања од физички релевантних дужина. Из тог разлога, да би се дефинисао овај интервал, сматра се да је прслина отворена ако је:

$$\delta_2 \geq 0 \quad \text{за} \quad r_c < r \leq L, \quad (3.49)$$

Величина контактне зоне се одређује аналогно решењу линеарно еластичне механике лома (2.28):

$$r_c = L e^{\frac{\frac{\pi}{2} + \psi - \arctg(2\varepsilon)}{\varepsilon}}.$$

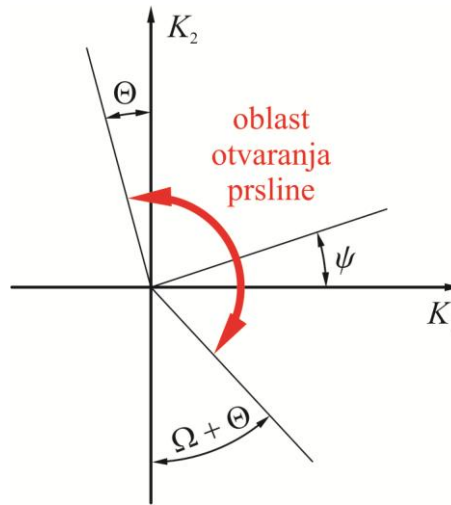
На основу овог решења, отварање прслине Δu_2 је позитивно преко растојања r/L која задовољавају следећу неједнакост:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi + \varepsilon \ln \left(\frac{r}{L} \right) - \Theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.50)$$

За $\varepsilon = 0$, а на основу једначине (3.50) добија се да је прлина отворена све док је фактор интензитета напона за Мод I позитиван. Ако се ознаке $\Theta = -\varepsilon \ln(r/L)$ и $\Theta = \arctan(2\varepsilon)$ уведу у једначине (3.49) и (3.50), прлина ће бити отворена када се фазни угао ψ налази у границама:

$$-\frac{\pi}{2} + \Omega + \Theta \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} + \Theta. \quad (3.51)$$

Слика 3.6 приказује област отварања прслине у K равни [L24].



Слика 3.6 Област отварања прслине у K равни.

Ако се узме у обзир да је карактеристична дужина у условима течења у малом обиму $K\bar{K}/\sigma_0^2$, величина контактне зоне може да се изрази преко нормализованог растојања \hat{r} . Облик траженог резултата може да се добије уз помоћ еластичног резултата (3.50). Користећи једначину (3.32), једначина (3.50) добија облик:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \xi + \varepsilon \ln \hat{r} - \Theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3.52)$$

У условима течења у малом обиму, прлина је отворена ако је:

$$\delta_2 \geq 0 \text{ за } c_1 \leq \hat{r} \leq c_2, \quad (3.53)$$

где је $c_1 \ll 1$ и $c_2 \gg 1$. На основу претходних једначина и знајући да је $\Theta \approx 2\varepsilon$, интервал за параметар ξ за који ће прлина бити отворена је:

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon(2 - \ln c_1) \leq \xi \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon(2 - \ln c_2). \quad (3.54)$$

Ако се претпостави да је $\ln c_1 = -2$ и $\ln c_2 = 2$ (важи за $c_1 = 0.135$ и $c_2 = 7.389$) онда једначина (3.54) има облик $-\pi/2 + 4\varepsilon \leq \xi \leq \pi/2$. Ако је $\ln c_1 = -4$ и $\ln c_2 = 4$ (важи за $c_1 = 0.018$ и $c_2 = 54.598$), интервал се смањује за 4ε , то јест $-\pi/2 + 6\varepsilon \leq \xi \leq \pi/2 - 2\varepsilon$.

Закон материјала

Деформабилна средина се описује J_2 -деформационом теоријом (пластично течење зависи само од енергије промене облика) [69], са Рамберг-Озгуд релацијом између напона и деформације. При једноосном затезању материјал се деформише сагласно једначини [68]:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha_1 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad (3.55)$$

где су:

σ_0 - напон на граници течења,

ε_0 - деформација на граници течења

α_1 - константа материјала (узима се да је 0.1) и

n - коефицијент ојачања.

За троосно напрезање деформација се дефинише као:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha_1 \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n+1} \frac{s_{ij}}{E}, \quad (3.56)$$

где је:

s_{ij} - девијатор напона, а

σ_e - ефективни напон:

$$\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2} \quad (3.57)$$

У једначини (3.56) је коришћена веза $\sigma_0 = E\varepsilon_0$.

3.4. Мешовити облик поља у врху прслине на интерфејсу

Применом J -интеграла на проблем мешовитог мода у условима течења у малом обиму, добија се да поља напона, деформације и померања у врху интерфејсне прслине имају облик [70]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \sigma_0 K^p r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, M^p, n) \\
 \varepsilon_{ij} &= \frac{\alpha \sigma_0}{E} (K^p)^n r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, M^p, n) \\
 u_i &= \frac{\alpha \sigma_0}{E} (K^p)^n r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, M^p, n) \\
 \sigma_e &= \sigma_0 K^p r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_e(\theta, M^p, n)
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

У једначини (3.58) бездимензионалне функције $\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, \tilde{u}_i , $\tilde{\sigma}_e$ зависе од угла θ , карактеристика материјала, параметра мешовите пластичности M^p и коефицијента ојачања n .

Параметар мешовите пластичности дефинише се као, [71]:

$$M^p = \frac{2}{\pi} \arctan \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right|, \tag{3.59}$$

тако да је $M^p = 1$ за оптерећење Мод I и $M^p = 0$ за чисто Мод II оптерећење.

Угловне функције $\tilde{\sigma}_{ij}^{I,II}(\theta, n)$ за материјал 1, имају облик [28]:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{rr}^I(\theta, n) &= -\frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{(n+2)\theta}{(n+1)} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{n\theta}{(n+1)} \left(1 + \sin^2 \frac{n\theta}{(n+1)} + \varepsilon \sin n\theta\right) \\
 \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^I(\theta, n) &= \frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{(n+2)\theta}{(n+1)} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{n\theta}{(n+1)} \left(\cos^2 \frac{n\theta}{(n+1)} - \varepsilon \sin n\theta\right) \\
 \tilde{\sigma}_{r\theta}^I(\theta, n) &= \frac{\sinh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{(n+2)\theta}{(n+1)} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{n\theta}{(n+1)} \left(\cos^2 \frac{n\theta}{(n+1)} - \varepsilon \sin n\theta\right) \\
 \tilde{\sigma}_{rr}^{II}(\theta, n) &= \frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{(n+2)\theta}{(n+1)} - \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{n\theta}{(n+1)} \left(1 + \cos^2 \frac{n\theta}{(n+1)} - \varepsilon \sin n\theta\right) \\
 \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{II}(\theta, n) &= -\frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{(n+2)\theta}{(n+1)} - \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \sin \frac{n\theta}{(n+1)} \left(\sin^2 \frac{n\theta}{(n+1)} + \varepsilon \sin n\theta\right) \\
 \tilde{\sigma}_{r\theta}^{II}(\theta, n) &= \frac{\cosh \varepsilon(\pi - \theta)}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{(n+2)\theta}{(n+1)} + \frac{e^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\cosh \varepsilon\pi} \cos \frac{n\theta}{(n+1)} \left(\sin^2 \frac{n\theta}{(n+1)} + \varepsilon \sin n\theta\right)
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Функције угла $\tilde{\sigma}_{ij}^{I,II}(\theta, n)$ за материјал 2, имају облик аналоган облику једначина (3.60) само треба $-\pi$ заменити са π , и обрнуто. Ови резултати су аналогни са резултатима из рада [73]

Амплитуду K^p (пластични фактор интензитета напона) дефинисао је Ших [71] тако да бездимензионална функција $\tilde{\sigma}_e \leq 1$. Са овом дефиницијом, између K^p и J постоји следећа веза:

$$J = \frac{\alpha \sigma_0^2}{E} I_n (K^p)^{n+1}. \quad (3.61)$$

Фактор I_n зависи од степена мешовитости, M^p и n . За широки интервал ових параметара фактор I_n такође је дефинисао Ших [71], док је Вељковић у раду [28] користила $I_n = 1$.

За случај линеарне елстичности, параметар мешовите пластичности може да се прикаже као:

$$M^p \rightarrow M^e \equiv \frac{2}{\pi} \arctan \left| \frac{K_I}{K_{II}} \right|. \quad (3.62)$$

У условима течења у малом обиму напони изван пластичне зоне су еластични, па се M^e такође дефинише као:

$$M^e \equiv \frac{2}{\pi} \arctan \left| \frac{\sigma_{\theta\theta}(r^*, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r^*, \theta = 0)} \right|, \quad (3.63)$$

где је r^* унутар области доминације еластичног поља. У овом случају J -интеграл се дефинише са:

$$J = \frac{(1-\nu^2)}{E} (K_I^2 + K_{II}^2), \quad (3.64)$$

за случај хомогеног тела, и

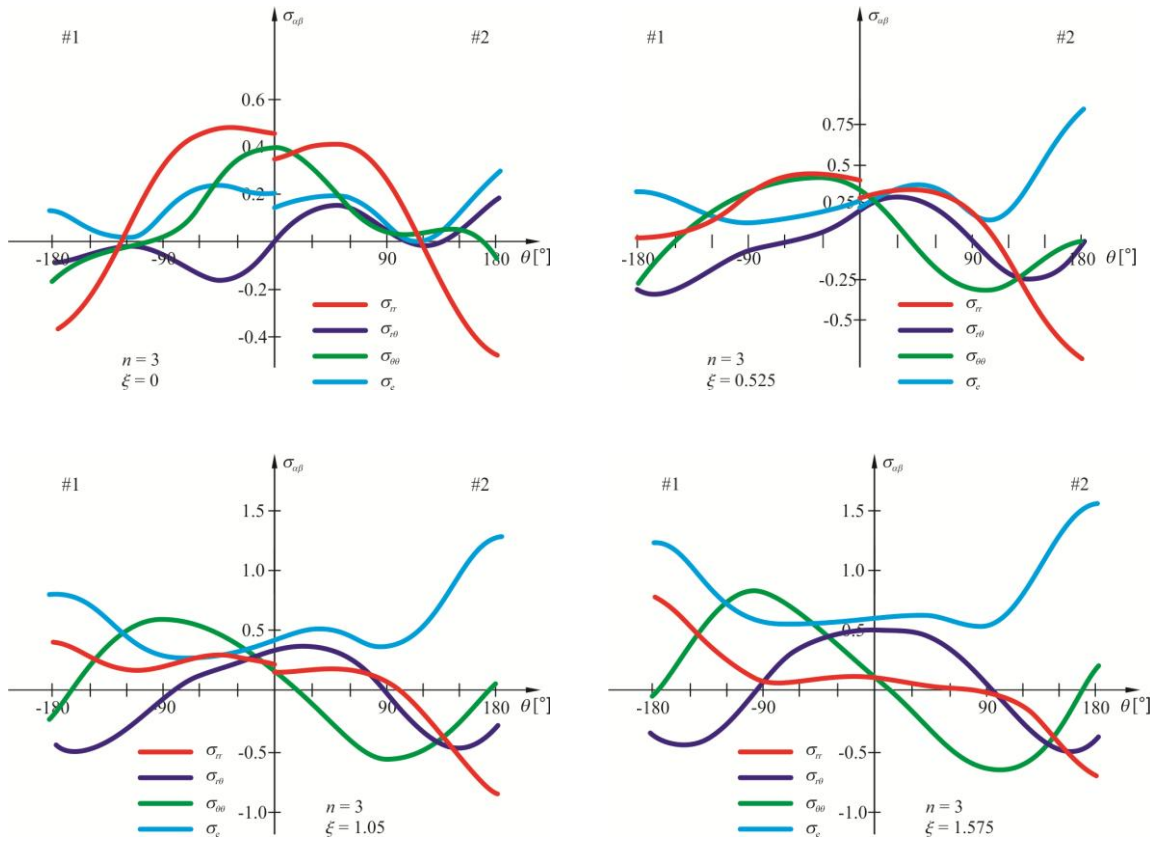
$$J = \frac{1}{\cosh^2(\pi\varepsilon)} \cdot \frac{|K|^2}{E^*}, \quad (3.65)$$

за случај биматеријалног система, где је:

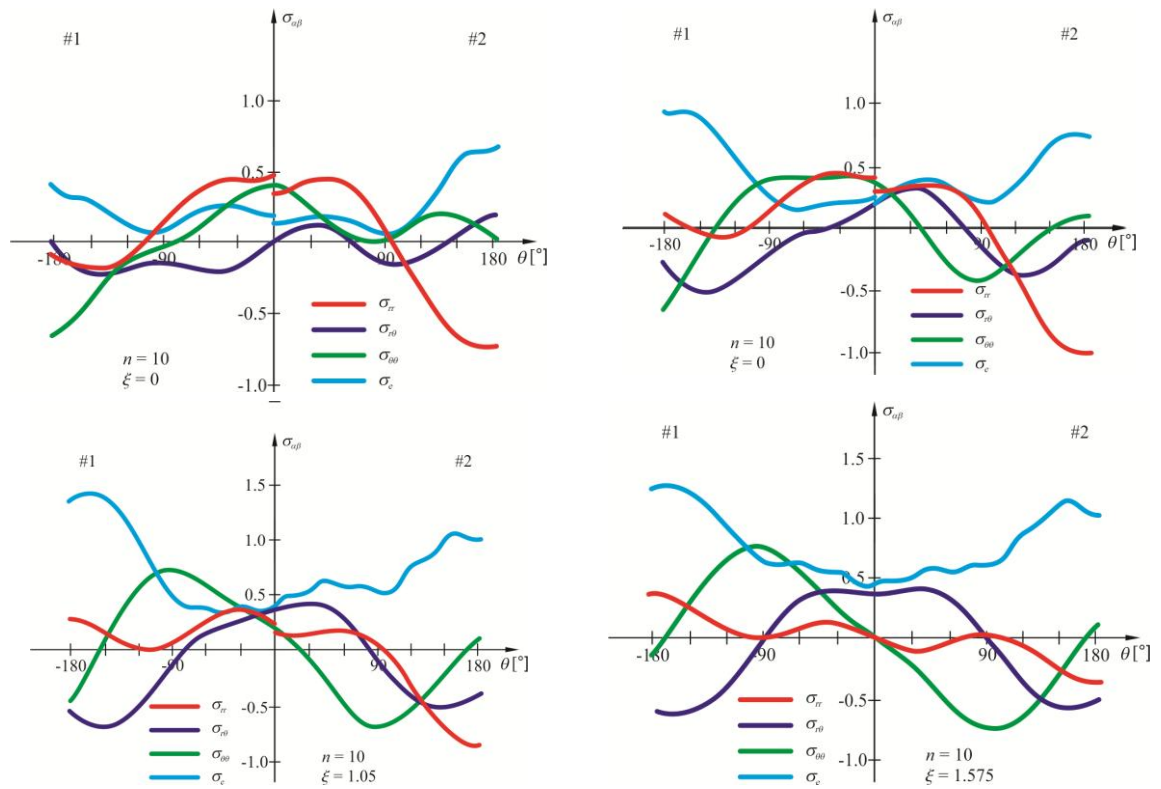
$$\frac{2}{E^*} = \frac{1}{E'_1} + \frac{1}{E'_2}, \quad (3.66)$$

и $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ за раванско стање деформације и $E' = E$ за раванско стање напона.

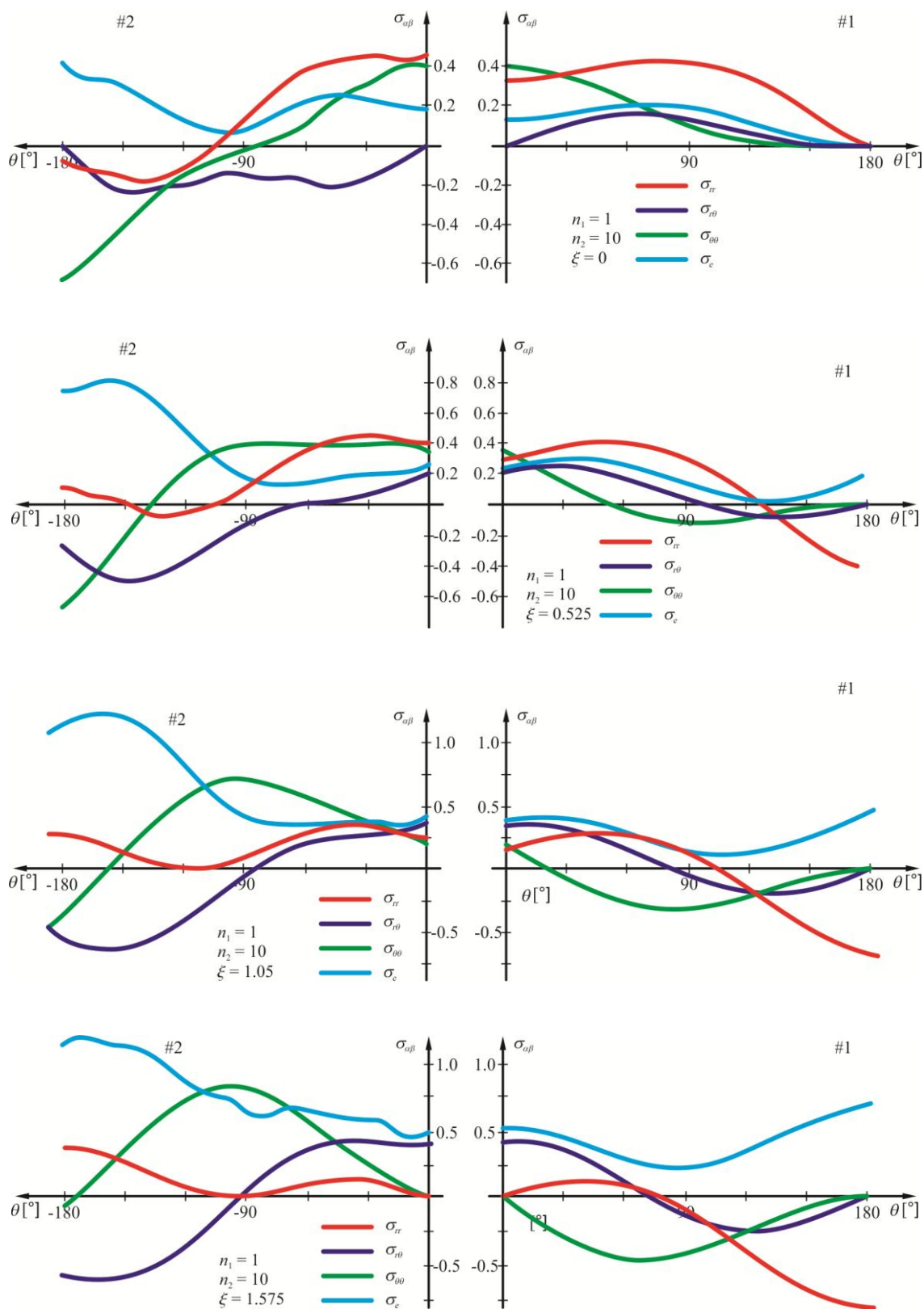
Да би једначине могле да се верификују као тачне пореде се са моделом који су Ших и Асаро представили у радовима [23], [24] и [71]. Посматра се интерфејс два материјала следећих карактеристика. Јангови модули еластичности материјала који чине интерфејс су E_1 и E_2 са међусобним односом $E_1 / E_2 = 2.5$, а Поасонови коефицијенти су $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. За ову биматеријалну комбинацију осцилаторни



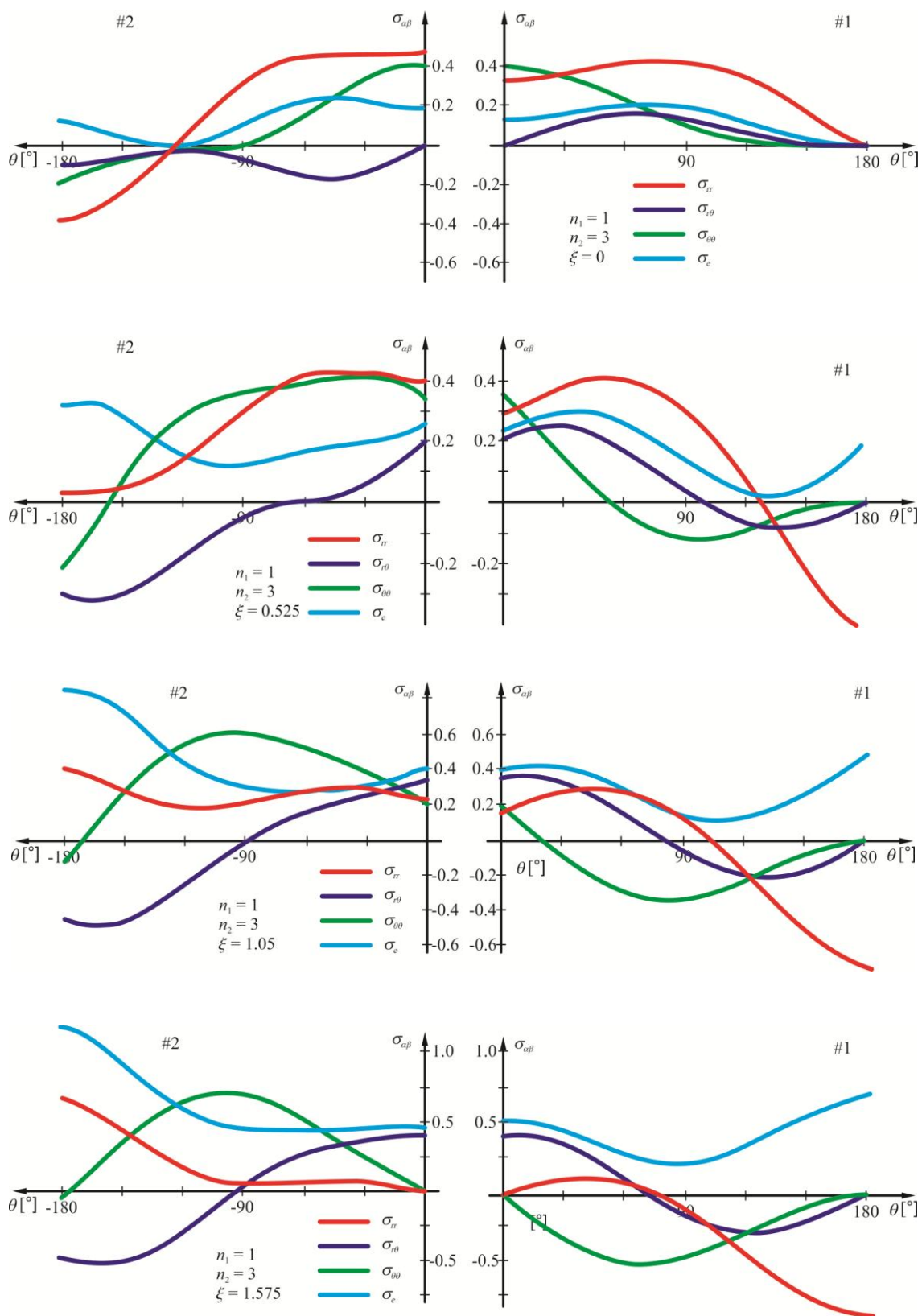
Слика 3.8 Промена напона у функцији угла са коефицијентом ојачања $n = 3$



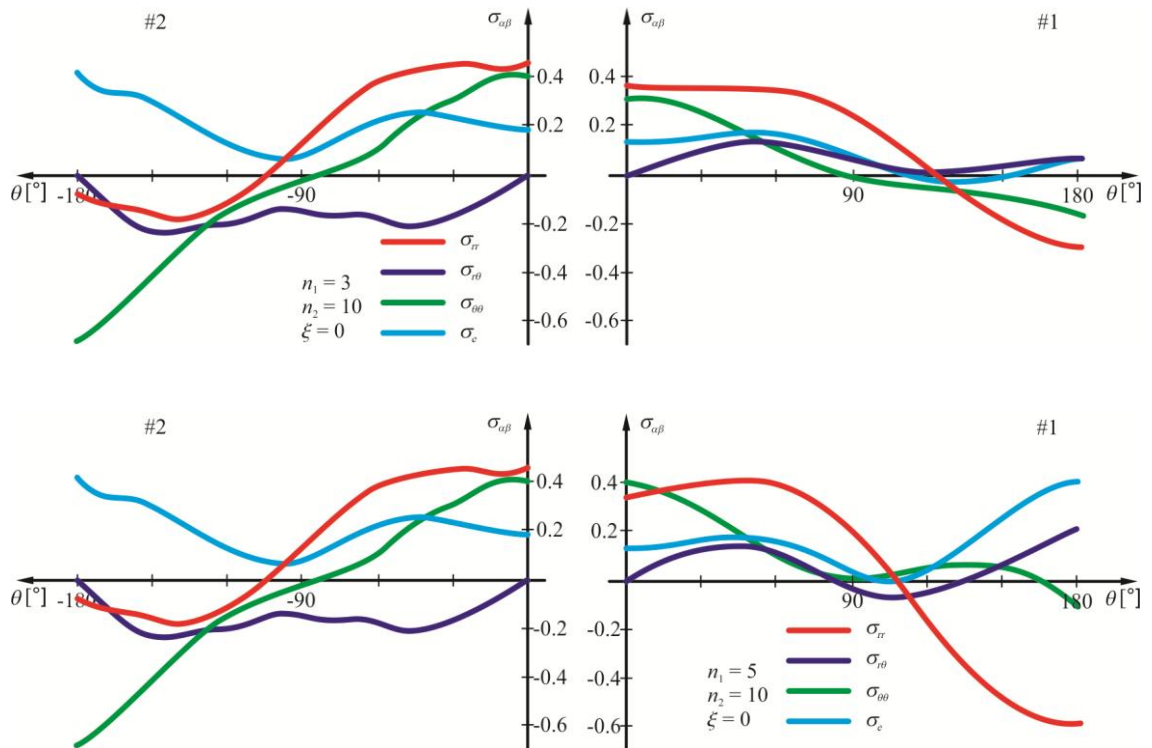
Слика 3.9 Промена напона у функцији угла са коефицијентом ојачања $n = 10$



Слика 3.10 Промена напона у функцији угла за различите услове оптерећења и коефицијенте ојачања $n_1 = 1$ и $n_2 = 10$



Слика 3.11 Промена напона у функцији угла за различите услове оптерећења и коефицијенте ојачања $n_1 = 1$ и $n_2 = 3$



Слика 3.12 Промена напона у функцији угла за различите услове оптерећења и коефицијенте ојачања $n_1 = 3$ и $n_2 = 10$ и $n_1 = 5$ и $n_2 = 10$

Поређење добијених резултата са резултатима у литератури показује да је одступање мање од 5%, што наводи на закључак да су једначинама (3.60) добро описане напонске функције.

4. РАСЛОЈАВАЊЕ ПРЕВЛАКА

Материјали у облику танких филмова се користе за израду компоненти које подносе механичко оптерећење у направама. Материјали у облику танких филмова подносе механичка и термална оптерећења и неповољни атмосферски и хемијски утицај средине.

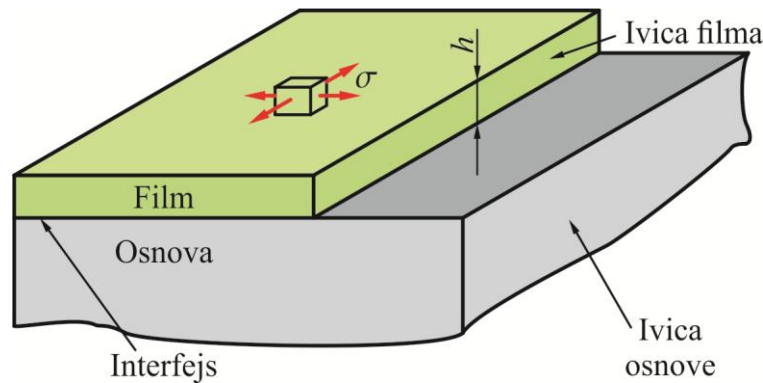
Вишеслојни филмови или ламинати су подкласа танких филмова где су наизменично депоновани слојеви различитих материјала. Комбинацијом различитих материјала и оптимизацијом процеса у изради микроструктуре, може се постићи промена тврдоће и других механичких својстава у односу на својства појединачних материјала који чине композит. Вредност тврдоће се повећава са смањењем дебљине слојева до нанометарских димензија. Повећање тврдоће је забележено у различитим класама материјала који чине композитни систем, на пример метал/метал, метал/керамика или керамика/керамика композитним системима.

Најчешћи примери примене су керамичке превлаке на металној основи, метални слојеви на основи од полимера, где је температура на којој се ови спојеви образују већа од радне температуре, термоизолационе превлаке као што су Al_2O_3 на Ni-Cr-Al и Fe-Cr-Al легурама, тврде провидне превлаке на оптичким полимерима, металне нити на основи од полимера код електронских модула или фeroелектрични актуатори [74].

4.1. Ивично раслојавање превлака

Танак филм дебљине h нанет на основу, приказан је на слици 4.1. Материјали филма и основе, су изотропни, линеарно еластични, са Јанговим модулом еластичности, Поасоновим коефицијентом и коефицијентом линеарног (термичког) ширења (E_f, ν_f, α_f) и (E_s, ν_s, α_s) , респективно [14]. Разлике у еластичним карактеристикама су одређене Дундурсовим параметрима α и β , дефинисаним једначином (2.9), где је $\alpha > 0$ када филм има већу крутост од основе. Прслина ће расти када брзина ослобођања енергије G достигне вредности

жилавости лома Γ_f , Γ_s , Γ_i , зависно да ли прлина пропагира у филму, основи или дуж интерфејса, респективно. Услови за ширење прлине у облику Моде I обично доминирају код прлина које настају и шире се у филму или основи, док се мешовити Мод мора узети у обзир када се појави прлина на интерфејсу.



Слика 4.1 Танак филм нанет на основу

Напони у филмовима и вишеслојним материјалима могу имати три основна узрока: унутрашњи, термички и механички. Унутрашњи и термички напони се често називају заосталим напонима. Напони који потичу од механичког оптерећења су механички напони.

Постоји много облика разарања филмова и вишеслојних материјала који потичу од великих напона. Ови системи су погодни за разарање интерфејса који чини њихову унутрашњост или за раслојавање. Када се развијају затежући напони може да дође до разарања филма, а раслојавање бубрењем може да се деси када су напони притисни. Неколико облика разарања филма на основи када је филм изложен затежућим напонима је приказано на слици 4.2.

На слици 4.2(a) приказане су изоловане површинске прлине које могу да пропагирају свака за себе или могу да доведу до распрскавања целог филма као што је то приказано на слици 4.2(b). Ако је основа крта, прлина из филма може да се са филма прошири у основу, чак и ако она није директно изложена оптерећењу, слика 4.2(c). На слици 4.2(d) је приказано разарање интерфејса као и могућност да прлина са интерфејса скрене у основу и настави да се шири у основи паралелно интерфејсу. Комбинација разарања филма и интерфејса, приказана на слици 4.2(e), може да се јави ако су жилавост интерфејса и филма у одређеним границама. Сваки од облика разарања приказаних на слици 4.2, подразумева услове стационарног раста када прлина пређе величину карактеристичног растојања, односно величину дебљине филма.

Иако су облици разарања филмова тродимензионални, они се могу посматрати и решавати као равански проблеми. Критеријум лома по коме се грубо може предвидети да ли ће се неки од облика разарања десити или не, се своди на следеће.

Брзина ослобађања енергије за прслину је [14]:

$$G = Z \frac{h\sigma^2}{\bar{E}_f} \quad (9.1)$$

где је:

Z - бездимензионална покретачка сила,

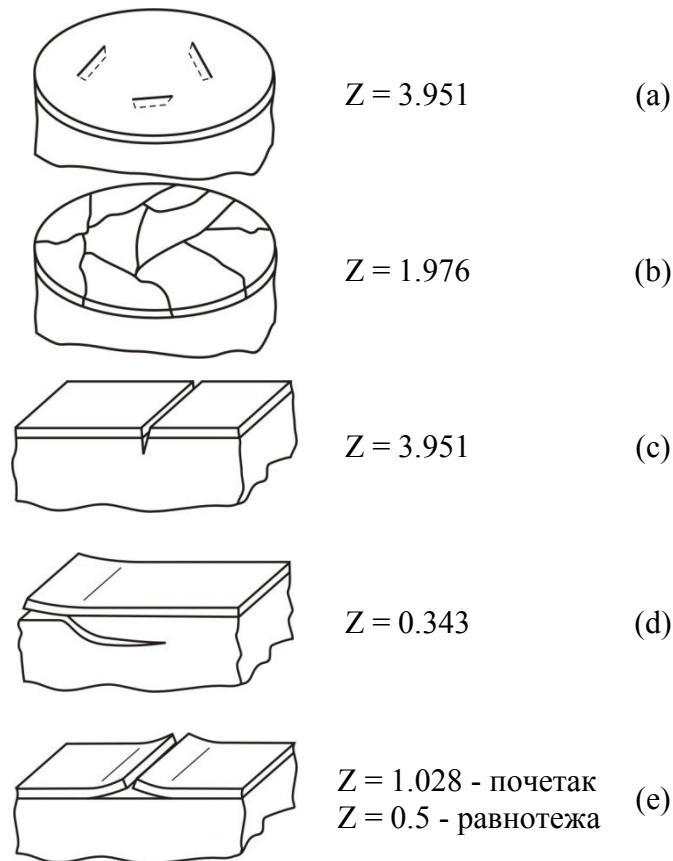
h - дебљина филма или слоја,

σ - напон,

\bar{E}_f - Јангов модул еластичности филма и

Γ - жилавост лома.

Бездимензионална покретачка сила Z зависи од врсте и облика разарања и разлике у еластичним карактеристикама материјала интерфејса, а чије су вредности дате на слици 4.2

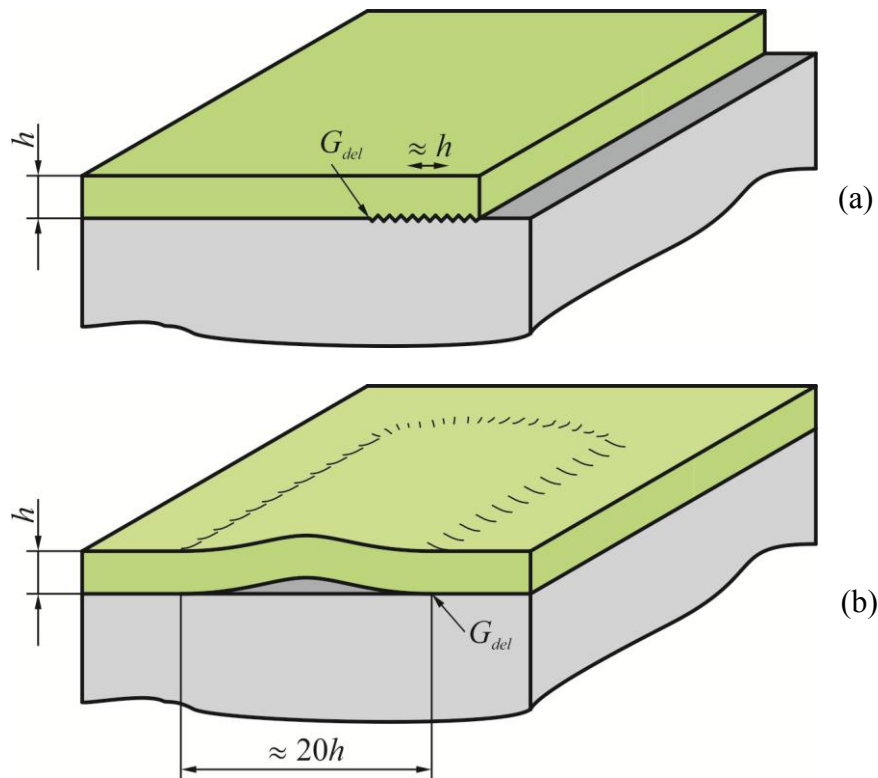


Слика 4.2 Облици разарања филмова изложених затезању

На основу једначине (4.1) могуће је одредити критичну дебљину слоја да се избегне неки од облика разарања. Разарање филма ће бити спречено ако је за дате еластичне карактеристике, напрезање и облик разарања, филм тањи од критичне вредности:

$$h_c = \frac{\bar{E}_f \Gamma}{Z \sigma^2} \quad (4.2)$$

Ако су танак филм или превлака изложени притискујућим напонима, облици разарања који се јављају су: ивично раслојавање, слика 4.3(a) и раслојавање бубрењем, слика 4.3(b).



Слика 4.3 Облици разарања танких филмова и превлака изложених притиску

Ако се претпостави да је превлака изложена напону затезања сталног интензитета σ , и да је дебљина превлаке h много мања од дебљине основног материјала, брзина ослобађања енергије за раслојавање превлаке је, J_u (YU) и остали [76]:

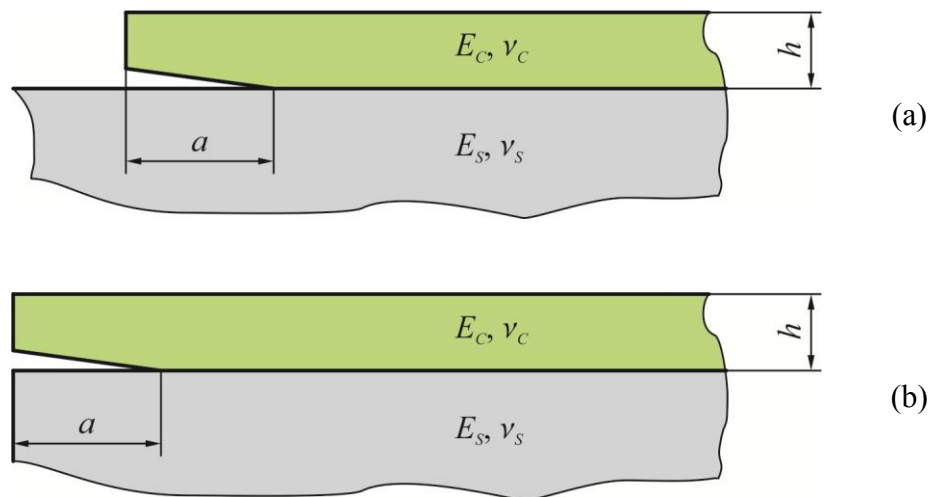
$$G_{del} = \frac{(1 - \nu_c^2) \sigma^2 h}{2E_c} \quad (4.3)$$

где су E_c , ν_c и μ_c Јангов модул, Поасонов коефицијент и модул клизања превлаке, респективно, а E_s , ν_s и μ_s одговарајуће карактеристике основе.

Еластична енергија по јединици површине, која може да изазове раслојавање, је одређена једначином (4.3). За прву апроксимацију, G_{del} је такође и енергија која може да покрене интерфејсну прслину код раслојавања бубрењем. Просечна величина грешке неопходна да иницира бубрење је око $20h$. Величина грешке за иницирање раслојавања које почиње на ивици превлаке и разара унутрашњост основе је од 1 до $2h$. Ово наводи на закључак да је ивично раслојавање више вероватно него раслојавање бубрењем. Стварност је међутим, другачија. Код већине система, примарни облик разарања је раслојавање бубрењем које почиње од ивице [74].

4.2. Утицај ивица на раслојавање превлака

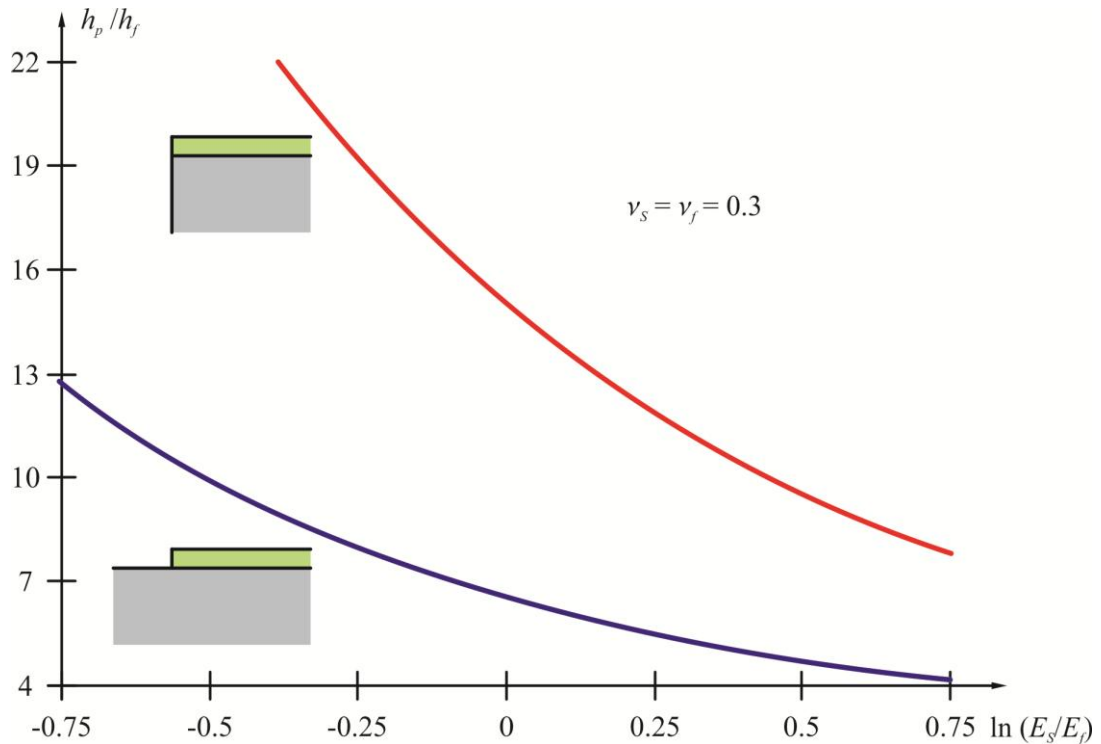
Превлаке спојене за основни материјал често подносе велике заостале раванске напоне који се са превлаке, преко напона смицања, преносе на интерфејс близу ивица. Ова ивична област игра значајну улогу у тумачењу раслојавања превлака. У овом делу је приказана анализа расподеле заосталих напона у превлаци близу ивице, као и брзина ослобађања енергије и фазни угао оптерећења за интерфејсну прслину која се појављује на ивици превлаке. Анализирана су два могућа случаја: ивица превлаке лежи на унутрашњој страни основног материјала, слика 4.4(a) и ивица превлаке се поклапа са ивицом основног материјала, слика 4.4(b).



Слика 4.4 Конфигурације у условима раванског стања деформације

За систем приказан на слици 4.4(a), брзина ослобађања енергије приближава се граничној равнотежној брзини ослобађања енергије за интерфејсну прслину и прлина се шири за мање од дебљине превлаке. За случај приказан на слици 4.4(b), брзина ослобађања енергије остаје далеко испод равнотежне величине док се прлина шири за до 10 или више дебљина превлаке. У овом случају ивица представља препреку иницирању прслине што није случај за проблем приказан на слици 4.4(a). Неслагање еластичних карактеристика превлаке и основног материјала, у систему превлака/основа приказаном на слици 4.4(b), такође игра важну улогу, док у случају система приказаног на слици 4.4(a) то није битно.

Утицај положаја ивице превлаке на величину дужине преноса силе h_p , а у функцији карактеристика материјала приказан је на слици 4.5. Величина дужине преноса силе се дефинише као растојање од слободне ивице филма при којој сила достиже 90% од асимптотске вредности σh [75].



Слика 4.5 Утицај положаја ивице филма на дужину преноса силе

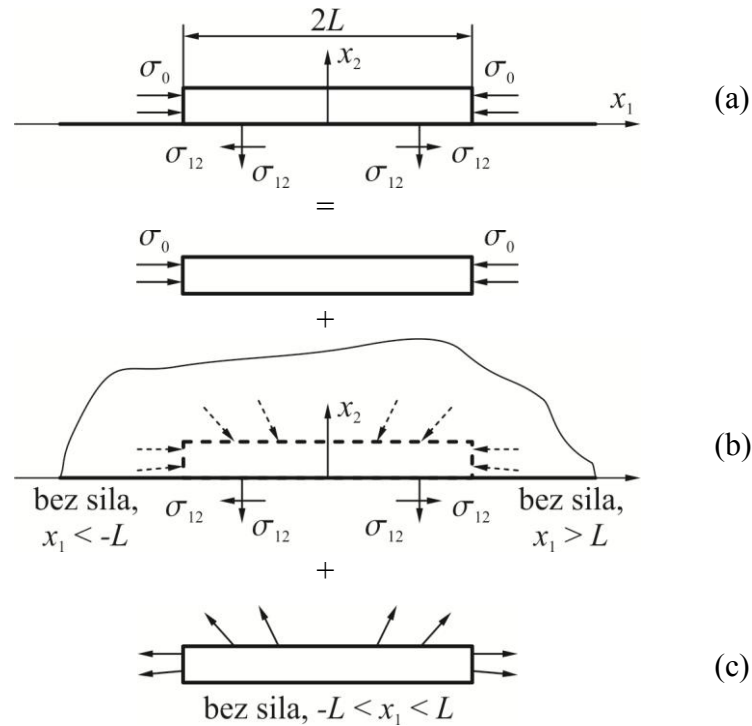
Када су превлаке изложене затезању теже се одвајају од основног материјала зато што се затезањем слој изнад интерфејса ослобађа од заосталих напона. Одвајање превлаке почиње када брзина ослобађања енергије интерфејса G_{int} буде већа од брзине ослобађања енергије за цепање G_{del} (у овом случају раслојавање),

$$G_{int} \geq G_{del} \quad (4.4)$$

Брзина ослобађања енергије интерфејса G_{int} се рачуна на основу једначине (2.26), а G_{del} на основу једначине (4.3).

Одређивање расподеле заосталих напона у превлаци у близини ивице рађено је на основу модела који су предложени у [76] слика 4.6.

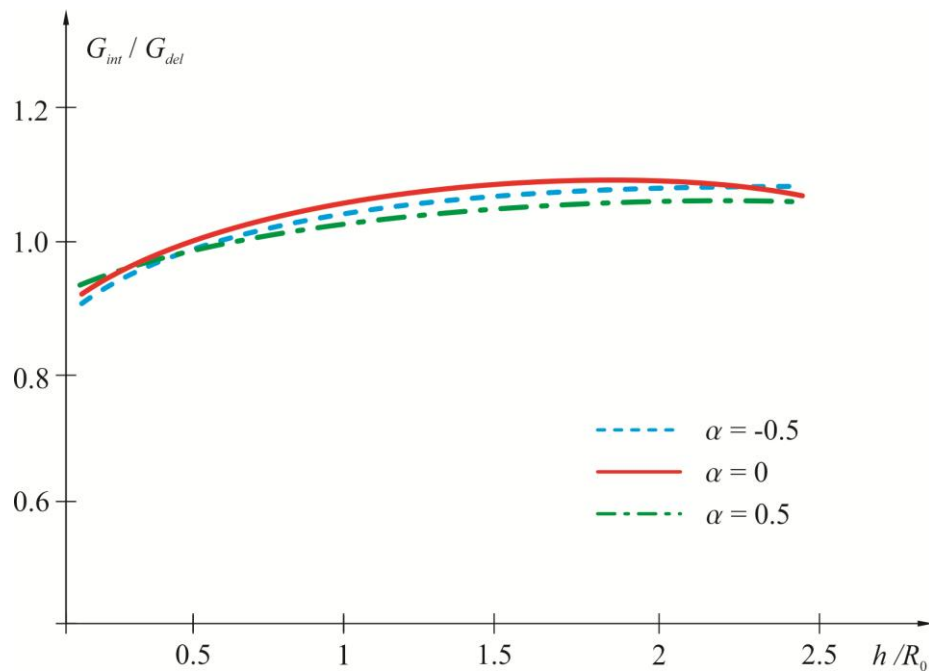
Проблем заосталих напона у превлаци посматра се као збир три појединачна проблема. Први је проблем који анализира за слободну превлаку у условима хомогеног притисног оптерећења - слика 4.6(a). Други је проблем који анализира полубесконачни полупростор на који делују затезуће и смичуће силе - слика 4.6(b). Овај полупростор има све карактеристике превлаке. Трећи проблем је проблем слободне превлаке са специјално изабраним силама дуж три површине - слика 4.6(c).



Слика 4.6 Дефиниција и решавање проблема заосталих напона

Анализом брзине ослобађања енергије за прлину у условима еластичног лома бавили су се многи аутори [74], [75], [76].

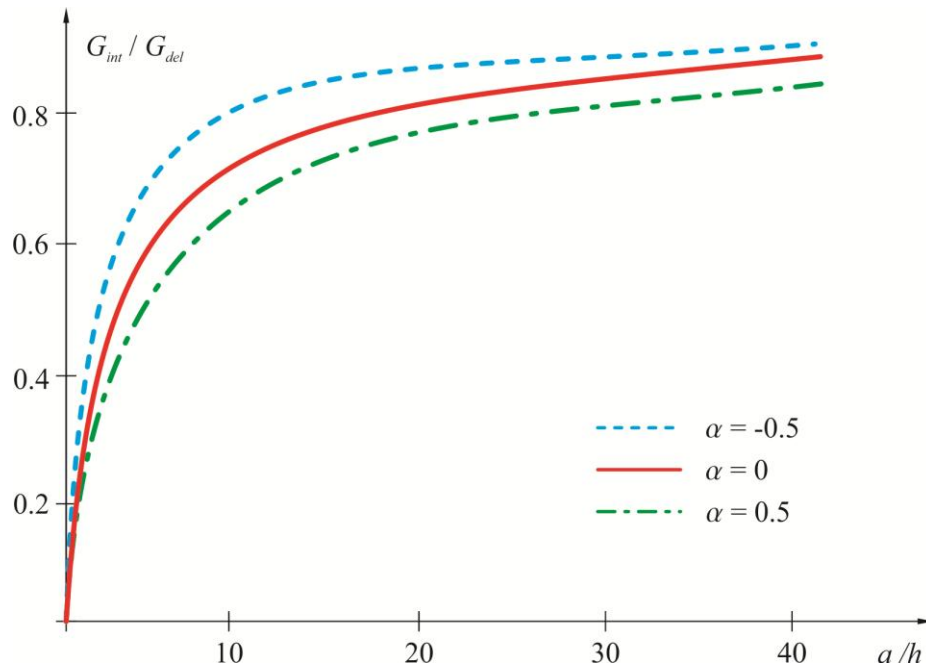
Брзина ослобађања енергије за прлину која почиње из унутрашње ивице, слика 4.4(а) приказана је на слици 4.7.



Слика 4.7 Брзина ослобађања енергије за проблем прлине која почиње из унутрашње ивице

Анализом слике 4.7 може се доћи до закључка разлика између еластичних карактеристика материјала који чине интерфејс, а који је дефинисана Дундурсовим параметром α , нема неког битног утицаја на однос брзина ослобађања енергије. Такође се види да брзина ослобађања енергије долази у равнотежно стање врло брзо чак и за дужине које су мање од $h/2$.

Брзина ослобађања енергије за прслину која излази из углова ивица, слика 4.4(b), је приказана на слици 4.8.



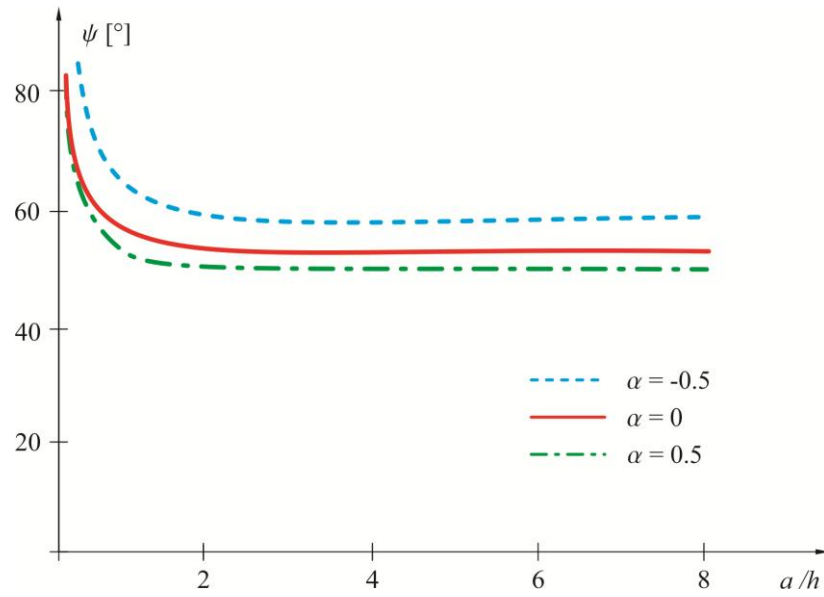
Слика 4.8 Брзина ослобађања енергије за проблем прслине која полази из углова ивица

Са слике 4.8 се види да како дужина прслине расте, брзина ослобађања енергије се споро приближава брзини ослобађања енергије за раслојавање превлаке, једначина (4.3). Брзина ослобађања енергије почиње од 0 у $a/h=0$ и достиже 95% од G_{del} када a/h прелази 10 или више. Такође се види велики утицај Дундурсовог параметра α , односно разлике у еластичности материјала основе и превлаке. Из овога се може закључити да ће до одвајања превлаке доћи много касније ако је превлака крућа од основе.

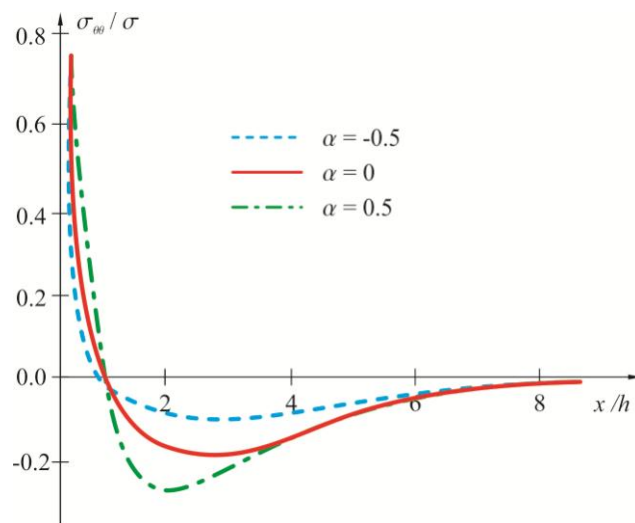
На слици 4.9. приказана је зависност фазног угла оптерећења од дужине прслине за проблем прслине која полази из углова ивица, слика 4.4(b).

Са слике 4.9 се види да фазни угао оптерећења, ψ , да зависи од еластичне неусаглашеност материјала, односно параметра α .

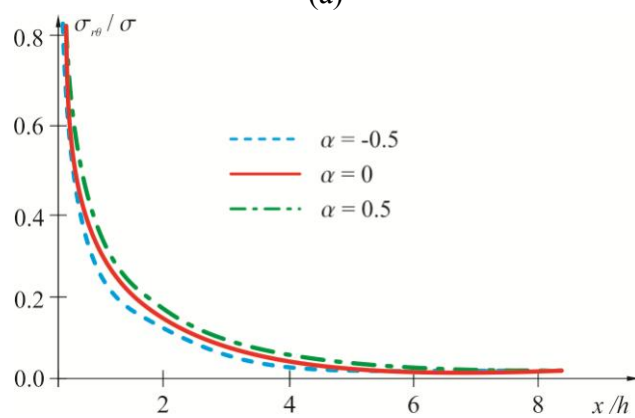
На сликама 4.10 и 4.11 приказана је расподела напона у врху прслине за прслину која почиње из унутрашње ивице, слика 4.4(a), односно за прслину која полази из углова ивица, слика 4.4(b).



Слика 4.9 Фазни угао оптерећења за проблем прслине која полази из угла ивица



(a)

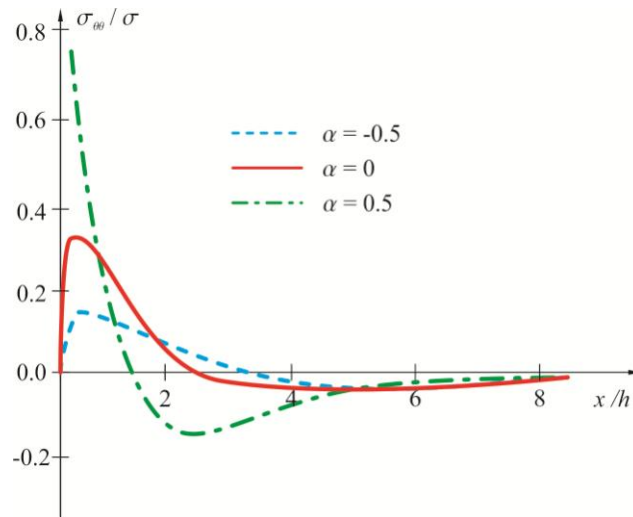


(b)

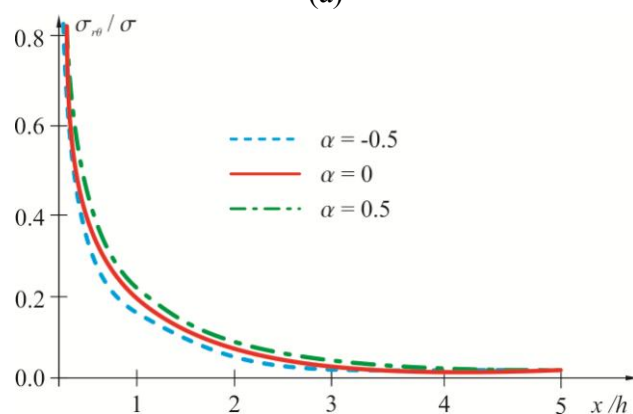
Слика 4.10 Расподела напона: (a) $\sigma_{\theta\theta}$ и (b) $\sigma_{r\theta}$ испред врха прслине која почиње из унутрашње ивице

Са слике 4.10 се види да је нормални напон затежујући близу врха прслине и постаје притисни унутар зоне мање од једне дебљине превлаке.

Ивице имају јак утицај на расподелу напона и брзину ослобађања енергије за интерфејсну прслину система превлака/основа. Штавише, постоје значајне разлике између понашања прслине које се појављују из унутрашњих ивица или угаоне ивице.



(a)



(b)

Слика 4.11 Расподела напона: (a) $\sigma_{\theta\theta}$ и (b) $\sigma_{r\theta}$ испред врха прслине која полази из углова ивица.

Угловне ивице дају суштинску унутрашњу заштиту против раслојавања превлака интерфејса. Унутрашње ивице немају ту карактеристику.

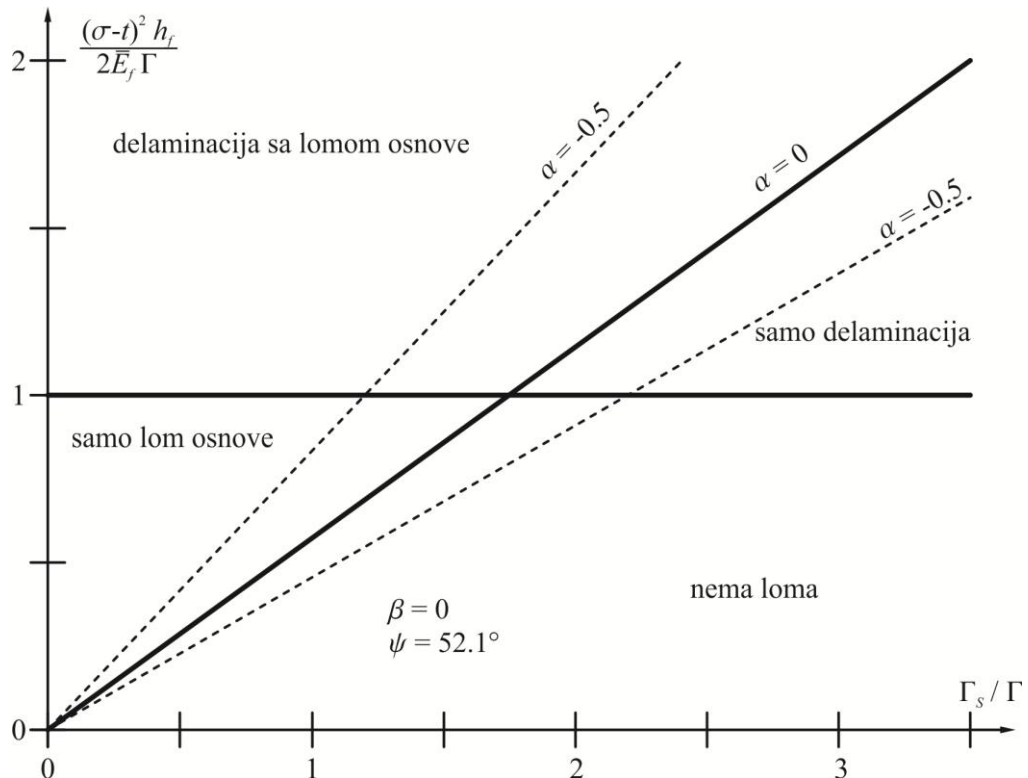
На основу претходних дијаграма, слике 4.7 до 4.11, али и на основу разматрања која су дата у глави 2 могу се извести још неки закључци, а на основу анализе у [82].

За прслину која се шири кроз интерфејс између филма и основе се анализом једначина (2.43) до (2.46) и дијаграма на сликама 2.9 и 2.10 може се рећи следеће. Референтна дужинска јединица, која се изима у обрасцима, је дебљина филма h_f .

Максимална вредност односа G/G_0 јавља се за фазни угао $\psi \approx 52.1^\circ$ [14]. Ако се уведу бездимензијски односи:

$$(\sigma - t)^2 h_f / 2\bar{E}_f \Gamma \quad (4.5)$$

где су σ - напон у филму, t - заостали напон у филму, h_f - дебљина филма, E_f - Јангов модул еластичности филма, Γ - жилавост лома интерфејса и Γ_s - жилавост лома основе, може се нацртати следећи дијаграм, слика 4.12.

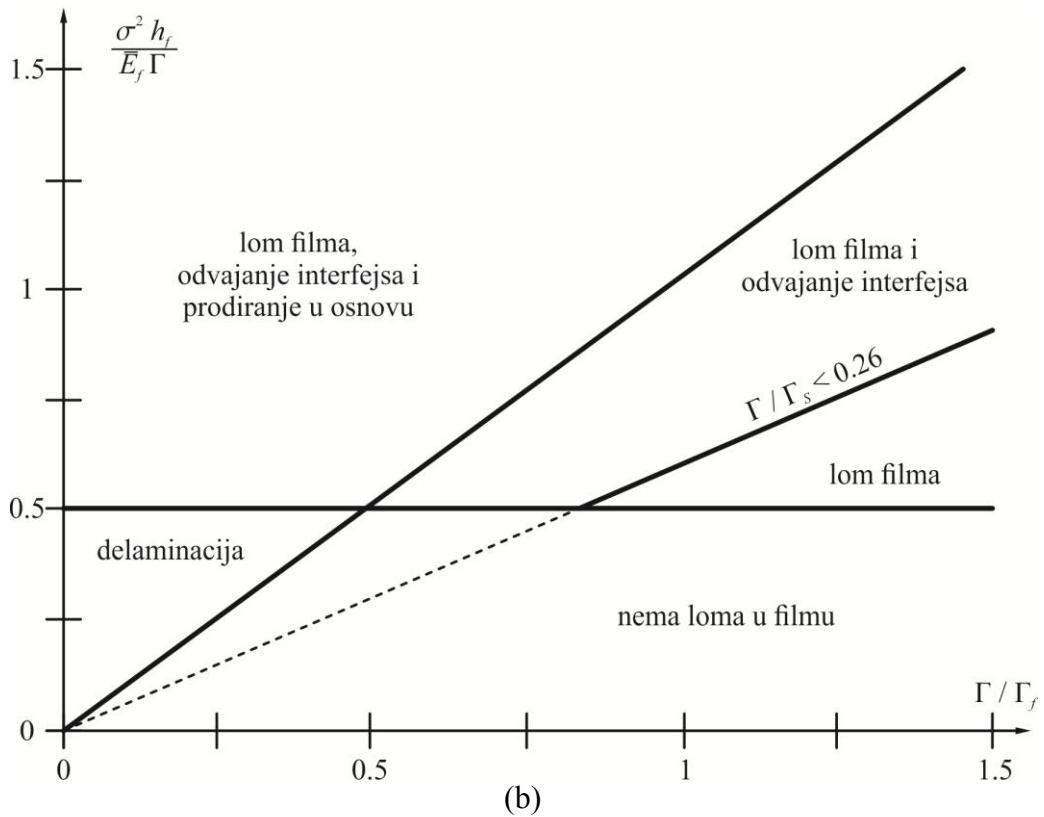
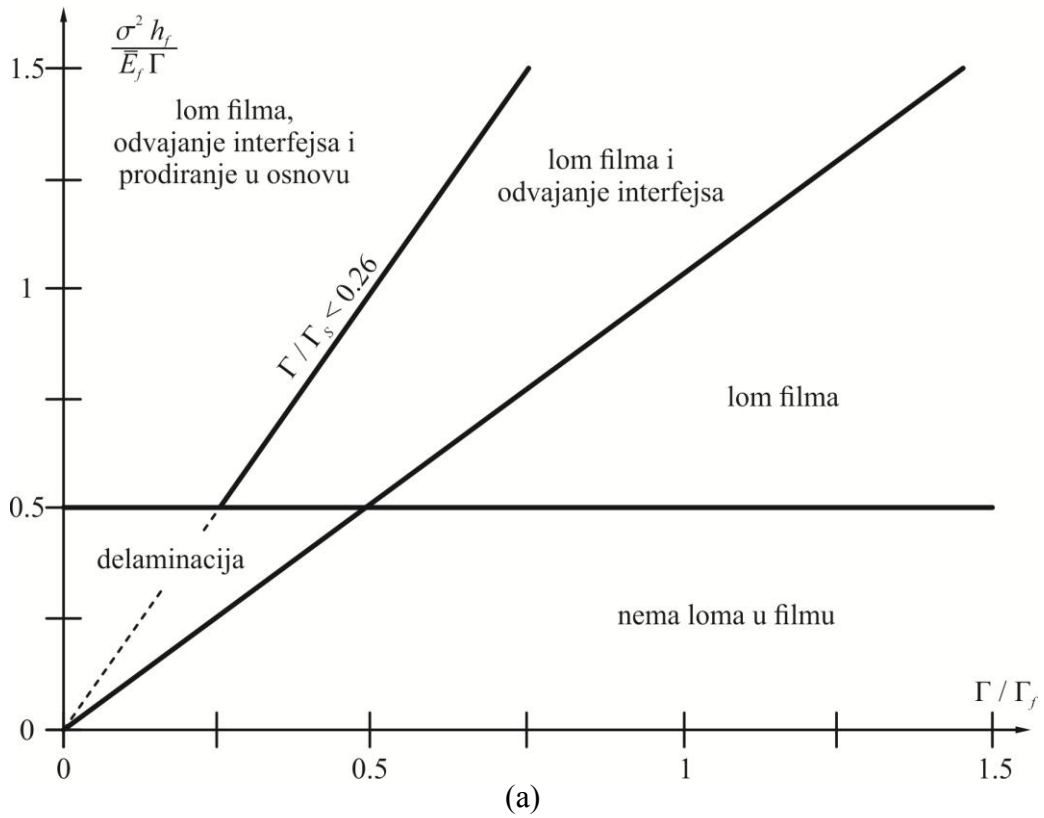


Слика 4.12 Услови за појаву различитих врста ширења прслине са интерфејса

За прслину која се шири кроз филм и приближава основи се анализом једначина (2.60) до (2.65) и дијаграма на слици 2.18 може рећи следеће. Референтна дужинска јединица која се изима у обрасцима је дебљина филма h_f . Вредност односа G_d/G_p , за $\alpha=0$, при коме настаје двострано дефлектована прслина је $G_d/G_p = 0.26$ [22]. Ако се уведу бездимензијски односи на основу једначине (4.2):

$$\frac{\sigma^2 h_f}{E_f \Gamma}$$

где су σ - напон у филму, h_f - дебљина филма, E_f - Јангов модул еластичности филма, Γ - жилавост лома интерфејса и Γ_s - жилавост лома основе, могу се нацртати следећи дијаграми, слика 4.13.



Слика 4.13 Услови за појаву различитих врста ширења прсине која прилази интерфејсу

4.3. Раслојавање превлака бубрењем

Танки површински слојеви и превлаке изложене су знатним заосталим притисним напонима. Ово је нарочито изражено код керамичких превлака на металној основи и код металних слојева на основи од полимера, где је температура на којој се ови спојеви образују виша од радне температуре. Ове превлаке су осетљиве на раслојавање бубрењем ако је жилавост интерфејса мала. Велики заостали притисни напони могу да изазову различите облике бубрења превлака као што су дугачак равнострани мехур, кружни или елипсasti мехур или такозвани мехур у облику телефонске жице.

Посматрајући понашање оксидне превлаке индијум-калај на основи од полимера, где постоји велика разлика у еластичним карактеристикама превлаке и основе, Котерел (COTTERELL) и Чен (CHEN) [77] су показали да еластичне карактеристике основе имају утицај на вредности напона које доводе до појаве мехура и брзину ослобађања енергије на интерфејсу када је модул еластичности основе значајно мањи од модула еластичности превлаке. Ју и Хачинсон [78] су њихове резултате проширили на произвољне комбинације материјала и величина мехурова.

Посматра се проблем дугачког равностраног мехура приказан на слици 4.14. Превлака је одвојена од основе у области $-b \leq x_1 \leq b$. Између превлаке и основе постоји интерфејсна прелина на растојању b од координатног почетка у условима раванског стања деформације. Са h је означена дебљина превлаке, са $2b$ ширина мехура, а са δ висина мехура. Претпоставља се да је материјал превлаке еластичан, изотропан са Јанговим модулом еластичности E_C и Поасоновим коефицијентом ν_C . Такође се претпоставља да је основа еластична, бесконачне дебљине са Јанговим модулом еластичности E_s и Поасоновим коефицијентом ν_s . Анализа овог проблема је представљена у раду [79] и овде ће он бити детаљно представљен.

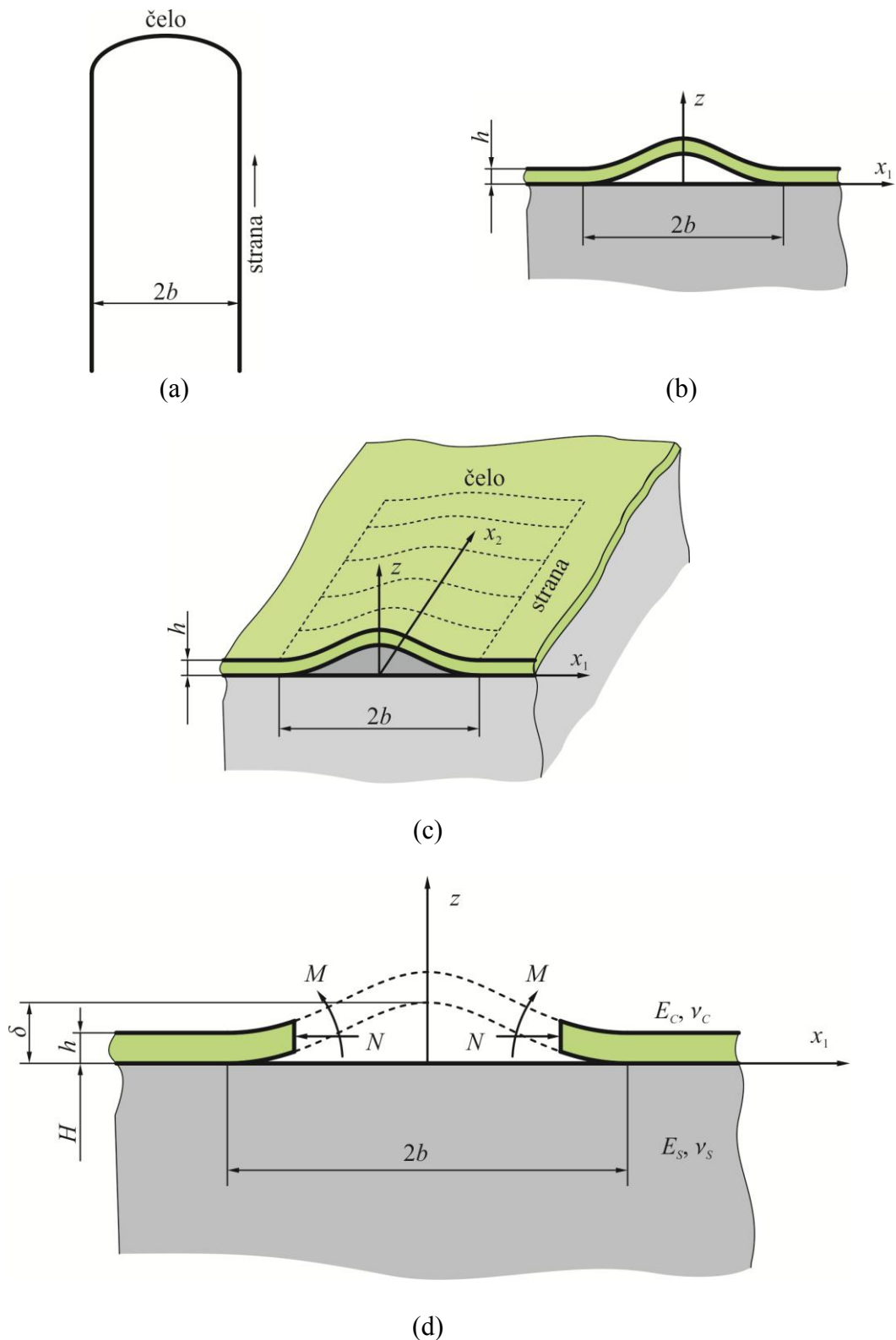
Превлака је изложена хомогеном двоосном раванском напону $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\sigma$. Резултујућа сила и момент, који делују на ивице превлаке по јединици дужине, N и M , респективно, су смера као што је приказано на слици 4.14(d). Примењујући концепт линерано еластичне механике лома на интерфејсу између два слоја приказан у [30] и [35], за случај бесконачне дебљине основе, фактор интензитета напона, брзина ослобађања енергије и фазни угао оптерећења могу да се напишу у облику:

$$K = K_1 + iK_2 = h^{-i\epsilon} \left(\frac{N}{\sqrt{12h}} - i \frac{M}{\sqrt{h^3}} \right) e^{i\omega} \sqrt{\frac{6(1-\alpha)}{(1-\beta^2)}}, \quad (4.6)$$

$$G = \frac{(1-\beta^2)}{2} \left(\frac{1}{E_C} + \frac{1}{E_s} \right) (K_1^2 + K_2^2) = \frac{6}{E_C h^3} \left(M^2 + \frac{F^2 h^2}{12} \right), \quad (4.7)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{K_2}{K_1} = \frac{\operatorname{Im}(Kh^{i\epsilon})}{\operatorname{Re}(Kh^{i\epsilon})} = \frac{\sqrt{12}M \cos \omega + hF \sin \omega}{-\sqrt{12}M \sin \omega + hF \cos \omega}, \quad (4.8)$$

респективно, где су: α и β Дундурсови параметри који се одређују на основу једначине (2.26), ε - биеластична константа, дефинисана једначином (2.8), $\bar{E}_C = E_C / (1 - \nu_C^2)$ и $\bar{E}_S = E_S / (1 - \nu_S^2)$.



Слика 4.14. Равнострани дугачки мехур: (а) поглед одозго, (б) поглед спреда, (с) 3D приказ и (д) геометрија и силе у пресеку дугачког равностраног мехура.

Функција ω је реална угловна функција Дундурсових параметара α и β , релативне дебљине $\eta = h/H$, који су дефинисали Суо и Хачинсон [80]. Одређивање функције ω захтева да проблем прслине буде решаван за један случај оптерећења за задате α , β и η . То су урадили Суо и Хачинсон [80], користећи метод интегралних једначина и резултате приказали табеларно. Ови резултати су апроксимирани следећим аналитичким изразом [30]:

$$\omega = \frac{1+\eta}{(1.1+\eta)} \sqrt{\frac{1+\alpha-\beta}{1-\alpha^2+\beta^2}} \frac{180}{\pi}, [^\circ] \quad (4.9)$$

Када нема разлике у еластичним карактеристикама материјала угловна функција има вредност $\omega = 52.1^\circ$.

С обзиром да је утицај коефицијента β на решавање проблема приказаног на слици 4.14 много мањи од утицаја коефицијента α , то је у даљем разматрању усвојено да је $\beta = 0$.

Проблем приказан на слици 4.13(d) може да се посматра у смислу Ојлерове теорије извијања штапова [81] и опише фон Кармановом нелинеарном теоријом плоча (THEODORE VON KÁRMÁN), према којој су основне једначине, за померање дуж z - осе и члан напона у правцу x_1 - осе:

$$\frac{\bar{E}_c h^3}{12} \frac{d^4 w}{dx_1^4} + (\sigma h + N) \frac{d^2 w}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{dN}{dx_1} = 0, \quad (4.10)$$

респективно, где је w померање дуж z - осе. Решења једначине (4.10) за граничне услове $w = 0$ и $dw/dx_1 = 0$ за $x_1 = \pm b$, су:

$$w = \frac{h}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{b} \right) \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} - 1 \right)}, \quad (4.11)$$

$$M = \sigma_c \frac{h^2}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} - 1 \right)} \cos \frac{\pi x}{b}, \quad (4.12)$$

$$N = -h \sigma_c, \quad (4.13)$$

где је: $\sigma_c = \frac{\pi^2}{12} \bar{E}_c \left(\frac{h}{b} \right)^2$ критични напон почетка извијања плоче причвршћене по контури.

Заостали притисни напон у превлаци σ мора да буде већи од σ_c да би се појавио мехур и наступило раслојавање превлаке бубрењем за дужину интерфејсне прслине $2b$. Однос σ/σ_c представља бездимензионални параметар оптерећења. С

обзиром да се са повећањем величине b смањује σ_c , то значи да ће бездимензионални параметар оптерећења σ/σ_c да расте са повећањем величине b .

Заменом једначина (4.12) и (4.13) у једначину (4.7) за брзину ослобађања енергије дуж страна мехура добија се:

$$G = \frac{\sigma^2 h}{2\bar{E}_c} \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma}\right) \left(1 + 3 \frac{\sigma_c}{\sigma}\right). \quad (4.14)$$

Заменом једначина (4.12) и (4.13) у једначину (4.8) добија се:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2 \cos \omega + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_c} - 1\right)} \sin \omega}{-2 \sin \omega + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sigma_c} - 1\right)} \cos \omega}. \quad (4.15)$$

Ако се еластична енергија, која постоји у недеформисаној превлаци изложеној притисном оптерећењу, обележи са G_0 , а одређује се на основу једначине (4.3), једначина (4.14) може да се напише као:

$$G = G_0 \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma}\right) \left(1 + 3 \frac{\sigma_c}{\sigma}\right). \quad (4.16)$$

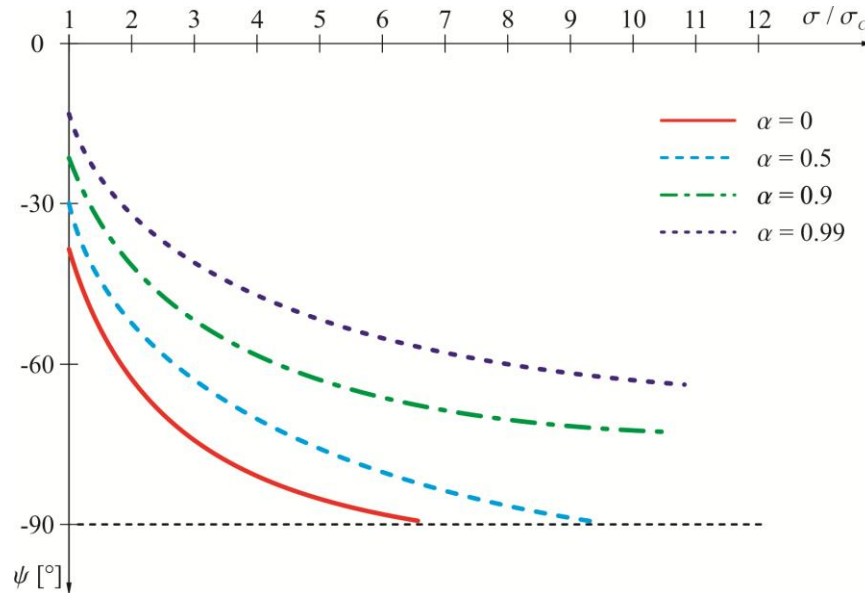
С обзиром да при раслојавању превлаке у виду равностраног дугачког мехура ширина мехура остаје константна, раслојавање се врши преко интерфејсне прслине која напредује дуж мање-више кружног чела мехура. Просечна брзина ослобађања енергије у челу мехура дефинисана је изразом за брзину ослобађања енергије за кружни мехур радијуса b [14]:

$$G_{ss} = G_0 \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2 \quad (4.17)$$

На слици 4.15 приказана је промена фазног угла оптерећења ψ , у врху интерфејсне прслине у функцији од σ/σ_c , за различите вредности параметра α и за $\beta = 0$ на основу једначине (4.15) [79].

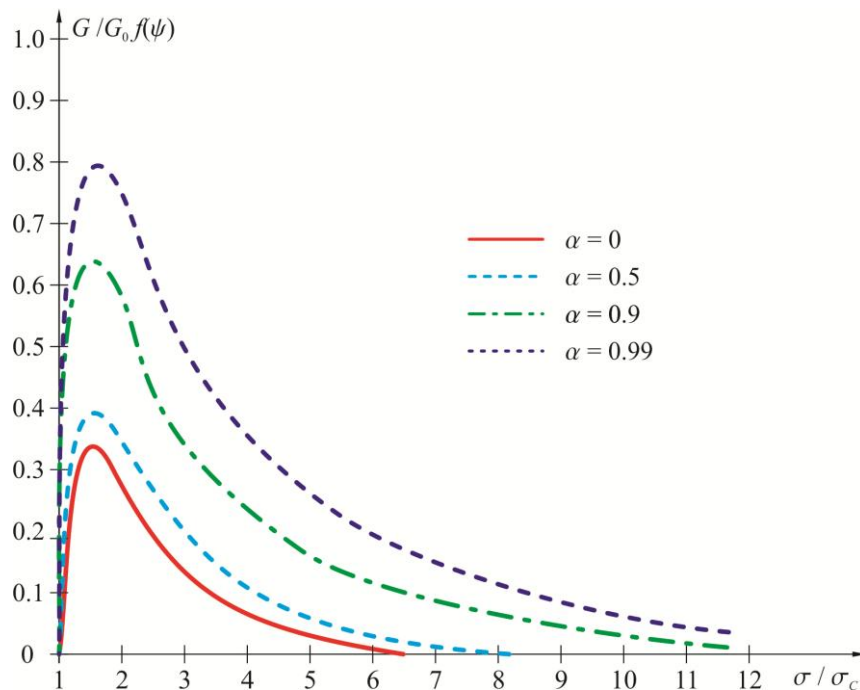
Утицај различитих еластичних карактеристика материјала превлаке и основе садржан је у параметру ω . Када нема разлике у еластичним карактеристикама превлаке и основе, то јест када је Дундурсов параметар $\alpha = 0$, крива зависности ψ од σ/σ_c почиње од вредности $\psi = -37.9^\circ$. Са слике 4.15 се види да када расте σ/σ_c , повећава се и удео Моде II у односу на Мод I, за дато α . Такође се види да тачка у којој постоји само Мод II ($\psi = -90^\circ$) зависи од разлика у еластичним карактеристикама превлаке и основе. За системе са много мекшом основом на пример за $\alpha = 0.9$ ($\bar{E}_c/\bar{E}_s = 10$) или $\alpha = 0.99$ ($\bar{E}_c/\bar{E}_s = 100$), удео Моде I према

Моду II је већи за исте вредности односа σ/σ_c . Овај утицај еластичних карактеристика основе иде на руку процесу раслојавања превлаке, јер што је основа мекша у мешовитом моду оптерећења преовладаваће утицај Моде I и самим тим лакше ће доћи до раслојавања превлаке.



Слика 4.15 Зависност фазног угла оптерећења ψ , од σ/σ_c .

На слици 4.16 приказана је нормализована брзина ослобађања енергије потребна за ширење интерфејсне прслине дуж страна мехура у функцији односа σ/σ_c , за различите вредности параметра α , за $\beta = 0$ и $\lambda = 0.25$ на основу једначине (4.16), [79].

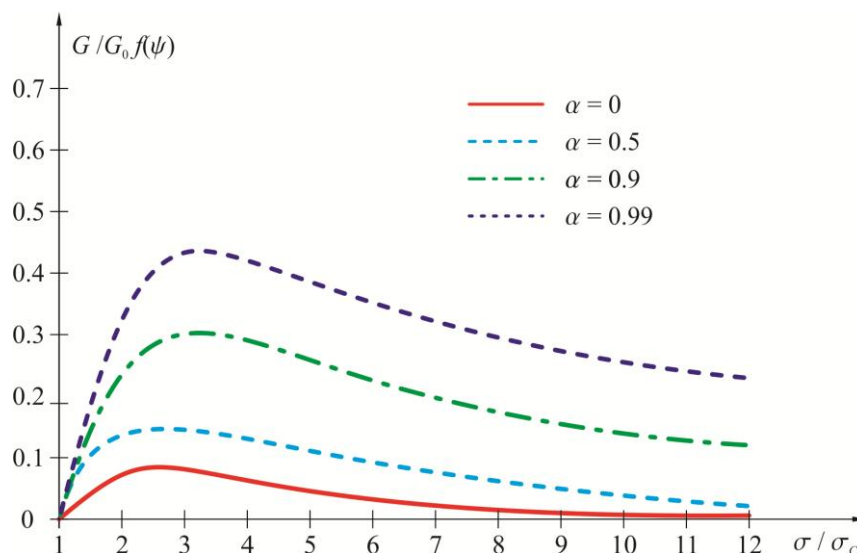


Слика 4.16 Утицај разлика у еластичним карактеристика превлаке и основе

на брзину ослобађања енергије дуж страна мехура.

Са слике 4.16 се види да утицај разлике у еластичним карактеристикама превлаке и основе није велики, чак и за вредности $\alpha = 0.5$ ($\bar{E}_c/\bar{E}_s = 3$). Овај утицај постаје значајнији тек за $\alpha > 0.5$. Такође се види да теме криве брзине ослобађања енергије има знатно веће вредности за $\alpha = 0.9$ и $\alpha = 0.99$. Овај пораст брзине ослобађања енергије код система са много мекшим основама потиче од ослобађања еластичне енергије у зонама где је превлака спојена са основом и енергије одвојеног дела превлаке. Што је основа мекша, биће већа ширина у којој се осећа утицај раслојавања, па ће самим тим бити већа и брзина ослобађања енергија. За врло меке основе, ширина на којој се ослобађа додатна еластична енергија може да буде већа и од ширине мехура. Међутим, ако се повећава ширина мехура, овај утицај се смањује, и за довољно велико b , брзина ослобађања енергије G приближава се вредности G_0 .

На слици 4.17 приказана је нормализована просечна брзина ослобађања енергије потребна за ширење мехура дуж чела у функцији односа σ/σ_c , за различите вредности параметра α , за $\beta = 0$ и $\lambda = 0.25$ на основу једначине (4.17), [79].



Слика 4.17 Утицај разлика у еластичним карактеристика превлаке и основе на просечну брзину ослобађања енергије дуж чела мехура.

Са слике 4.17 се види да утицај разлике у еластичним карактеристикама превлаке и основе није велики све док превлака није довољно крута у односу на основу, то јест све док је $\alpha < 0.5$. Просечна брзина ослобађања енергије дуж чела мехура мања је од брзина ослобађања енергије дуж страна мехура. Овај закључак може да се изведе када се упореде слике 4.16 и 4.17. Утицај у разлици еластичних карактеристика превлаке и основе постаје очигледан за врло меке основе, односно за $\alpha \geq 0.9$. Вредност просечне брзине ослобађања енергије дуж чела мехура расте како основа постаје мекша, то јест како расте разлика у еластичним карактеристикама превлаке и основе.

Поређењем слика 4.16 и 4.17, за вредности $\alpha = 0.9$ и $\alpha = 0.99$, може да се примети да је вредност просечне брзине ослобађања енергије дуж чела мехура већа

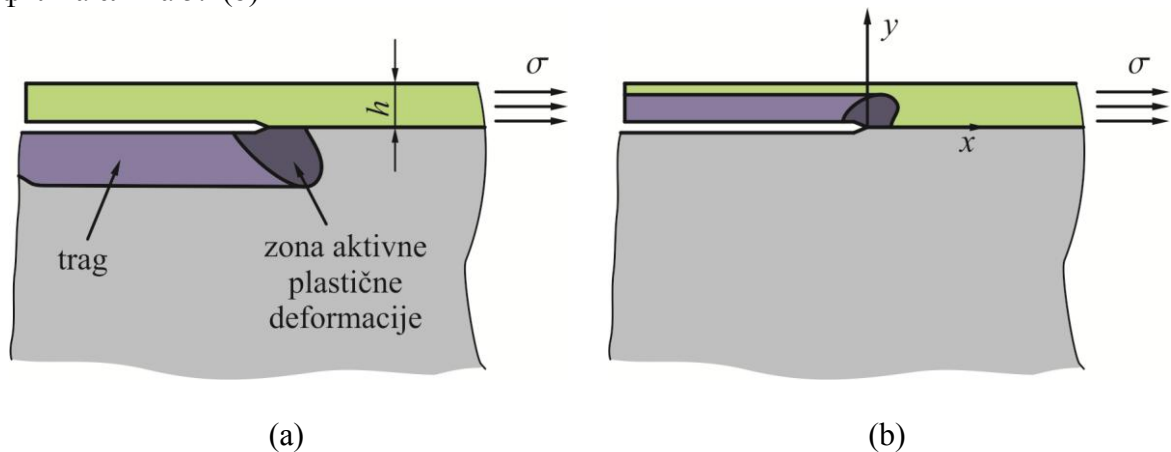
од вредности брзине ослобађања енергије дуж страна мехура. Ово објашњава зашто се код раслојавања превлака у виду дугачког равностраног мехура раслојавање врши дуж чела, а не дуж страна мехура.

На основу дијаграма приказаних на сликама 4.15 до 4.17 може да се изведе закључак да еластичне карактеристике основе имају значајан утицај на раслојавање превлаке бубрењем у облику дугачког равностраног мехура, када је однос Јангових модула еластичности превлаке и основе већи од 3. Овај утицај је нарочито изражен код металних и керамичких превлака на основама од полимера код којих је однос модула еластичности већи од 100 или код керамичких превлака на металној основи (на пример Al_2O_3 на Al) код којих је однос модула 10.

5. ДЕЛАМИНАЦИЈА ТАНКОГ ФИЛМА КОД ЕЛАСТИЧНО-ПЛАСТИЧНИХ МАТЕРИЈАЛА

У овом делу рада разматра се деламинација танког филма који је нанет на дебелу основу узимајући у обзир еластично-пластичне карактеристике филма или подлоге. Да би се описали услови који владају при деламинацији танког филма у условима појаве зоне течеља неопходно је коришћење нелинеарне механике лома. Овај проблем први су обрађивали Веи (Weil) и Хачинсон [83].

Танак филм дебљине h нанет је на дебелу основу и оптерећен равномерним напоном σ , приказан је на слици 5.1. Проблем се дефинише на два начина и то: течење се јавља у материјалу основе, слика 5.1(a), и течење се јавља у материјалу филма слика 5.1(b)



Слика 5.1 Стационарно стање деламинације танког филма са појавом течења

Брзина ослобађање енергије лома у случају када не постоји пластична деформација може да се одреди из:

$$G = \frac{(1-\nu_f^2)\sigma^2 h}{2E_f}, \quad (5.1)$$

где су E_f - Јангов модул еластичности и ν_f - Поасонов коефицијент филма. Заостали напон у правцу управном на слику је $\sigma_{33} = (1 - \nu)\sigma$.

За савршено крт систем критична брзина ослобађања енергије једнака је жилавости лома интерфејса $G = \Gamma_0$. У случају приказаном на слици 5.1(a) када је филм еластичан, а основа еласто-пластична, критична брзина ослобађања енергије се може дефинисати као:

$$G = \Gamma_0 + \Gamma_p \quad (5.2)$$

где је Γ_p - жилавост лома услед појаве пластичних деформација. На основу [83] Γ_p се може одредити као:

$$\Gamma_p = \int_{-H_p}^0 \left[\int_0^{\varepsilon_p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right] dx_2. \quad (5.3)$$

Једначина (5.2) може да се протумачи у смислу да је брзина ослобађања енергије лома интерфејса, када се филм налази у стању стационарног ширења прсине, једнака збиру жилавости лома интерфејса и жилавости лима услед постојања пластичне деформације. Ова једначина занемарује постојање трења на контакту површина прсине. Овај контакт се јавља ако је напон у филму $\sigma_r < 0$.

У случају еластичне основе и еласто-пластичног филма једначина (5.2) и даље важи само је сада Γ_p везана за филм, а не за основу.

Стационарно стање једначине (5.2) за критичну комбинацију h и σ остаје исто без обзира на величину пластичне зоне H_p при ширењу деламинационе прсине. Само у случају када је H_p довољно мало у поређењу са дебљином филма, Γ_p је независно од h . Другим речима, концепт независности жилавости интерфејса $\Gamma_i = \Gamma_0 + \Gamma_p$ који се примењује на деламинацију танких филмова захтева да H_p буде мало у поређењу са h , било да се течење јавља у основи или у филму. Ово је у ствари, услов за постојање течења у малом обиму код деламинације филма. Γ_p зависи од релативног односа Мода II и Мода I и независан је од дебљине филма. Само се код течења у малом обиму може говорити о стационарном стању жилавости интерфејса Γ_i као јединственој вредности за интерфејс, а независној од дебљине филма h и напона у интерфејсу. Код изузетно танких филмова удео пластичне жилавости у G постаје занемарљив, чак и када је H_p упоредиво са h , па се може рећи да је:

$$\Gamma_i \approx \Gamma_0. \quad (5.4)$$

Уколико се при образовању превлака танким филмовима користе материјали код којих је могућа појава пластичне зоне течења, потребно је обратити пажњу на механику деламинације у овим условима.

Оба материјала која чине интерфејс су изотропни са модулима еластичности E и Поасоновим коефицијентима ν . Материјал код кога се јавља течење има напон течења σ_Y и експонент ојачања N .

Да би се проценило да ли се ради о течењу у малом обиму или о течењу у великом обиму величина зоне пластичности која се пореди са дебелином филма се одређује као:

$$H_p = \frac{1}{3\pi(1-\nu^2)} \frac{E\Gamma_i}{\sigma_Y^2}. \quad (5.5)$$

Модул еластичности, Поасонов коефицијент и граница течења везани су за материјал код кога се јавља пластична деформација. Вредности за H_p које су дате у табели 5.1, су дате репрезентативне врсте интерфејса код којих се може појавити течење. Види се да исти интерфејс може имати и малу жилавост при којој се може сматрати да нема пластичне деформације ($\Gamma_i = 1 \text{ Jm}^{-2}$), али и жилавости средње вредности ($\Gamma_i = 50 \text{ Jm}^{-2}$ или $\Gamma_i = 100 \text{ Jm}^{-2}$). Евидентно је да ће за већину филмова, чија је дебелина испод $100 \mu\text{m}$, бити сувише танка да би се на њих могла применити теорија течења у малом обиму.

Табела 5.1 Висина пластичне зоне за репрезентативне врсте интерфејса [83]

	E (GPa)	σ_Y (GPa)	Γ_i (Jm^{-2})	H_p (μm)
Интерфејс полимер/метал	5	20	1	1.2
или полимер/керамика	5	20	50	62
(течење код полимера)	5	100	1	0.05
	5	100	50	2.5
Интерфејс метал/керамика	200	200	1	0.5
(течење код метала)	200	200	100	50
	200	500	1	0.08
	200	500	100	8

Ако постоји течење у малом обиму, онда из једначине (5.2) произилази:

$$(\sigma_R \sqrt{h})_{crit} = \sqrt{\frac{2E\Gamma_i}{1-\nu^2}} \quad (5.6)$$

Овде је битно напоменути да се у случају течења у малом обиму, за величину зоне у којој је присутан Мод I, при пластичном лому може узети вредност која је одређена једначином (5.5).

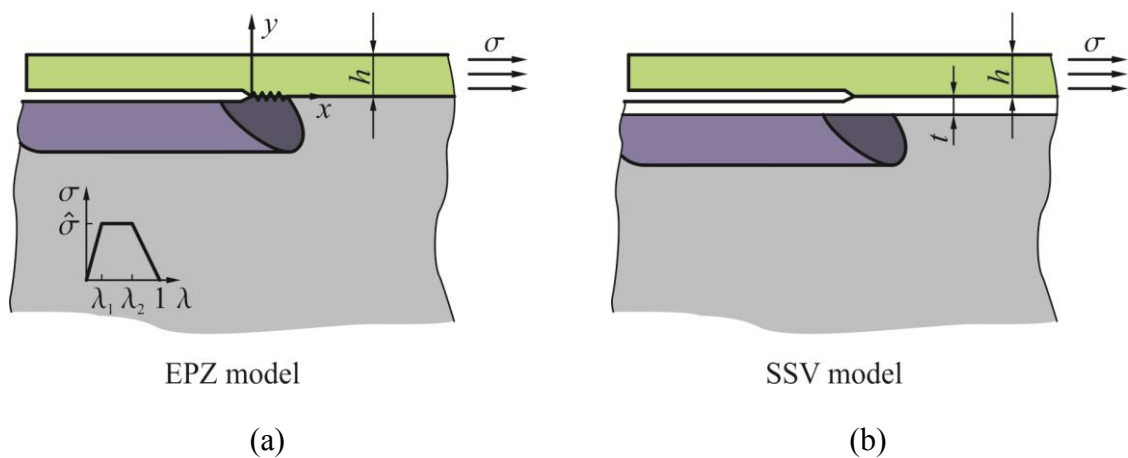
5.1. Модели нелинеарног лома интерфејса

Овде су описана два модела:

- модел који су дефинисали Нидлман (NEEDLEMAN) [84] и Твергард (TVERGAARD) и Хачинсон [85], касније назван EPZ модел (Embedded fracture Process Zone),
- модел траке у којој нема пластичне деформације, акоји су дефинисали Суо, Ших и Вариас (VARIAS) [86], који је познат под именом SSV модел (Suo-Shih-Varias).

Оба модела приказана су на слици 5.2 и то у случају када је филм еластичан а основа еласто-пластична. За оба модела се претпостављају равни деформације и за оба модела се користи J_2 теорија пластичности. На основу ове теорије, дилатација која се јавља у материјалу се одређује као:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E} & \text{за } \sigma < \sigma_Y \\ \left(\frac{\sigma_Y}{E} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^{\frac{1}{N}} & \text{за } \sigma > \sigma_Y \end{cases} \quad (5.7)$$



Слика 5.2 Два модела деламинације танког филма са појавом течења у основи

EPZ модел

У примени EPZ модела зона процеса лома на интерфејсу лежи између зоне пластичне деформације на једној и еластичног материјала на другој страни. Овај модел се може користити за предвиђање односа прслине са претходним и примењеним напонам. У стационарном стању деламинације, критична комбинација дебљине филма h и напона σ се може одредити у функцији карактеристика филма, основе и интерфејса.

Користећи ознаке из [85] са δ_n и δ_t се обележавају нормална и тангенцијална компонента померања дуж интерфејса у зони где је се јавља процес лома, слика 5.2. Са δ_n^c и δ_t^c се обележавају критичне вредности ових померања, и дефинишу јединствену бездимензиону величину раздвајања као:

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\delta_n}{\delta_n^c}\right)^2 + \left(\frac{\delta_t}{\delta_t^c}\right)^2} \quad (5.8)$$

која се креће у границама $0 \leq \lambda \leq 1$. Закон промене напона $\sigma(\lambda)$ дат је на слици 5.2. Потенцијал оваког напрезања се може одредити као:

$$\Phi(\delta_n, \delta_t) = \delta_n^c \int_0^\lambda \sigma(\lambda') d\lambda' \quad (5.9)$$

Нормална и тангенцијална компонента напрезања која делује на интерфејс у зони процеса лома, дате су као:

$$T_n = \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_n} = \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda} \frac{\delta_n}{\delta_n^c}, \quad T_t = \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_t} = \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda} \frac{\delta_t}{\delta_t^c} \frac{\delta_n^c}{\delta_t^c}. \quad (5.10)$$

Жилавост лома интерфејса у функцији $\sigma(\lambda)$ се одређује као:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} \hat{\sigma} \delta_n^c [1 - \lambda_1 + \lambda_2] \quad (5.11)$$

где је $\hat{\sigma}$ екстрем нормалног напона. Ближа дефиниција и вредности параметара који утичу на жилавост лома дати су у [85]. За потребе овог рада коришћене су вредности $\delta_n^c / \delta_t^c = 1$, $\lambda_1 = 0.15$ и $\lambda_2 = 0.5$, а које се користе у већини радова.

SSV модел

Под претпоставком да дислокације које се јављају на врху прслине имају занемарљиву улогу у ширењу прсли у проблему који се посматра Суо и остали [86] су предложили модел који је способан да опише настајање високих напона на врху прслине неопходних за кидање веза на атомском нивоу. Они су увели еластичну траку, која нема својства пластичности, која се налази између линије ширења прслине и пластичне зоне. За случај када је основа еласто-пластична, трака дебљине t , са еластичним карактеристикама основе, убачена је испод интерфејса, слика 5.2. Када нема разлике у еластичности између филма и основе, интерфејс лежи у еластичном хомогеном региону. То су разлози због којих важи конвенционални напонски сингуларитет $1/\sqrt{x_1}$ са факторима интензитета напона у врху прслине K_I^{tip} и K_{II}^{tip} и брзином ослобађања енергије:

$$G_{tip} = \frac{(1-\nu^2)(K_I^{tip2} + K_{II}^{tip2})}{E}. \quad (5.12)$$

У складу са моделом услов за ширење прслине је $G_{tip} = \Gamma_0$. Проблем решавања SSV модела се своди на проблем одређивања G_{tip} у функцији карактеристика материјала филма и основе, као и h и σ , а уз поштовање услова $G_{tip} = \Gamma_0$. Белц (BELTZ) и

остали [87] су предложили процедуру за одређивање дебљине траке t . Смањење дебљине траке у овом моделу има сличан ефекат повећања $\hat{\sigma}$ у EPZ моделу.

У оба модела посматра се ширење полубесконачне интерфејсне прслине унутар стационарног стања. Напон σ посматра се кроз редуковани модел ради лакше анализе, слика 5.3.



Слика 5.3 Редуковани модел оптерећења у EPZ и SSV моделу

Препоруке за решавање ове врсте проблема дате су у радовима [86] и [87].

5.2. Еластични филм на еластично-пластичној основи

EPZ модел

Твергард и Хачинсон су у раду [88] увели дужински параметар који зависи од карактеристика материјала и може се одредити као:

$$R_0 = \frac{1}{3\pi(1-\nu^2)} \frac{E\Gamma_0}{\sigma_Y^2}. \quad (5.13)$$

Ова референтна дужина представља процену величине пластичне зоне у основи претпостављајући да се интерфејсна прслина шири у Моду I за који је фактор интензитета напона:

$$K_I = \sqrt{\frac{E\Gamma_0}{1-\nu^2}}. \quad (5.14)$$

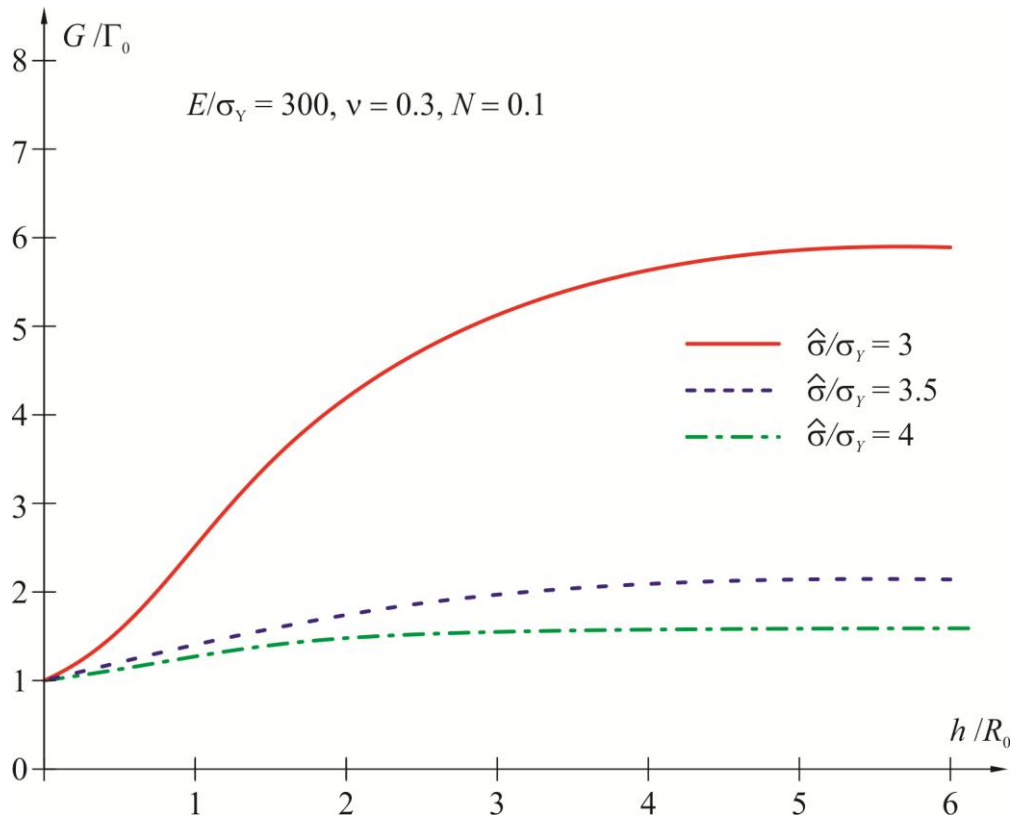
Димензионом анализом може се утврдити да се критична вредност напона σ_R може представити као функција бездимензионих параметара:

$$\left(\frac{\sigma_R \sqrt{h}}{\sqrt{E\Gamma_0}} \right) = f \left[\frac{h}{R_0}, \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_Y}, N, \frac{\sigma_Y}{E}, \nu \right]. \quad (5.15)$$

Аналогно једначини (5.15), брзина ослобађања енергије G , дефинисана једначином (5.1), је у функцији параметара:

$$\frac{G}{\Gamma_0} = F \left[\frac{h}{R_0}, \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_Y}, N, \frac{\sigma_Y}{E}, \nu \right] \quad (5.16)$$

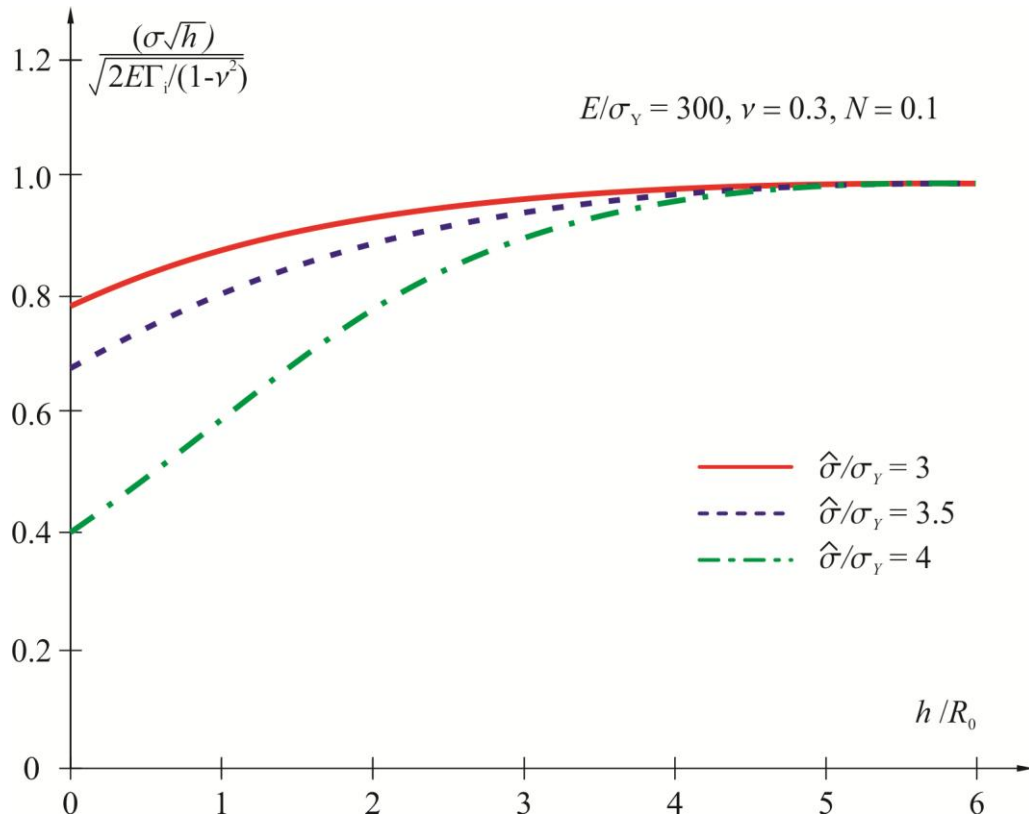
Анализирајући једначину (5.16), и користећи погодности које пружа програмски пакет *Mathematica*[®] у решавању нумеричких проблема долази се до закључка да промене вредности односа σ_Y / E и Поасоновог коефицијента занемарљиво утичу на однос G / Γ_0 . Промена осталих параметара јако утиче на резултате. На слици 5.4 приказана је зависност односа G / Γ_0 у функцији нормализоване дебљине филма а за три различите вредности односа $\hat{\sigma} / \sigma_Y$. Посматран је случај када је $\sigma > 0$, а остали параметри су $E / \sigma_Y = 300$, $N = 0.1$ и $\nu = 0.3$.



Слика 5.4 Критична вредност G у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (EPZ модел)

Са слике 5.4 се уочава да све три криве достижу своје асимптотске вредности асимптотске са порастом односа h / R_0 , односно однос G / Γ_0 расте и достиже вредност односа при условима течења у малом обиму $G / \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_i / \Gamma_0$. Када је филм изузетно танак, однос $G / \Gamma_0 \rightarrow 1$, односно не постоји утицај пластичне зоне. Течење у великом обиму је доминантно до преласка у течење у малом обиму и јавља се при малим односима h / R_0 и то у граноцама $0.5 < h / R_0 < 5$.

Зона утицаја течења у великом обиму види се на и слици 5.5. За ову анализу коришћени су исти параметри као и за дијаграме на слици 5.4. и поново нацртани за критични однос који се може извести из једначине (5.6), а који у ствари представља $\sqrt{\Gamma_0 / \Gamma_i}$.



Слика 5.5 Критична вредност $\sigma\sqrt{h}$ у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (EPZ модел)

На овом примеру се још боље види утицај односа h/R_0 на приближавање кривих асимптотској вредности. Течење у великом обиму смањује отпорност на деламинацију филма са основе.

SSV модел

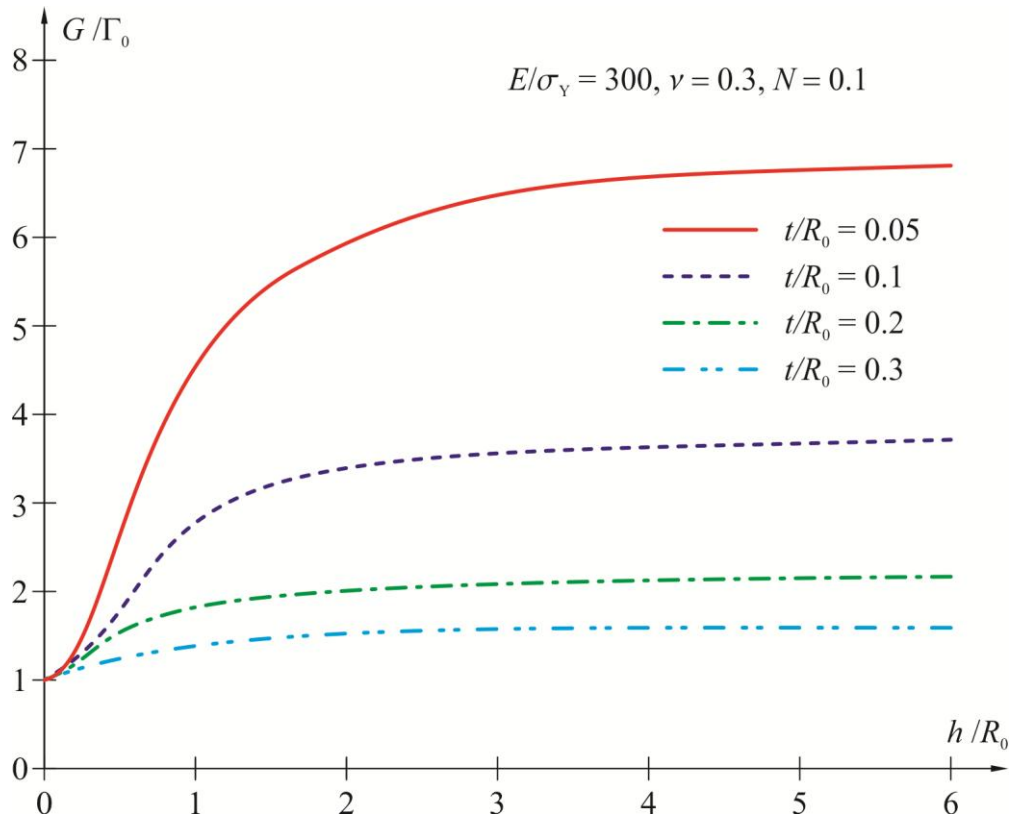
За разлику од EPZ модела, код SSV модела постоје две дужине које су зависне од карактеристика материјала и то R_0 и t . Димензионом анализом долази до следеће зависности:

$$\frac{G}{\Gamma_0} = f \left[\frac{h}{R_0}, \frac{t}{R_0}, N, \frac{\sigma_Y}{E}, \nu \right]. \quad (5.17)$$

Мера комбинације Мод-ова дата је преко фазног угла:

$$\psi_{ip} = \arctan \frac{K_I^{ip}}{K_{II}^{ip}}. \quad (5.18)$$

Примењујући исту процедуру и исте параметре као у случају EPZ модела, долази се до зависности G/Γ_0 . На слици 5.6 приказана је зависност односа G/Γ_0 у функцији нормализоване дебљине филма, за четири различите вредности односа t/R_0 .

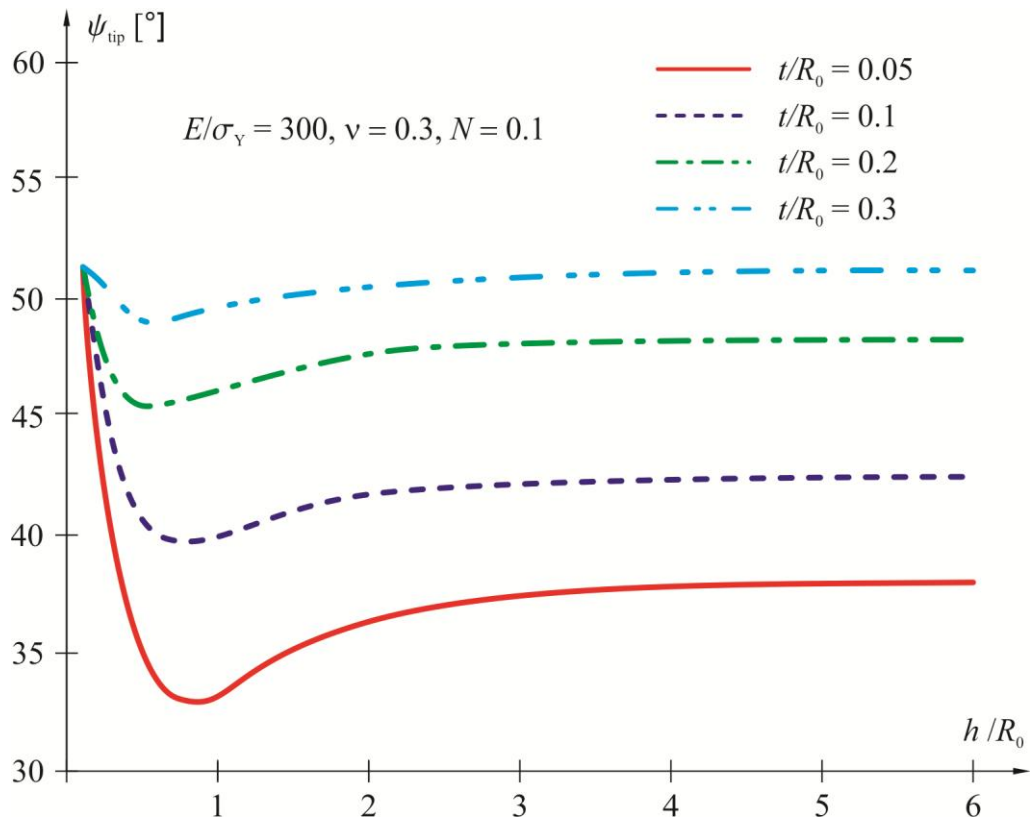


Слика 5.6 Критична вредност G у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (SSV модел)

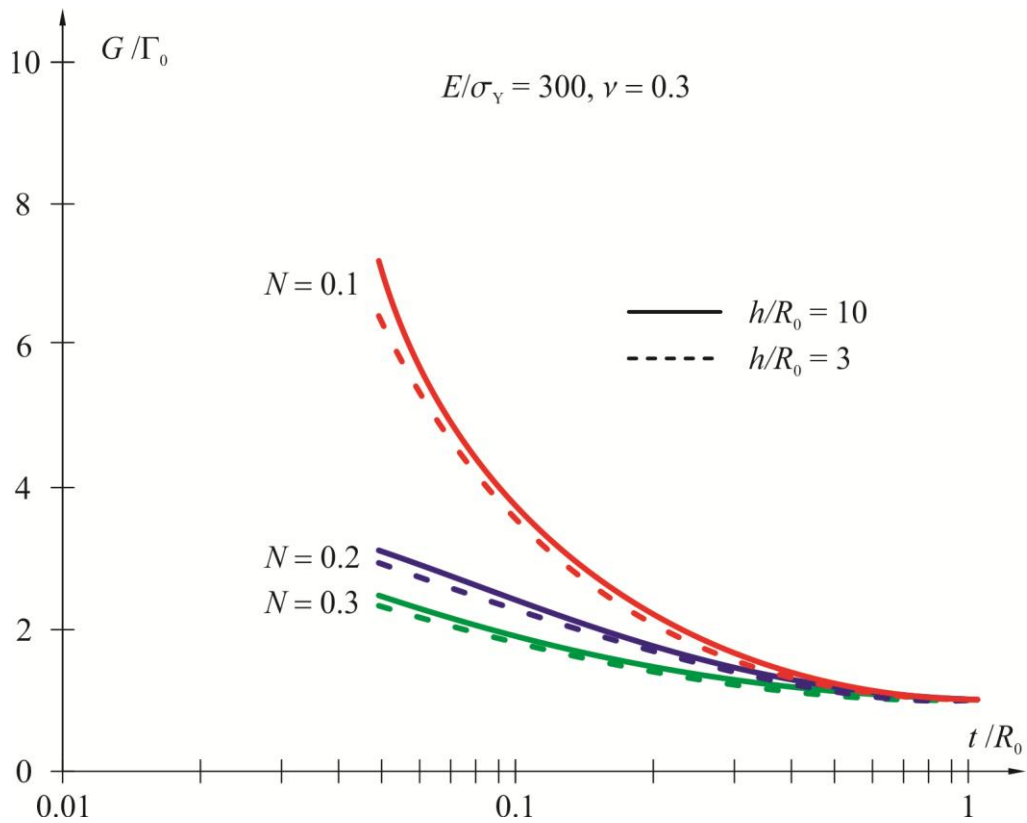
Када се упореде дијаграми са слике 5.4 и слике 5.6, јасно се уочава исти тренд и може се закључити да оно што код EPZ модела представља однос $\hat{\sigma}/\sigma_y$ то је код SSV модела однос t/R_0 . Разлика између ова два модела је у томе што се криве код SSV модела нешто раније приближавају асимптотској вредности.

Зависност промене фазног угла од дебљине филма је приказана на слици 5.7. Када се ради о чисто еластичном лому на интерфејсу, код кога не постоји разлика у карактеристикама материјала фазни угао је $\psi = 52.1^\circ$ [14]. За случајеве када је h/R_0 врло мало вредност фазног угла је приближна вредности 52.1° , што опет показује да у случајевима изузетно танког филма не постоји утицај платичне зоне на деламинацију.

На слици 5.8 дат је приказ промене односа G/Γ_0 у зависности од логаритамске промене односа t/R_0 . Дати су дијаграми за три различите вредности ојачања и за два различита односа h/R_0 . Са слике се види да је ефекат ојачања значајан и да много више доприноси чврстини интерфејса него дебљина филма.

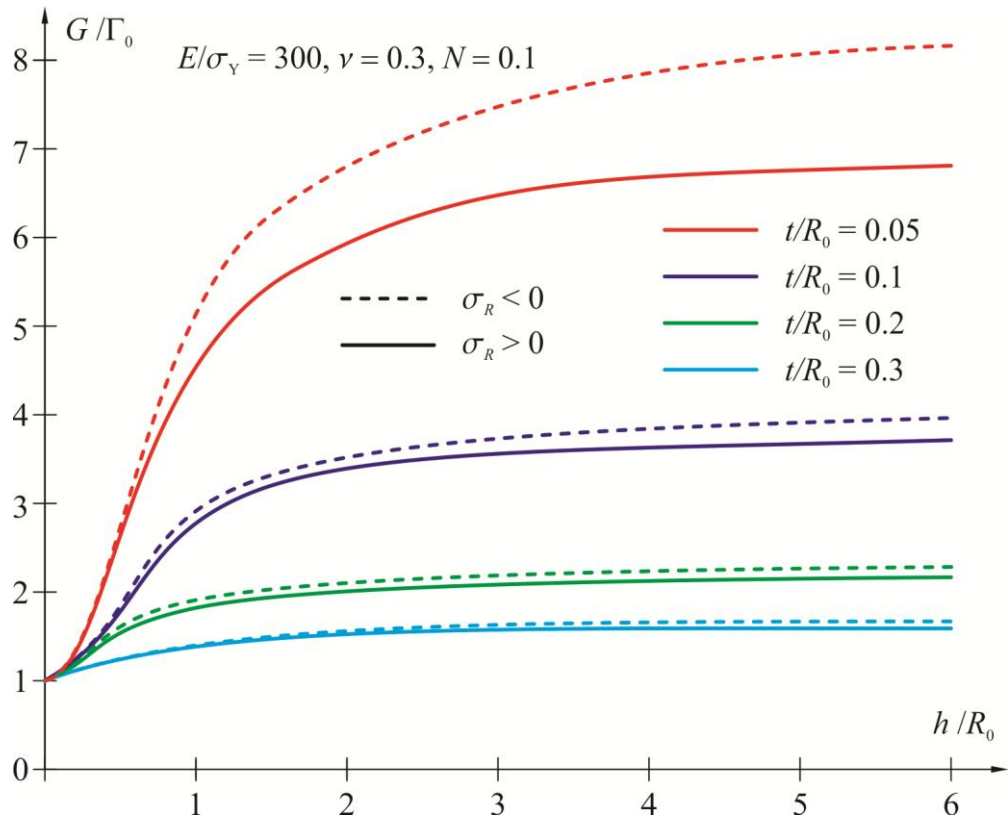


Слика 5.7 Фазни угао ψ у врху прслине у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (SSV модел)



Слика 5.8 Критична вредност G у функцији дебљине еластичне траке када се течење јавља у основи (SSV модел)

На слици 5.9 приказан је упоредни приказ критичне вредности брзине ослобађања енергије када је филм изложен напонима који изазивају притисак и затезање. Као што се и очекује, резултати се разликују зато што је деламинација филма код кога постоји притисак много ближа Моду II.



Слика 5.9 Критична вредност G у функцији знака напона када се течење јавља у основи (SSV модел)

5.3. Еластично-пластични филм на еластичној основи

Разматра се метални или полимерни филм нанет на еластичну основу. Пажња је ограничена на филмове оптерећене екви-биаксијалним нормалним напоном σ који изазива течење. Ово се односи на филмове који су нанети на загрејану подлогу која је касније охлађена или ако се основа после наношења филма деформише. Због тога се као напон у филму може узети напон течења за који важи једначина (5.7). Једначина (5.1) и даље важи. Као резултат да је $\sigma = \sigma_Y$, напон у филму више није независна променљива, и питање течења у великом или малом обиму постаје беспредметно. Број променљивих у функцији која описује критичну брзину ослобађања енергије се смањује за један. Ако се зна да је: $\sigma = \sigma_Y$ и $G/\Gamma_0 = \frac{1}{6\pi} \frac{h}{R_0}$ то величина h/R_0 није више независно променљива. Из тог разлога за EPZ модел важи:

$$\frac{G}{\Gamma_0} = F \left[\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_Y}, N, \frac{\sigma_Y}{E}, \nu \right], \quad (5.19)$$

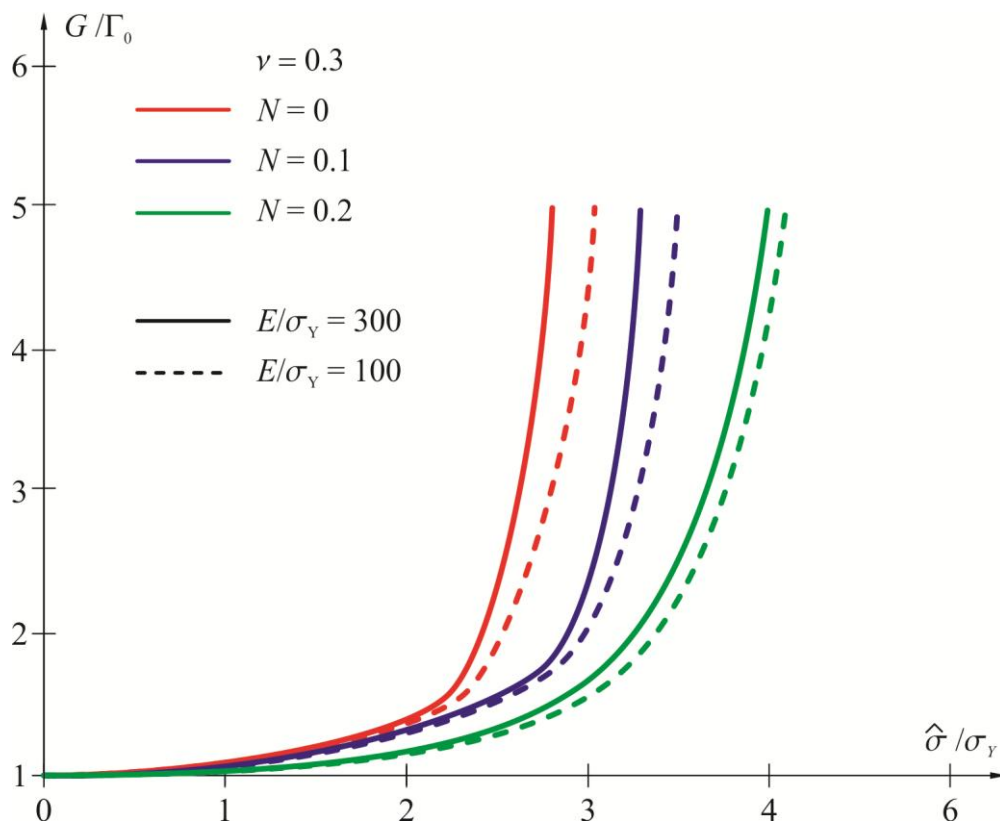
а за SSV је:

$$\frac{G}{\Gamma_0} = F \left[\frac{t}{R_0}, N, \frac{\sigma_Y}{E}, \nu \right], \quad (5.20)$$

Референтна дужина R_0 је иста као она која је дефинисана у једначини (5.13), али је сада σ_Y карактеристика филма.

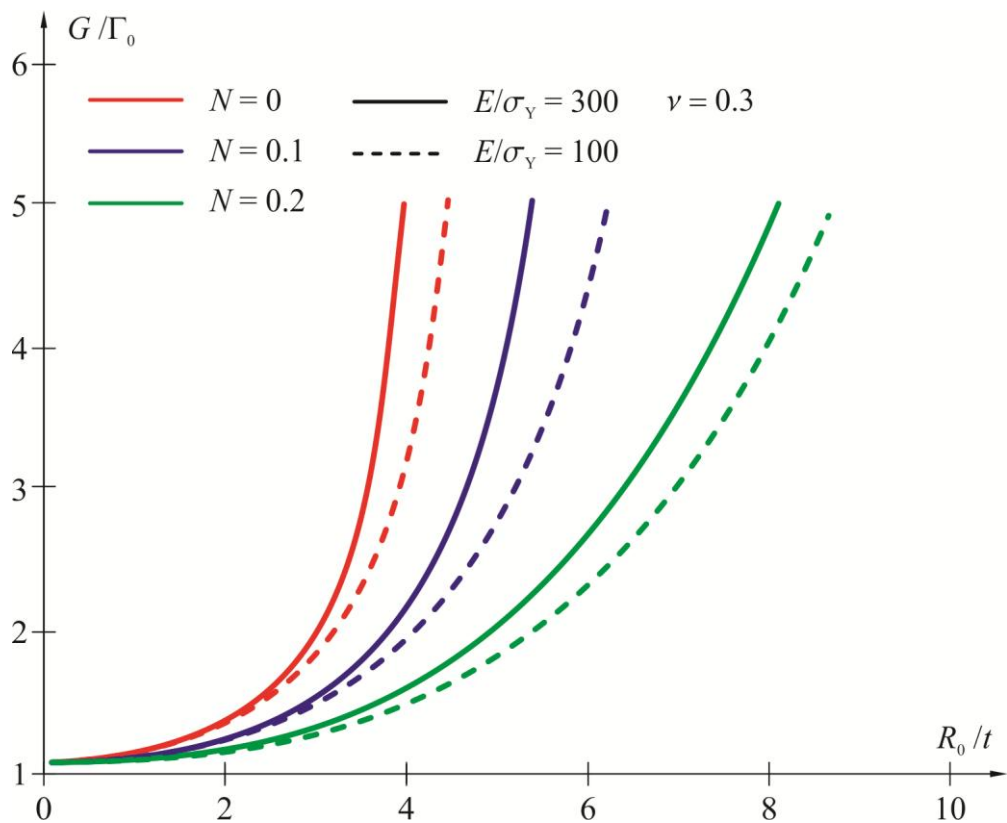
Суштина интерфејсне деламинације када се течење јавља у филму, је да се свуда јавља еластично растерећење, изузев у зони врха прслине у којој се дешава активна пластична деформација. Постизање критичних услова, при којима се јавља деламинација, $G_{del} = G$, може се остварити достизањем критичних напона, великом променом температуре или ако филм прелази вредност критичне дебљине дефинисан једначином (4.2).

На слици 5.11 је, користећи се EPZ моделом и једначином (5.19), приказана зависност G/Γ_0 у функцији $\hat{\sigma}/\sigma_Y$ за три различита нивоа ојачања и два различита односа модула еластичности и напона клизања E/σ_Y . Са ње се види да критична брзина ослобађања енергије врло брзо тежи бесконачности када максимални нормални напон пређе две величине напона течења.



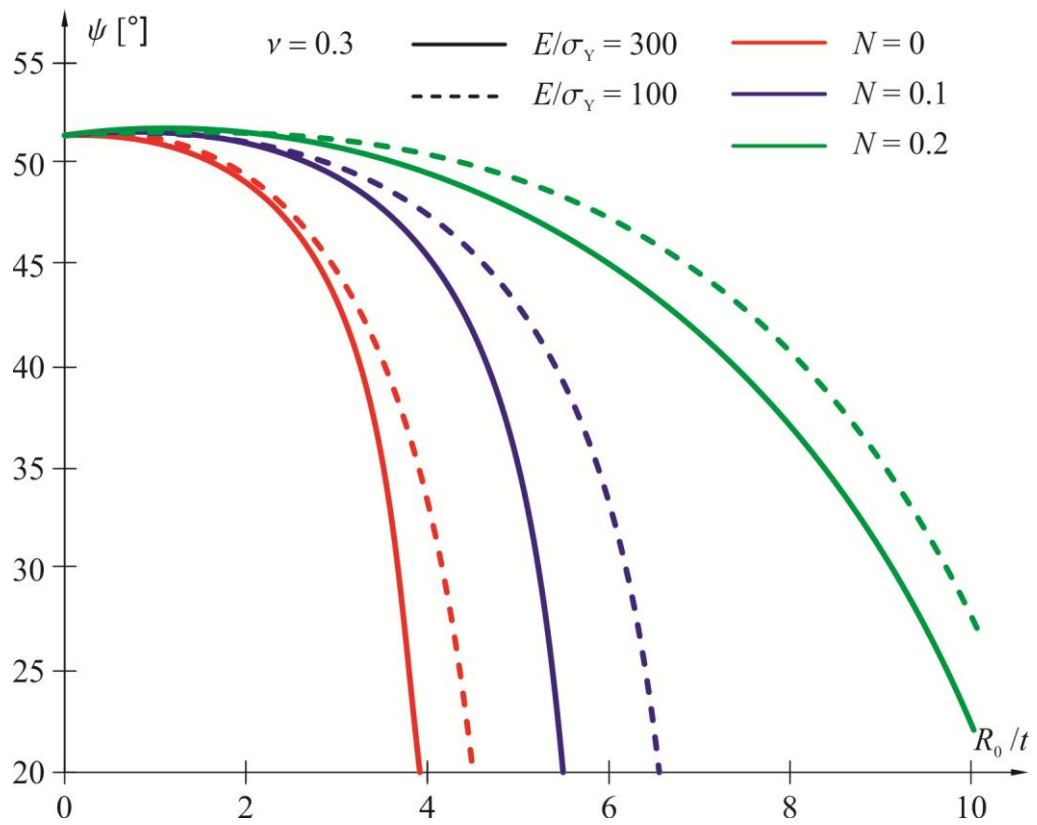
Слика 5.10 Критична вредност G у функцији $\hat{\sigma}/\sigma_Y$ када се течење јавља у филму (EPZ модел)

На слици 5.11 је, користећи се SSV моделом и једначином (5.2), приказана зависност G_{crit}/Γ_0 у функцији R_0/t за три различита нивоа ојачања и два различита односа модула еластичности и напона клизања E/σ_Y . Анализом слике 5.11 може се поново закључити да постоји велика сличност између односа $\hat{\sigma}/\sigma_Y$ и R_0/t . Такође се поново види да критичне вредности G скачу нагло после одређене границе.



Слика 5.11 Критична вредност G у функцији R_0/t када се течење јавља у филму (SSV модел)

Као и код разматрања еластичног филма на еласто-пластичној подлози овде се користећи SSV модел, који може приказати промена фазног угла само овог пута у функцији односа R_0/t , слика 5.12. Ова промена фазног угла сагласна је са приказом промене критичне вредности брзине ослобађања енергије приказане на слици 5.11.



Слика 5.12 Фазни угао ψ у врху прслине у функцији дебљине филма када се течење јавља у основи (SSV модел)

6. ЗАКЉУЧАК

Да би се разумео процес лома у новим, модерним материјалима, као што су композити и керамички материјали, неопходно је дати право тумачење настанка и рада прслине на интерфејсу два материјала. Овај процес раскидања веза се може одвијати квази-статички или динамички, зависно од врсте оптерећења којима је изложена композитна структура. Прслина се најчешће појављује на интерфејсу између два различита материјала, јер је жилавост интерфејса мања од жилавости материјала који га образују. Одређивање жилавости интерфејсне прслине у биматеријалним комбинацијама је основно за анализу механизма лома у примењеним материјалима какви су влакнасти композити и композитна керамика. Међутим, у неким случајевима прслина се појављује у једном од материјала и то тако да може да буде паралелна интерфејсу (субинтерфејсна прслина) или да га напада под одређеним углом. Такође, у неким случајевима прслина која пропагира дуж интерфејса може да скрене са њега и да настави да се шири у једном од материјала.

У другом поглављу разматран је проблем прслине која скреће са интерфејса и наставља да се шири у једном од материјала. Овај проблем су први разматрали Хи и Хачинсон. Значајно побољшање њихових резултата је учинила Вељковић у раду из 2001. године када је табеларне резултате, које су дали Хе и Хачинсон апроксимирала одговарајућим функцијама и омогућила да се користе на целој области дефинисаности функције. Ове функције се користе за дефинисање односа брзина ослобођања енергије за прлину која је скренула са интерфејса и брзине ослобођања енергије за прлину која се шири дуж интерфејса. Анализом овог односа, како табеларних резултата тако и функција, долази се до следећих закључака: што је већа еластичност материјала у који прслина скреће већа је брзина ослобађања енергије за исте остале факторе и обрнуто, ако је материјал у који прслина скреће релативно веће кртости, брзина ослобађања енергије се смањује. Све ово је повезано са разликом у модулима еластичности материјала који образују интерфејс када се прслина приближава интерфејсу из једног од два материјала. Када су разлике у материјалу релативно велике брзина ослобађања енергије за прлину која скреће у материјал веће кртости може да буде мања од оне која се ослобађа настављањем ширења кроз интерфејс. Ово имплицира да у условима када је један материјал мање жилав од интерфејса и другог материјала који су приближно исте жилавости, прслина ће тежити да се заустави на интерфејсу. Ако је крући материјал бар и мало

мање жилав од интерфејса прлина може да напусти интерфејс, али не мора и да скрене. Услов за пропагацију прлине дуж интерфејса је да брзина ослобађања енергије прлине која се шири кроз интерфејс буде једнака или већа од критичне вредности брзине ослобађања енергије за интерфејс. За пропагацију у материјалу услов је да брзина ослобађања енергије прлине која се шири кроз интерфејс буде једнака или већа од критичне вредности брзине ослобађања енергије за материјал који образује интерфејс. Ако је критична вредност брзине ослобађања енергије за материјал који образује интерфејс довољно велика у поређењу са критичном вредношћу брзине ослобађања енергије за интерфејс, прлина никада неће да скрене у материјал. Ако критичне вредности брзине ослобађања енергије за материјал који образује интерфејс могу да се пореде са критичном вредношћу брзине ослобађања енергије за интерфејс за област оптерећења, $0 \leq \psi < \psi_{max}$, прлина остаје на интерфејсу, док ће за $\psi > \psi_{max}$ да скрене у материјал који образује интерфејс.

Такође је разматрано неколико проблема којима се анализира улога интерфејса између два различита материјала на понашање прлине која му се приближава. Дати су одговори на питања да ли ће прлина која се приближава интерфејсу да га прође или ће да скрене у њега и да настави да се шири дуж интерфејса. Оваква питања су од великог значаја за дизајнирање интерфејса зато што се увек тежи да прлина која се шири у основи, а приближава интерфејсу, скрене у интерфејс остављајући други материјал неоштећеним. На основу приказаних резултата могуће је дати одговор на питање да ли ће наилазећа прлина да скрене, то јест да дефлектује у интерфејс, или ће да га пробије, пенетрира, и настави раст у другом материјалу. Анализиране су четири групе проблема.

Прву групу чини симетрично оптерећена полубесконачна прлина која „напада“ интерфејс под правим углом. Први су овај проблем разматрали Кук и Ердоган, Ердоган и Бирицикоглу, а затим Гор и Венеција као и Лу и Ердоган. Један од најдетаљнијих приказа овог проблема дали су Хи и Хачинсон. У оквиру тога анализирана су три проблема и то: прлина која пенетрира интерфејс, прлина која дефлектује у интерфејс и прлина која са обе стране дефлектује у интерфејс. Када се ради о ширењу прлине кроз танки филм ово представља и највероватнију иницијалну врсту прлине.

Другу групу проблема, чини главна прлина која напада интерфејс под произвољним углом. Трећу групу проблема чини понашање праволинијске прлине која је оптерећена концентрисаном силом која делује на површинама прлине, а која се приближава интерфејсу под произвољним углом. Овде се даје тумачење тежње прлине да се криви ка или од интерфејса коме се приближава.

Четврта група анализираних проблема, даје одговор на питање победника у „такмичењу“ између пенетрације и дефлектовања у интерфејс за прлину која напада интерфејс под произвољним углом. Неуобичајена особина ових прлина је постојање једног доминантног Мода деформације у врху прлине и то Мода II. Постојање једног доминантног мода условљава да понашање прлине која напада интерфејс под произвољним углом зависи од релативне крутости материјала са обе стране интерфејса. Детаљном анализом показано је да за мале углове нападања прлине у „такмичењу“ између дефлектовања и пенетрације, „победу“ ће углавном односити дефлектовање прлине.

У овој дисертацији је приказано и решење за проблем прслине на интерфејсу између два еластично-пластична материјала унутар оквира дефинисаног нелинеарном механиком лома у хомогеним материјалима. Решења су изведена за материјале описане J_2 -деформационом теоријом. Показано је да је понашање у врху интерфејсне прслине сложеније од понашања прслине у хомогеној средини. Пропорционална удаљена оптерећења индукују непропорционално понашање у врху интерфејсне прслине, што није случај за хомогену средину, где пропорционално оптерећење индукује пропорционалност понашања. Разматрано је и решење комплетног граничног проблема прслине на интерфејсу два нелинеарна материјала за услове течења у малом обиму. Запажено је и то да је облик поља близу врха прслине одређен карактеристикама ојачања материјала са нижим степеном ојачања. Напонско поље близу врха прслине за спојене еласто-пластичне материјале у условима течења у малом обиму добро се слаже са мешовитим модом HRR поља за хомогене материјале. Нивои напона у материјалу са већим коефицијентом ојачања су ограничени нивоима напона у материјалу нижег коефицијента ојачања.

У оквиру дисертације дата је и анализа понашања танких филмова и превлака примењујући еластичну механику лома. Дата је анализа ивичног раслојавања превлаке и утицаја положаја ивице превлаке у односу на ивицу основе.

При анализи превлаке, чија се ивица не поклапа са ивицом материјала основе, се долази до закључка да на самој ивици брзина ослобађања енергије има вредност у оквиру неколико процената од брзине ослобађања енергије потребне за деламинацију на ивици превлаке и врло брзо достиже граничну вредност и то на растојању од само половине дебљине превлаке.

При анализи превлаке чија се ивица поклапа са ивицом материјала основе се долази до закључка да како дужина прслине расте, брзина ослобађања енергије се споро приближава брзини ослобађања енергије за раслојавање превлаке. Брзина ослобађања енергије почиње нуле на ивици превлаке и полако достиже граничну вредност и то на растојању које прелази 10 или више висина превлаке. Код врло кртих превлака ова вредност може прећи и 40. Ово значи да угловне ивице пружају суштинску унутрашњу заштиту против раслојавања превлака интерфејса. Унутрашње ивице немају ту карактеристику.

Танки површински слојеви и превлаке изложене су знатним заосталим притисним напонима. Ове превлаке су осетљиве на раслојавање бубрењем ако је жилавост интерфејса мала. Велики заостали притисни напони могу да изазову различите облике бубрења превлака као што су дугачак равнострани мехур, кружни или елипсасти мехур или такозвани мехур у облику телефонске жице. На основу приказане анализе може да се изведе закључак да еластичне карактеристике основе имају значајан утицај на раслојавање превлаке бубрењем у облику дугачког равностраног мехура у случају када је однос Јангових модула еластичности превлаке и основе већи од 3. Овај утицај је нарочито изражен код металних и керамичких превлака на основама од полимера, код којих је однос модула еластичности већи од 100 или код керамичких превлака на металној основи (на пример Al_2O_3 на Al основи) код којих је однос модула 10 и више.

У глави пет дата је анализа раслојавања танког филма са основе у условима када се у једном од материјала који чине интерфејс јављају нелинеарне, еласто-

пластичне деформације. Користећи се предностима програмског пакета *Mathematica*® уз аналитичко-нумеричку анализу одређене су границе у којима се јавља течење у малом и великом обиму. У случају веома танких филмова утицај течења материјала је занемарљив па се интерфејс понаша као да се налази у еластичном подручју. Као мера да ли ће се јавити течење у малом или великом обиму користи се величина зоне пластичности коју су дефинисали Твергард и Хачинсон.

Анализом је показано да у случају појаве еласто-пластичних деформација дебљина филма игра значајну улогу само у једном малом опсегу. Критична брзина ослобађања енергије расте од вредности која је једнака жилавости интерфејса па све до неке асимптотске вредности. Асимптотску вредност достиже врло брзо и то са повећањем дебљине филма од само 5 вредности величине зоне пластичности. Чим се та зона пређе, у области врха прслине се јављају само течења у малом обиму, за која се могу применити закључци из главе три овог рада.

Овим радом је само загребана област аналитичког разматрања раслојавања превлака и танких лимова. Могућност даљих истраживања је веома велика. Постоји могућност даљег ширења аналитичког модела и његова примена на све оно што је до сад рађено у еластичној области. Како се раслојавање танких филмова дешава услед појаве заосталих напона, а који могу настати као последица разлике у температури наносења танког филма или превлаке и радне температуре, постоји могућност проширивања овог рада и на ту област, а ово је тренутно изузетно актуелна област истраживања.

У току истраживања о томе шта је тренутно актуелно у области еласто-пластичне и пластичне анализе раслојавања танких филмова запазио сам и једну област у којој би могли да се наставе експерименти на најсавременији начин. Наиме, танки филмови се на основни материјал најчешће наносе да би представљали заштиту од механичких и топлотних оштећења основног материјала. Као такви подложни су механичким оштећењима и ударима. Тренутна истраживања у свету контролишу отпорност танких филмова на притисак и гребање. Анализа у лабораторијским условима се врши на наноиндентерима (NANOINDENTER) и микро скреч тестерима (MICRO SCRATCH TESTER). Наноиндентер је уређај који се користи за одређивање механичких карактеристика површинских слојева материјала и танких превлака, а микро скреч тестер је уређај који је првенствено намењен одређивању адхезивних карактеристика танких превлака, премаза, слојева итд. С обзиром да на Факултету инжењерских наука постоје ови уређаји постоји могућност да се у лабораторијским условима направи анализа која би потврдила аналитичке резултате приказане у овом раду и показала њихову практичну примену.

Овај рад бих завршио још једним цитатом који је на мене оставио јак утисак у почетној фази истраживања, а на самом крају се испоставио као тачан [90]:

“The precise approximative status of solutions to linearized problems involving interface-cracks remains an intriguing issue”
J.K. Knowles and Eli Sternberg

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Williams M. L., On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, *J. Appl. Mech.*, 1957., Vol. 79, pp. 104-109
- [2] Sih G. C. and J. R. Rice, The Bending of Plates of Dissimilar Materials With Cracks, *J. Appl. Mech.*, 1964., Vol.31, pp. 477-482
- [3] Rice J. R. and G. C. Sih, Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, *J. Appl. Mech.*, 1965., Vol. 32, pp. 418-423
- [4] Erdogan F., Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials With Cracks, *J. Appl. Mech.*, 1965., Vol. 32, pp. 403-410
- [5] England A. H., A Crack Between Dissimilar Media, *J. Appl. Mech.*, 1965., Vol. 32, pp. 400- 402
- [6] Malyshev B. M. and R. L. Salganik, The strength of adhesive joints using the theory of cracks, *International Journal of Fracture Mechanics*, 1965., Vol. 1, Issue 2, pp. 114-128
- [7] Rice J. R. and G. F. Rosengren, Plane Strain Deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 1968., Vol. 16, pp. 1-12
- [8] Dundurs J., Elastic Interaction of Dislocations with Inhomogeneities, *Mathematical Theory of Dislocations*, Ed. T. Mura, ASME, New York, 1969., pp. 77-114
- [9] Hutchinson J. W., M. E. Mear and J. R. Rice, Crack Paralleling an Interface Between Dissimilar Materials, *J. Appl. Mech.*, 1987., Vol. 54, pp. 828-832
- [10] Anderson P. M. and J. R. Rice, The Stress Field and Energy of a Three-Dimensional Dislocation Loop at a Crack Tip, *J. Mech. Phys. Solids*, 1987., Vol. 35, pp. 743-769
- [11] Rice J. R., Tensile crack tip fields in elastic-ideally plastic crystals, *Mechanics of Materials*, 1987., Vol. 6, pp. 317-335
- [12] Rice J. R., Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, *J. Appl. Mech.*, 1988., Vol. 55, pp. 98-103
- [13] Shih, C. F., Cracks on bimaterial interfaces: Elasticity and Plasticity aspects, *Material Science and Engineering A*, 1991., Vol. 143, pp. 77-90
- [14] Hutchinson J. W. and Z. Suo, Mixed mode cracking in layered materials, *Advances in Applied Mechanics*, 1992., Vol. 29, pp. 63-191
- [15] Cook T. S. and F. Erdogan, Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. Engng Sci.*, 1972., Vol. 10, pp. 677-697
- [16] Erdogan F. and V. Biricikoglu, Two bonded half planes with a crack going through the interface, *Int. J. Engng Sci*, 1973., Vol. 11, pp. 745-766.
- [17] Goree J. G. and W. A. Venezia, Bonded elastic half-planes with an interface crack and a perpendicular intersecting crack that extends into the adjacent material, *Int. J. Engng Sci*, 1977., Vol. 15, pp. 19-27

- [18] Lu M.-C. and F. Erdogan, Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface-I Analysis, *Engineering Fracture Mechanics*, 1983., Vol. 18, No. 3, pp. 491-506
- [19] Lu M.-C. and F. Erdogan, Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface-II Solution and results, *Engineering Fracture Mechanics*, 1983., Vol. 18, No. 3, pp. 507-528
- [20] Comninou M. and J. Dundurs, An example for frictional slip progressing into a contact zone of a crack, *Engineering Fracture Mechanics*, 1979., Vol. 12, pp. 191-197
- [21] He M.-Y. and J. W. Hutchinson, Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials, *Int. J. Solids Structures*, 1989., Vol. 25, No. 9, pp. 1053-1067
- [22] He M.-Y. and J. W. Hutchinson, Kinking of a crack out of an interface, *J. Appl. Mech.*, 1989., Vol. 56, pp. 270-278
- [23] Shih C. F. and R. J. Asaro, Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I—Small Scale Yielding, *J. Appl. Mech.*, 1988., Vol. 55, No. 2, pp 299-316
- [24] Shih C. F. and R. J. Asaro, Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part II - Structure of Small-Scale Yielding Fields, *J. Appl. Mech.*, 1989., Vol. 56, No. 4, pp. 763-779
- [25] Shih C. F. and R. J. Asaro, Elastic-plastic analysis of a collinear array of cracks on a bimaterial interface, *Materials Science and Engineering: A*, 1989., Vol. 107, pp. 145-157
- [26] Shih C. F., R. J. Asaro and N. P. O'Dowd, Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part III - large-scale yielding, *J. Appl. Mech.* 1991., Vol. 58, No. 2, pp. 450-463
- [27] Вељковић Ј., Анализа проблема раста прслине на интерфејсу два метална материјала, Магистарски рад, 1998, Машински факултет, Крагујевац
- [28] Вељковић Ј., Решавање проблема прслине на интерфејсу два материјала, Докторска дисертација, 2001, Машински факултет, Крагујевац
- [29] Nikolic R. R. and J. M. Veljkovic, Stress Distribution around the Tip of the Dynamically Propagating Interfacial Crack, ICNM-IV, Shanghai, P. R. China, 14-17th August 2002.
- [30] Veljkovic J. M. and R. R. Nikolic, Edge Effect on the Coating Delamination, *FATIGUE 2003*, 7-9th April 2003., Cambridge, UK, pp. 301-309
- [31] Nikolic R. R. and J. Veljkovic, Some aspects of dynamic interfacial crack growth, Invited paper, ECF 16 "Fracture of Nano and Engineering Materials", Edited by E. E. Gdoutos, Springer, 2006, pp. 807-808, ISBN 1-4020-4971-4
- [32] Nikolic R. R., J. M. Djokovic and M.V. Micunovic, The Competition Between the Crack Kinking Away From the Interface and Crack Propagation Along the Interface in Elastic Bicrystals, *International Journal of Fracture*, 2010, Vol. 164, No. 1, pp. 73-82

- [33] Nikolic R. R. and J.M. Djokovic, Interfacial Cracks in Bicrystals and Bimaterials, In "Crack Growth: Rates, Prediction and Prevention", Edited by D. Kubair, Nova Publishers, Inc., New York, 2011., pp. 101-126, ISBN: 978-1-61470-799-8
- [34] Nikolic R. R. and J.M. Djokovic, Influence of the interface on Cracks Propagation along it and on Behavior of Cracks Approaching Interface, In "Crack Growth: Rates, Prediction and Prevention", Edited by D. Kubair, Publishers, Inc., New York, 2011., pp. 127-160, ISBN: 978-1-61470-799-8
- [35] Nikolic R. R. and J.M. Djokovic, Problems of Cracks Between the Two Thin Layers, In "Crack Growth: Rates, Prediction and Prevention", Edited by D. Kubair, Publishers, Inc., New York, 2011., pp. 161-206, ISBN: 978-1-61470-799-8
- [36] Nikolic, R.R. and J.M. Djokovic, Dynamic growth of Interfacial Cracks, In "Crack Growth: Rates, Prediction and Prevention", Edited by D. Kubair, Publishers, Inc., New York, 2011., pp. 207-228, ISBN: 978-1-61470-799-8.
- [37] Krishnaswamy S., A.Rosakis and G. Ravichandran, A bifocal arrangement for reflected caustics for the investigation of the domain of dominance of asymptotic elastic fields in dynamic fracture, Proceedings of the 7th International Conference On Fracture (ICF7), Houston, Texas, USA, 20-24th March 1989.
- [38] Nakamura T. and D. M. Parks, Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate, J. Appl. Mech., 1988., Vol. 55, pp. 805-813
- [39] Nakamura T. and D.M. Parks, Antisymmetrical 3-D stress field near the crack front of a thin elastic plate, International Journal of Solids and Structures, 1989., Vol. 25, Issue 12, pp. 1411-1426
- [40] Ghahremani F., A numerical variational method for extracting 3D singularities, International Journal of Solids and Structures, 1991., Vol. 27, Issue 11, pp. 1371-1386
- [41] Barsoum R. and T.K. Chen, Three-dimensional surface singularity of an interface crack, Int. J. Fracture, 1991., Vol. 50, pp. 221-237
- [42] Nakamura T., Three-dimensional stress fields of elastic interface cracks, J. Appl. Mech., 1991., Vol. 58, pp. 939-946
- [43] Tippur H. V. and A. J.Rosakis, Quasi-static and dynamic crack growth along bimaterial interfaces: A note on crack-tip field measurements using coherent gradient, Experimental Mechanics, 1991., Vol. 31, Issue 3, pp 243-251
- [44] Rosakis A. J., Y. J. Lee and J.Lambros, Dynamic Crack Growth in Bimaterial Interfaces, Experiments in Micromechanics of Failure Resistant Materials, 1991., AMD-Series, Vol. 130, ASME, pp. 17-23
- [45] Yang W., Z.Suo and C. F. Shih, Mechanics of dynamic debonding, Proc. R. Soc. Lond., 1991., Vol. 433, Issue 1889, pp. 679-697
- [46] WU J.-Q., A simple method for measuring K_{IC} of ductile metals, Engineering Fracture Mechanics, 1992., Vol. 41, Issue 1, pp 1-5
- [47] Deng X., Complete complex series expansions of near-tip fields for steadily growing interface cracks in dissimilar isotropic materials, Engineering Fracture Mechanics, 1992., Vol. 42, No. 2, pp. 237-242
- [48] Lee Y. J., J. Lambros and A. J. Rosakis, Highly transient elastodynamic crack growth in a bimaterial interface: Higher order asymptotic analysis and optical

- experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993., Vol. 41, Issue 12, pp. 1887-1954
- [49] Suresh S., *Fatigue of Materials*, Cambridge University Press, 1998., ISBN 9780521570466
- [50] Beuth J.L. and N.W. Klingbeil, Cracking of thin films bonded to elastic-plastic substrates, *J. Mech. Phys. Solids*, 1996., Vol. 44, No. 9, pp. 1411-1428.
- [51] Banks-Sills L., Interface fracture mechanics: theory and experiment, *Int. J. Fract*, 2015., Vol. 191, pp. 131–146
- [52] Kanninen M.F. and C.H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford university press, 1985., New York. ISBN: 978-0195035322
- [53] Moore D. R., *Application of Fracture Mechanics to Polymers, Adhesives and Composites*, Elsevier, 2003, ISBN: 978-0-08-044205-1
- [54] O’Dowd N.P., C. F. Shih and M. G. Stout, Test geometries for measuring interfacial fracture toughness, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 29, Issue 5, 1992., pp. 571-589
- [55] Cao H.C. and A.G. Evans, An experimental study of the fracture resistance of bimaterial interfaces, *Mechanics of Materials*, 1989., Vol. 7, Issue 4, pp. 295-304
- [56] Wang J.-S. and Z. Suo, Experimental determination of interfacial toughness curves using brazil-nut-sandwiches, *Acta Metallurgica et Materialia*, 1990., Vol. 38, Issue 7, pp. 1279-1290
- [57] Z. Suo, Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media, *Proc. R. Soc. Lond.* 1990., A427, pp. 331-358
- [58] Comninou M., The interface crack, *J. Appl. Mech.*, 1977., Vol. 44, pp. 631-636
- [59] Comninou M., An overview of interface cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, 1990., Vol. 37, No. 1, pp. 197-208,
- [60] Thouless M. D., A. G. Evans, M. F. Ashby and J. W. Hutchinson, The edge cracking and spalling of brittle plates, *Acta Metallurgica*, 1987., Vol. 35, Issue 6, pp. 1333-1341
- [61] Noijen S. P. M. , O. v.d. Sluis, P. H. M. Timmermans and G. Q. Zhang, A semi-analytic method for crack kinking analysis at isotropic bi-material interfaces, *Eng. Fracture Mechanics*, 2012., Vol. 83, pp. 8-25
- [62] He M. Y., J. W. Hutchinson, Kinking of a crack out of an interface: Tabulated solution coefficients, Technical report, Harvard University, 1989.
- [63] Beltz G. E. and J. R. Rice, Dislocation Nucleation at Metal - Ceramic Interfaces, *Acta Metall. Mater.*, 1992., Vol. 40, pp. S321 - S331
- [64] Veljkovic J.M., The crack kinking out of an interface, *Theoretical and Applied Mechanics*, 2005., Vol. 32, No. 3, pp. 208-216
- [65] Rice J. R., A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 1968., Vol. 35, pp. 379-386
- [66] Liebowitz H., *Fracture: An Advanced Treatise*, Vol. 2, *Mathematical Fundamentals*, Academic Press, N.Y., 1968.

- [67] Hutchinson J. W., Singular Behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 1968., Vol. 16. pp. 13-31
- [68] Ramberg, W. and W. R. Osgood, Description of stress-strain curves by three parameters, Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC., 1943.
- [69] Hutchinson, J. W. and K. W. Neale, Finite Strain J2 Deformation Theory, Proceedings of the IUTAM Symposium on Finite Elasticity, edited by D. E. Carlson and R. T. Shield, Martinus Nijhoff Publishers, Netherlands, 1981., pp. 238-247
- [70] Nikolic R. and J. Veljkovic, Elastic-plastic analysis of crack on bimaterial interface, *Theoretical and Applied Mechanics*, 2006., Vol. 32, No. 2, pp. 193-207
- [71] Shih C. F., Small-scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems, *ASTM STP 560*, 1974., pp. 187-210
- [72] Pan J. and C. F. Shih, Elastic-plastic analysis of combined mode I, II and III crack-tip fields under small-scale yielding conditions, *International Journal of Solids and Structures*, 1992., Vol. 29, Issue 22, pp. 2795-2814
- [73] Xia, Z. C. and J. W. Hutchinson, Crack tip fields in strain gradient plasticity, *J. Mech. Phys. Solids.*, 1996., Vol. 44, pp. 1621-1648
- [74] Djoković, J. M. i R. R. Nikolić, *Mehanika loma interfejsa između dva materijala*, monografija, Društvo za integritet i vek konstrukcija, Beograd, 2015.
- [75] Freund L. B. and S. Suresh, *Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008., ISBN: 9780521529778
- [76] Yu H., M. Y. He and J. W. Hutchinson, Edge Effects in Thin Films, *Acta Materialia*, 2001., Vol. 49, pp. 93-107
- [77] Cotterell B. and Z. Chen, Buckling and cracking of thin films on compliant substrates under compression, *International Journal of Fracture*, 2000., Vol. 104, pp. 169-179
- [78] Yu H. and J. W. Hutchinson, Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films, *International Journal of Fracture*, 2002., Vol. 113, pp. 39-55
- [79] Djokovic J. M., R. R. Nikolic, I. M. Miletic and M. M. Micunovic, Analysis of the LEFM concept for interfacial cracks application to coating buckling delamination in terms of substrate elastic characteristics, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014., Vol. 52, No. 1, pp. 61-69
- [80] Suo Z. and J. W. Hutchinson, Interface crack between two elastic layers, *International Journal of Fracture*, 1990., Vol. 43, pp. 1-18
- [81] Иван Милетић, Стабилност аксијално притиснутих призматичних љуски, Магистарски рад, Машински факултет у Крагујевцу, 2009.
- [82] Ye T., Z. Suo and A. G. Evans, Thin film cracking and the roles of substrate and interface, *Int. J. of Solids Structures.*, 1992., Vol. 29, pp. 2639-2648
- [83] Wei, Y. and J.W. Hutchinson, Nonlinear delamination mechanics for thin films, *J. Mech. Phys. Solids.*, 1997., Vol. 45, pp. 1137-1159

- [84] Needleman A., Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding, *J. Appl. Mech.* 1987., Vol. 54, No. 3, pp. 525-531
- [85] Tvergaard, V. and J. W. Hutchinson, Toughness of an Interface along a Thin Ductile Layer joining Elastic Solids, *Philosophical Magazine*, 1994., A 70, pp. 641-656
- [86] Suo Z., C. F. Shih, and A. G. Varias, A theory for cleavage cracking in the presence of plastic flow, *Acta Metall. Mater*, 1993., Vol. 41, pp. 1551-1557
- [87] Beltz G. E., J. R. Rice, C. F. Shih and L. Xia, A Self-Consistent Model for Cleavage in the Presence of Plastic Flow, *Acta Materiala*, 1996., Vol. 44, pp. 3943-3954
- [88] Tvergaard, V. and J. W. Hutchinson, The Influence of Plasticity on Mixed Mode Interface Toughness, *J. Mech. Phys. Solids*, 1993., Vol. 41, pp. 1119-1135
- [89] Hutchinson, J. W., Mechanics of thin films and multilayers: Course Notes, Technical University of Denmark, Technical Report, 1996.
- [90] Knowles J. K. and E. Sternberg, Large deformations near a tip of an interface-crack between two Neo-Hookean sheets, *Journal of Elasticity*, 1983., Vol. 13, pp. 257-293