Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет

Небојша Икодиновић

НЕКЕ ВЕРОВАТНОСНЕ И ТОПОЛОШКЕ ЛОГИКЕ

Докторска дисертација

Крагујевац
2005

Садржај

Предговор

У овом раду биће расветљена два веома значајна места Математичке логике у математици, па и науци, уопште. У оба случаја биће проучавани начини на које се може проширивати класична логика до неког богатијег формалног система који је подеснији за резоновање у разним ситуацијама. Дакле, кључна питања која ће бити разматрана су, с једне стране, примена Математичке логике на веома значајне и важне математичке области као што су Теорија вероватноће и Топологија и, с друге стране, како ове области могу утицати на (математичку) логику,

Најпре ће бити проучаване тополошке логике и то највише у циљу осветљивања тополошких структура математичком логиком. Такође биће дат и преглед неких значајнијих истраживања у којима се преплићу математичка логика и топологија. Посебна пажња биће посвећена такозваним класа-тополошким логикама подесним за проучавање топологије на правим класама. И у овом случају нагласак је на једном општијем приступу појму тополошког простора. Наиме, биће дефинисана једна општија класа простора, погодних за проучавање разних тополошких особина.

Посебна пажња ће бити посвећена питању: на који начин је један од основних појмова–појам вероватниће, присутан у математичкој логици. Биће дефинисано неколико логика које формализују статистичку (тзв. објективну) вероватноћу и оних које су погодне за формализацију такозване субјективне вероватноће. Иако ће углавном те логике представљати конзервативна раширења класичне логике, биће поменуте и оне базиране на неким некласичним логикама. Посебна пажња биће посвећена условним вероватноћама. Поред класичног приступа условној вероватноћи (који потиче од Колмогорова) биће разматран и један алтернативни (Де Финетијев) приступ овом појму. Други приступ је посебно занимљив јер му се, поседњих година, поклања све већа пажња. За сваку од логика биће дат систем аксиома комплетан у односу на одговарајуће класе модела. Углавном ће бити коришећени Крипкеови модели где је вероватноћа дефинисана на подскуповима скупа свих могућих светова (као погодна сематнтика за субјективну вероватноћу), али ће бити и речи о моделима (погодним за статистичко схватање вероватноће) где је вероватноћа дефинисана на домену неке структуре првог реда. Такође, за сваку од логика биће разматрана питања и њихове одлучивости и примене.

1

ЛОГИКЕ

> **To claim that logic is first-order logic is like to claim that astronomy is the study of the telescope.**
>
> **J. Barwise**

Иако су логика и математика увек биле сродне дисциплине, у другој половини XIX века однос међу њима почиње да се мења. Наиме, са истраживањима основа математике и проблемима њеног заснивања, логика је, после две хиљаде година спорог развоја, кренула другим правцем, сасвим другачијим од традиционалног. Логика је математици указала на низ проблема који су се до тада сматрали искључиво логичким, а те проблеме је математика открила и у својим сопственим основама и почела је да их изучава. Математика је исто тако преузела низ појмова, претпоставки и захтева који су се формирали у логици. Са друге стране, логика користи математичке методе у доказивању својих тврђења, те се често посматра као једна од математичких теорија у чијем оквиру је развијен један број математичких метода који се по природи битно не разликују од метода алгебре, анализе или топологије, односно, који су по природи математички и служе за решавање математичких проблема. Резултати који су постигнути у испитивању основа математике, опет, дали су врло много материјала логичким истраживањима о природи логичког мишљења. Један од основних задатака у проучавњу основа математике је да се опишу и анализирају појмови „интуитивне" математике. Први корак у том проучавању је често „превођење" интуитивне математике на формални језик. Разуме се, природа тог језика зависи од начина на који смо разумели појмове интуитивне математике, али и анализа тих појмова зависи од могућности које пружа изабрани језик. Могло би се тврдити да је разумевање интуитивних појмова важније јер, ма колико били прецизни формални системи које користимо, они не могу отклонити недостатке наших интуитивних појмова, мада омогућују да се ти недостаци открију. Ипак, логика је незаобилазан метод за решавање многих математичких проблема који се не могу решити, а често ни добро разумети, без одговарајуће логичке анализе. Другим речима, логика се никако не сме схватити само као контекст у коме се постојеће теорије могу ригорозно изложити, али који са становишта конкретних резултата не доноси пракично ништа ново.

1.1 Екстензије логике првог реда

Предикатски рачун, а тиме и његов језик са скупом нелогичких симбола S, је прилагођен проучавању особина S–структура, тј. релацијско-операцијских математичких структура облика $\mathcal{M} = (M, \mathcal{R}, \mathcal{F}, C)$, где је M непразан скуп, $\mathcal{R}, \mathcal{F}, C$ редом скупови релација, операција и константи по броју и врсти потпуно одређени са S. Међутим, познато је да се две најзначајније структуре, структура природних бројева $\mathcal{N} = (\omega, +, \cdot, \leqslant, s, 0)$ и структура реалних бројева $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant, 0, 1)$ не могу окарактерисати одговарајућим језиком првог реда. Исто важи и за неке читаве класе структура: групе са торзијом, поља карактеристике 0 и тако даље. Заправо у језику првог реда није могућа потпуна карактеризација било које бесконачне структуре.

Покушаји да се ствари поправе доводе до разних логичких система који имају много већу изражајну моћ од предикатског рачуна.

Дефиниција 1.1.1. *Под **логичким системом**, или краће **под логиком**, L подразумевамо*

- *функцију $\mathfrak{S}$ која сваком скупу симбола S, придружује скуп S-реченица $\mathfrak{S}(S)$, и*
- *бинарну релацију $\models_L \subset \mathfrak{M}_S \times \mathfrak{S}(S)$, где је $\mathfrak{M}_S$ класа S-структура*

тако да важе следеће особине:

1. *ако је $S_0 \subset S_1$, онда је $\mathfrak{S}(S_0) \subset \mathfrak{S}(S_1)$,*
2. *ако $\mathcal{M} \models_L \varphi$, тада, за неко S, $\mathcal{M}$ је S-структура и $\varphi \in \mathfrak{S}(S)$.*
3. *ако $\mathcal{M} \models_L \varphi$ и $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, тада $\mathcal{N} \models_L \varphi$,*
4. *ако је $S_0 \subset S_1$, $\varphi \in \mathfrak{S}(S_0)$ и $\mathcal{M}$ је S_1-структура тада:*
$$\mathcal{M} \models_L \varphi \text{ акко } \mathcal{M} \restriction S_0 \models_L \varphi.$$

Ако је L логика и $\varphi \in \mathfrak{S}(S)$, нека је
$$\mathfrak{M}_S^L(\varphi) = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \text{ је } S\text{-структура и } \mathcal{M} \models_L \varphi\}.$$

За ма коју задату логику L централни проблем је описати структуре које су L-еквивалентне, тј. када задовољавају исте L-реченице.

Дефиниција 1.1.2. *Нека су L и L' логике.*

*(а) Нека је S скуп симбола, $\varphi \in \mathfrak{S}(S)$ и $\psi \in \mathfrak{S}'(S)$. Формуле φ и ψ су **логички еквивалентне** ако и само ако је $\mathfrak{M}_S^L(\varphi) = \mathfrak{M}_S^{L'}(\psi)$.*

*(б) L' **није слабија од** L, у ознаци $L \leqslant L'$, ако и само ако за свако S и свако $\varphi \in \mathfrak{S}(S)$, постоји $\psi \in \mathfrak{S}'(S)$ тако да су φ и ψ логички еквиваленте.*

*(в) Логике L и L' су **исте јачине**, у ознаци $L \sim L'$, ако и само ако је$L \leqslant L'$ и $L' \leqslant L$.*

Логика L је *регуларна* ако и само ако

- „садржи исказне (Булове) везнике“, тј. за задато S и:

– $\varphi \in \mathfrak{S}(S)$, постоји $\psi \in \mathfrak{S}(S)$, тако да за сваку S–структуру $\mathcal{M}$ важи:

$$\mathcal{M} \models_L \psi \text{ акко није } \mathcal{M} \models_L \varphi,$$

– $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}(S)$, постоји $\theta \in \mathfrak{S}(S)$, тако да за сваку S–структуру $\mathcal{M}$ важи:

$$\mathcal{M} \models_L \theta \text{ акко } (\mathcal{M} \models_L \varphi \text{ и } \mathcal{M} \models_L \psi);$$

- „дозвољава релативизацију", тј. за $\varphi \in \mathfrak{S}(S)$ и унарни релацијски симбол R постоји $\psi \in \mathfrak{S}(S \cup \{R\})$ тако да је:

$$(\mathcal{M}, R^{\mathcal{M}}) \models_L \psi \text{ акко } \mathcal{R}^{\mathcal{M}} \models_L \varphi,$$

за све S-структуре $\mathcal{M}$ и све S-затворене подскупове $R^{\mathcal{M}}$ од M ($\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ је подмодел од $\mathcal{M}$ са доменом $R^{\mathcal{M}}$);

- „допушта замену операцијских симбола и константи релацијским симболима ", тј. ако је S скуп симбола, а S^r скуп симбола такав да се сви операцијски симболи и константе из S замењени релацијским симболима за њихове графове, тада за свако $\varphi \in \mathfrak{S}(S)$ постоји $\psi \in \mathfrak{S}(S^r)$ тако да за сваку S-структуру $\mathcal{M}$ важи:

$$\mathcal{M} \models_L \varphi \text{ акко } \mathcal{M}^r \models_L \psi.$$

У наставку ћемо у $\models_L$ изостављати индекс L, и писати једноставно $\models$, јер ће из контекста увек бити јасно о којој логици је реч.

Кажемо да Левенхајм-Сколемова теорема важи у L: *Ако је $\varphi \in \mathfrak{S}(S)$ задовољива формула, тада φ има и S-модел чији је домен највише пребројив.*

Слично, кажемо да Теорема компактности важи у L: *Ако је $T \subset \mathfrak{S}(S)$ и сваки коначан подскуп од T је задовољив, тада је и T задовољив скуп.*

Означимо са L_{I} класичан предикатски рачун првог реда. У овој, као и у осталим логикама којима ћемо се овде бавити, скуп реченица $\mathfrak{S}(S)$ дефинише се као подскуп скупа формула $For(S)$.

Теорема 1.1.1. (Lindström) *Ако је L регуларна логика, таква да је $L_{\mathrm{I}} \leqslant L$, у којој важе Левенхајм-Сколемова теорема и Теорема компактности, тада је $L \sim L_{\mathrm{I}}$.*

У наставку укратко ћемо описати неколико веома значајних логичких система: $L(Q)$, $L_{\omega_1 \omega}$, $L_{\mathcal{A}}$, L_{II}, L_{mon}, који су настали проширивењем главних идеја предикатског рачуна првог реда допуштањем богатијих језика, а како ћемо видети касније и богатијих структура. Занимљиво је поменути и то да су уопштења логике првог реда старија и од ње саме. Систем веома близак логици другог реда користио је Перс 1885. године. Практично, све до 1930. године преовладавају системи другог реда. До тада није постојала општа сагласност око нотације, а ни интерпретације, формалних симбола. Интересовање за екстензије логика и тзв. апстрактну теорију модела нарочито је порасло после резултата Џона Барвајза (Jon Barwise) о бесконачним допустивим језицима са почетка 70-их. Барвајз је, користећи идеје из проширене теорије рекурзија, успешно уопштио теорију доказа, теорему компактности и сл.

1.1.1 Логике са уопштеним квантификаторима $L(Q)$

Један од првих експлицитних предлога за проучавање екстензија логике првог реда методама теорије модела долази од Мостовског [1957]. Његова идеја била је да се додају квантификатори који директно представљају појмове „коначно много" и „пребројиво много" који нису дефинабилни у логици првог реда, а доста су важни у математици. Скуп формула логике $L(Q)$ генерисан је правилима која, поред стандардних, садрже и следеће правило: ако је φ формула и x променљива, $Qx\psi(x)$ је формула, при чему је x везана променљива у овој формули. Значење новог квантора Q може бити разнолико. На пример, за сваки кардиналан број $\aleph_\alpha$ интерпретација $L(Q_\alpha)$-формуле $Q_\alpha x\varphi$ у моделу $\mathcal{M}$ за валуацију $\nu : \mathrm{Var} \to M$ дефинисана је тако да:

$$\mathcal{M} \models Q_\alpha x\varphi[\nu] \text{ акко постоји бар } \aleph_\alpha \text{ елемената } b \text{ таквих да } \mathcal{M} \models \varphi[\nu(b/x)],$$

где је $\nu(b/x)$ валуација која свим променљивим додељује исте вредности као и валуација ν, осим променљивој x којој додељује вредност b.

Логика $L(Q_0)$ је изграђена на разликовању коначно-бесконачно. Слично, логика $L(Q_1)$ је изграђена на разликовању пребројиво-непребројиво. Тако, на пример, у логици $L(Q_0)$ можемо дефинисати појмове као што су групе са торзијом, коначно генерисане групе, коначно-димензионе векторске просторе, а могу се дефинисати и природни бројеви, док је логика $L(Q_1)$ погодна за дефинисање појмова као што су пребројиво генерисане групе, разне непребројиве структуре и слично.

Изненађујућа је чињеница да се логика $L(Q_1)$ боље „понаша" од логике $L(Q_0)$. На пример, док се за $L(Q_0)$ не може доказати теорема потпуности, за $L(Q_1)$ може.

У логици $L(Q_0)$ не важи теорема компактности, али важи Левенхајм-Сколемова теорема. У $L(Q_1)$ нити важи теорема компактности нити Левенхајм-Сколемова теорема (будући да формула $Q_1x\, x = x$ нема пребројив модел). Занимљиво је поменути да у овој логици важи једна варијанта теореме компактности. Наиме, логика $L(Q_1)$ је $\aleph_0$-компактна: *сваки пребројив скуп $L(Q_1)$-реченица је задовољив ако и само ако је сваки његов коначан подскуп задовољив*. Да теорема компактности не важи (за непребројиве скупове реченица) показује следећи пример: ако језик садржи непребројив скуп симбола константи $\{c_\alpha \mid \alpha < \aleph_1\}$, сваки коначан подскуп од

$$\{\neg c_\alpha = c_\beta \mid 0 \leqslant \alpha < \beta < \aleph_1\} \cup \{\neg Q_1 x\, x = x\}$$

је задовољив, док читав скуп то није.

Кислер је у [25] показао теорему потпуности узимајући за аксоматски систем логике $L(Q_1)$ проширење аксиоматског система класичног предикатског рачуна следећим схема-аксиомама:

(i) $Q_1x\varphi \to Q_1y\varphi(y/x)$, ако y није слободно у φ
(Замена везане променљиве);
(ii) $\neg Q_1x(x = y \vee x = z)$
(„Синглтон и пар нису непребројиви");
(iii) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (Q_1x\varphi \to Q_1x\psi)$
(„Скуп који има непребројив подскуп је и сам непребројив");
(iv) $\neg Q_1x\exists y\varphi \wedge Q_1y\exists x\varphi \to \exists xQ_1y\varphi$
(„Ако је унија највише пребројиво много скупова непребројива, тада је бар један од тих скупова непребројив ").

1.1.2 Логика $L_{\omega_1\omega}$

У логици $L_{\omega_1\omega}$ поред уобичајених формула класичног предикатског рачуна допуштене су и конјункције највише пребројивог скупа формула: ако је Φ највише пребројив, непразан, скуп формула, тада је и $\bigwedge\Phi$ формула. Релацију задовољења формула ове логике проширујемо следећим условом:

$$\mathcal{M} \models \bigwedge\Phi \text{ акко } \mathcal{M} \models \varphi \text{ за свако } \varphi \text{ из } \Phi.$$

Дисјункцију $\bigvee\Phi$ уводимо као скраћење формуле $\neg\bigwedge\{\neg\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ (према де Моргановим законима).

Има доста примера структура које могу бити описане формулама логике $L_{\omega_1\omega}$: класа свих коначних модела, класа свих група са торзијом, класа поља карактеристике 0, класа архимедски уређених поља, класа повезаних графова и тако даље. На пример, класа свих група са торзијом окарактерисана је конјункцијом уобичајених аксиома за групе заједно са: $\forall x \bigvee\{\underbrace{x * \ldots * x}_{n} = e \mid n \in \mathbb{N}\}$. Такође, ако за природан број n већи од 1, са $\varphi_{\geqslant n}$ означимо формулу $\exists v_0 \ldots \exists v_{n-1}(\neg v_0 = v_1 \wedge \ldots \wedge \neg v_0 = v_{n-1} \wedge \ldots \wedge \neg v_{n-2} = v_{n-1})$, имамо да важи: $\mathcal{M} \models \bigvee\{\neg\varphi_{\geqslant n} \mid n > 1\}$ акко „M је коначан скуп".

Ако се дозволе докази бесконачне дужине, логика $L_{\omega_1\omega}$ има аксиоматски систем који је потпун у односу на уведену семантику. Прву теорему потпуности за ову логику доказао је Карп (1964). Аксиоматски систем класичног предикатског рачуна проширен је на следећи начин: за сваку реченицу $\bigwedge\Phi$ и $\varphi \in \Phi$, додаје се аксиома
(i) $\bigwedge\Phi \to \varphi$;
и правило извођења:
(ii) из $\psi \to \varphi$, за свако φ из Φ, закључујемо $\psi \to \bigwedge\Phi$.

Теорема компактности не важи у $L_{\omega_1\omega}$, што нам показује следећи скуп реченица:

$$\Big\{\bigvee\{\neg\varphi_{\geqslant n} \mid n > 1\}\Big\} \cup \{\varphi_{\geqslant n} \mid n > 1\}.$$

Допустиви скупови и логика L_A

Кажемо да је скуп *допустив* ако и само ако је непразан, транзитиван и модел Крипке-Платек теорије скупова.

Скуп x је *транзитиван* ако је сваки елемент од x подскуп скупа x. За сваки скуп x постоји најмањи транзитиван скуп, тзв. *транзитивно затворење* скупа x, који га садржи. За сваки бесконачан кардинал κ, означимо са $\mathbb{H}(\kappa)$ колекцију свих скупова чије је транзитивно затворење кардиналности $< \kappa$. У наставку ће нарочито бити важне колекције $\mathbb{HF} = \mathbb{H}(\omega)$ и $\mathbb{HC} = \mathbb{H}(\omega_1)$, чије ћемо елементе редом звати *хередитарно коначни* и *хередитарно пребројиви* скупови.

Појам *допустивог скупа* увели су Крипке (1964) и Платек (1966) ослањајући се пре свега на теорију израчунљивости (рекурзија). Они су уопштили уобичајену теорију израчунљивости природних бројева на ординале који су мањи од неког фиксираног тзв. *допустивог ординала*. Наиме, Крипке-Платекова теорија скупова (**KP**) је „минимална" теорија у којој се може засновати појам израчунљивости. За сваки ординал α, постоји одговарајућа фамилија конструктибилних скупова $\mathbb{L}_\alpha$. Ако је $(\mathbb{L}_\alpha, \in)$ модел за **KP**, ординал α је допустив.

Теорија **KP** је теорија првог реда на језику $\{\in\}$, слабија од **ZF** теорије скупова јер се одбацује аксиома партитивног скупа, док су аксиоме сепарације (подскупа, компрехензије) и колекције (замене) ограничене само на Δ_0 формуле. Скуп Δ_0 формула је најмањи скуп формула који садржи атомичке формуле језика $\{\in\}$ и затворен је за коначне конјункције и дисјункције, ограничене квантификаторе $\exists x \in u$ и $\forall x \in u$ и негацију. Скуп Σ формула је најмањи скуп формула који садржи Δ_0 формуле и затворен је за коначне конјункције и дисјункције, ограничене квантификаторе $\exists x \in u$ и $\forall x \in u$ и егзистенцијалне квантификаторе $\exists x$. Уведени скупови формула су значајни због веома важних особина које ћемо у наставку поменути. Ако је (M, E) нека структура са једном бинарном релацијом, нека је $x_E = \{a \in M : aEx\}$, за произвољан $x \in M$[1]. Под *крајњом екстензијом* од (M, E) подразумевамо сваку надструктуру (N, F) од (M, E) такву да је за свако $x \in M$, $x_E = x_F$ ($x \in M$ нема нове елементе у проширењу). Приметимо да уколико су M и N транзитивни скупови и $M \subseteq N$, тада је $(N, \in)$ крајња екстензија од $(M, \in)$. Нека је T неки скуп реченица на језику теорије скупова; на пример, T може бити управо **KP**. Кажемо да је формула $\varphi(\overline{x})$ *преносива* у односу на T ако и само ако за све (M, E), за које је $(M, E) \models T$, важи: ако је (N, F) крајња екстензија од (M, E) таква да је $(N, F) \models T$, тада

$$\text{из } (M, E) \models \varphi[\overline{a}], \text{ следи } (N, F) \models \varphi[\overline{a}], \text{ за све } \overline{a} \text{ из } M.$$

Каже се да је формула φ *апсолутна* у односу на T ако и само ако су и φ и њена негација проносиве формуле у односу на T. Веома важно тврђење је да су све Σ формуле преносиве у односу на T. Доказано је да важи и обрнуто (Феферман и Кислер) да је свака преносива формула у односу на T уједно и T-еквивалентна некој Σ формули. Значајне су и последице:

- свака формула која је Δ_0 над T је апсолутна у односу на T;
- свака Δ_0 формула је апсолутна у односу на свако T.

НАПОМЕНА. Нека су M и N транзитивни скупови, $M \subseteq N$, $(M, E), (N, F) \models T$ и нека је φ формула са параметрима у M преносива у односу на T. Ако је X скуп у (N, F) дефинисан формулом φ, тада је $X \cap M$ скуп у (M, E) дефинисан са φ. Такође, за сваки $a \in M$, формулом $x \in a \wedge \varphi$ је у (N, F) дефинисан исти скуп као и у (M, E). $\square$

Тако, аксиоме теорије **KP** су аксиоме екстензионалности, регуларности, пара и уније (као код **ZF**), заједно са следећим схемама аксиома сепарације и колекције:

- (Δ_0 сепарација) за сваку Δ_0 формулу $\varphi(x, \overline{y})$ у којој се променљива v не појављује слободно, аксиома је:

$$\forall\overline{y}\forall v\exists u\forall x(x \in u \leftrightarrow (x \in v \wedge \varphi(x, \overline{y})));$$

- (Δ_0 колекција) за сваку Δ_0 формулу $\varphi(x, y, \overline{z})$ у којој се променљива v не појављује слободно, аксиома је:

$$\forall\overline{z}\forall u(\forall x \in u\exists y\varphi(x, y, \overline{z}) \rightarrow \exists v\forall x \in u\exists y \in v\varphi(x, y, \overline{z})).$$

[1] Интуитивно, особа која живи у (M, E), x_E сматра скупом елемената од x.

Једна од најважнијих теорема теорије KP је *принцип Σ-рефлексије*: у KP свака Σ формула је еквивалентна формули облика $\exists u \varphi^u$, при чему је *релативизација* φ^u формуле φ у односу на u дефинисана индукцијом по сложености формуле φ: $(x = y)^u$ и $(x \in y)^u$ су редом формуле $x = y$ и $x \in y$; $(\varphi \to \psi)^u$ и $(\neg\varphi)^u$ су $\varphi^u \to \psi^u$ и $\neg\varphi^u$, док је $(\exists x \varphi)^u$ формула $\exists x \in u \varphi^u$.

За сваки допустив скуп $\mathcal{A}$, најмањи ординал који није елемент од $\mathcal{A}$ назива се *ординал скупа* $\mathcal{A}$ и обележава се са $o(\mathcal{A})$. Приметимо да је $o(\mathcal{A})$ увек граничан ординал и да је једнак скупу свих ординала који су елементи од $\mathcal{A}$; чак је $o(\mathcal{A})$ подскуп од $\mathcal{A}$ који је дефинабилан у $(\mathcal{A}, \in)$ неком Δ_0 формулом.

Важни примери допустивих скупова су $\mathbb{H}(\kappa)$, при чему је $o(\mathbb{H}(\kappa)) = \kappa$. Најмањи међу њима, $\mathbb{HF} = \mathbb{H}(\omega)$, одговара класичној теорији израчунљивости и једини је допустив скуп чији је ординал ω. На пример, за $X \subseteq \mathbb{HF}$ каже се да је *рекурзивно набројив* ако је дефинабилан у $(\mathbb{HF}, \in)$ неком Σ формулом са параметрима у $\mathbb{HF}$; скуп $X \subseteq \mathbb{HF}$ је *рекурзиван* ако је његов комплемент $\mathbb{HF} \setminus X$ рекурзивно набројив. Показује се да ако скуп природних бројева идентификујемо са скупом $\mathbb{HF}$, за сваки $X \subseteq \mathbb{HF}$ важи: 1.) X је Δ_0 над $\mathbb{HF}$ ако и само ако је рекурзиван и 2.) X је Σ над $\mathbb{HF}$ ако и само ако је рекурзивно набројив. Дакле, у извесном смисли Δ_0- и Σ-дефинабилни скупови су редом генерализације рекурзивних и рекурзивно набројивих скупова.

Да би истакли аналогију са класичном теоријом израчунљивости, за произвољан допустив скуп $\mathcal{A}$, елементе од $\mathcal{A}$ зваћемо $\mathcal{A}$-коначним скуповима. Подскуп од $\mathcal{A}$ је *$\mathcal{A}$-рекурзивно набројив* ако је дефинабилан у $(\mathcal{A}, \in)$ неком Σ формулом са параметрима у $\mathcal{A}$, тј. ако је Σ над $\mathcal{A}$. Такође, скуп $X \subseteq \mathcal{A}$ је *$\mathcal{A}$-рекурзиван* ако су и X и $\mathcal{A} \setminus X$ $\mathcal{A}$-рекурзивно набројиви. На пример, за сваки допустив скуп $\mathcal{A}$, скуп $o(\mathcal{A})$ је $\mathcal{A}$-рекурзиван, али није $\mathcal{A}$-коначан.

Теорема 1.1.2. *Ако је $\mathcal{A}$ допустив скуп, S неки $\mathcal{A}$-коначан скуп и $X \subseteq S$ је $\mathcal{A}$-рекурзиван, тада је X и $\mathcal{A}$-коначан*[2].

Да би доказао чувене теореме непотпуности, Гедел је (пребројив) језик првог реда кодирао природним бројевима користећи стандардан модел аритметике $\mathbb{N}$. Испоставља се да је скуп кодова свих ваљаних реченица класичног предикатског рачуна, један рекурзивно набројив скуп, тј. дефинабилан у $\mathbb{N}$ једном Σ формулом.

Слично, формуле логике $L_{\omega_1 \omega}$ можемо кодирати елементима скупа $\mathbb{HC}$ пресликавањем $\ulcorner\cdot\urcorner : For(L_{\omega_1 \omega}) \to \mathbb{HC}$ на следећи начин:

- сваки логички или нелогички симбол је неки природан број,

$$\ulcorner\cdot\urcorner = \begin{pmatrix} \neg & \bigwedge & \exists & = & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{pmatrix},$$

- за сваку променљиву v_n је $\ulcorner v_n \urcorner = (0, n)$,
- атомичне формуле су коначни низови симбола: $\ulcorner v_n = v_m \urcorner = (\ulcorner v_n \urcorner, \ulcorner = \urcorner, \ulcorner v_m \urcorner), \dots$

[2]Из принципа Σ рефлексије и аксиоме Δ_0-колекције следи да је X дефинабилан у $(\mathcal{A}, \in)$ неком Δ_0 формулом, одкле, према аксиоми Δ_0-сепрације следи да $X \in \mathcal{A}$.

- све формуле су највише пребројиви скупови: $\ulcorner\neg\varphi\urcorner = (\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner)$, $\ulcorner\exists x\varphi\urcorner = (\ulcorner\exists\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner)$, $\ulcorner\bigwedge\Phi\urcorner = (\ulcorner\bigwedge\urcorner, \{\ulcorner\varphi\urcorner : \varphi \in \Phi\})$

Слично, формуле можемо кодирати елементима било ког допустивог скупа $\mathcal{A}$. Формула логике $L_{\mathcal{A}}$ је свака допустива формула $\varphi \in For(L_{\omega_1\omega})$, тј. таква да $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathcal{A}$. Зато се каже и да је $L_{\mathcal{A}}$ *фрагмент* логике $L_{\omega_1\omega}$. Скуп формула фрагмента $L_{\mathcal{A}}$ има доста „лепих" особина, на пример:

- Ако је Φ пребројив скуп формула и $\Phi \in \mathcal{A}$, тада $\bigwedge\Phi \in \mathcal{A}$, $\bigvee\Phi \in \mathcal{A}$, $\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\} \in \mathcal{A}$, $\{\exists x\varphi : \varphi \in \Phi\} \in \mathcal{A}, \ldots$
- ако је Φ пребројив скуп формула из $For(L_{\omega_1\omega})$, тада постоји пребројив фрагмент $L_{\mathcal{A}}$, такав да је Φ скуп допустивих формула.

Формула φ *теорема* је логике $L_{\mathcal{A}}$, у ознаци $\vdash_{L_{\mathcal{A}}} \varphi$, ако и само ако има доказ у логици $L_{\omega_1\omega}$ такав да је свака формула тога доказа $L_{\mathcal{A}}$-формула.

Теорема 1.1.3. (Теорема потпуности) *Ако је φ реченица пребројивог фрагмента $L_{\mathcal{A}}$ логике $L_{\omega_1\omega}$, тада важи: $\vdash_{L_{\mathcal{A}}} \varphi$ акко $\models \varphi$.*

Теорема 1.1.4. (Барвајзова теорема потпуности) *Нека је $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{HC}$ допустив скуп. Скуп свих ваљаних реченица фрагмента $L_{\mathcal{A}}$ је Σ над $\mathcal{A}$.*

Уопштавајући теорему компактности класичног предикатског рачуна: *Ако је T скуп реченица (првог реда) такав да сваки његов подскуп T_0 који припада $\mathbb{HF}$ има модел, тада и T има модел*, Барвајз доказује и следећу, веома значајну, теорему.

Теорема 1.1.5. (Теорема Барвајзове компкактности) *Нека је $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{HC}$ пребројив допустив скуп и нека је T скуп $L_{\mathcal{A}}$-реченица који је Σ над $\mathcal{A}$. Ако сваки $T_0 \subseteq T$ такав да $T_0 \in \mathcal{A}$ има модел, тада и T има модел.*

1.1.3 Логика другог реда L_{II}

Формални језик логике L_{II} је проширење језика првог реда скупом нових промењивих: за сваки природан број n, додајемо промењиве $V_0^n, V_1^n, \ldots$ за n-арне релације. У овој логици допуштене су, поред уобичајених, и формуле облика $V^n t_1 \ldots t_n$, при чему су $t_1 \ldots t_n$ терми, као и оне у којима се квантификује по новим промењивим: $\exists X\varphi$, где је φ формула, а X релацијска промењива. Валуација другог-реда скупа M је свако пресликавање ν, чији је домен скуп свих промењивих ове логике, $\{v_0, v_1, \ldots\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{V_0^n, V_1^n, \ldots\}$, тако да $\{v_0, v_1, \ldots\} \xrightarrow{\nu} M$ и $\{V_0^n, V_1^n, \ldots\} \xrightarrow{\nu} \mathcal{P}(M^n)$, за сваки природан број n. Тако, ако је $\mathcal{M}$ било која структура и ν валуација другог реда, имамо

$$\mathcal{M} \models \exists V^n\varphi[\nu] \text{ акко постоји } C \subseteq M^n \text{ тако да } \mathcal{M} \models \varphi[\nu(C/V^n)],$$

где је $\nu(C/V^n)$ валуација која свим променљивим додељује исте вредности као и валуација ν, осим променљивој V^n којој додељује вредност C. Универзални квантификатор се уводи на уобичајен начин.

Логика другог реда је веома изражајна. На пример, постоји реченица чији су сви модели изоморфни са $(\omega, s, 0)$. Такође, ако је $\varphi_{\mathcal{R}}$ конјунција свих аксиома за уређена поља и реченице другог реда: „Сваки непразан скуп који је ограничен одозго има супремум", тј.

$$\begin{aligned}&\forall X\ ((\ \exists x Xx \wedge \exists y \forall z(Xz \rightarrow z < y))\\ &\quad \rightarrow \exists y(\forall z(Xz \rightarrow (z < y \vee z = y)) \wedge \forall x(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge Xz))))\end{aligned}$$

за сваку структуру $\mathcal{M}$ (на језику уређених поља) важи: $\mathcal{M} \models \varphi_{\mathcal{R}}$ акко $\mathcal{M} \cong \mathcal{R}$.

Теорема компактности не важи у L_{II}. На пример, ако је φ_{fin} формула

$$\forall X((\forall x \exists_1 y Xxy \wedge \forall x \forall y \forall z((Xxz \wedge Xyz) \rightarrow x = y)) \rightarrow \forall y \exists x Xxy),$$

имамо да важи

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \varphi_{\mathrm{fin}} \quad &\text{акко} \quad \text{„свака инјективна функција из } M \text{ у } M \text{ је сирјективна"}\\ &\text{акко} \quad \text{„}M \text{ је коначан скуп".}\end{aligned}$$

Није тешко видети да скуп $\{\varphi_{\mathrm{fin}}\} \cup \{\varphi_{\geqslant n} \mid n > 1\}$ није задовољив, али је, наравно, сваки његов коначан подскуп задовољив. Како су формуле логике другог реда коначни низови симбола, неважење теореме компактности показује да се у овој логици не може дефинисати аксиоматски систем у којем би докази били коначни низови, а који би био сагласан и потпун у односу на семантику логике L_{II}.

Будући да је неки скуп M највише пребројив ако и само ако постоји уређење на M такво да сваки елемент има само коначно много претходника, ако ставимо да је $\varphi_{\leqslant\omega}$ формула:

$$\begin{aligned}&\exists Y(\forall x \neg Yxx \wedge \forall x \forall y \forall z((Yxy \wedge Yyz) \rightarrow Yxz) \wedge \forall x \forall y(Yxy \vee x = y \vee Yyx)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \forall x \exists X(\varphi_{\mathrm{fin}} \wedge \forall y(Xy \leftrightarrow Yyx))),\end{aligned}$$

имамо да важи:

$$\mathcal{M} \models \varphi_{\leqslant\omega} \ \text{акко „}M \text{ је највише пребројив скуп",}$$

тј.

$$\mathcal{M} \models \neg\varphi_{\leqslant\omega} \ \text{акко „}M \text{ је непребројив скуп".}$$

Дакле, Левенхајм-Сколемова теорема не важи у L_{II}.

Интересантна је логика другог реда у коју се знак једнакости уводи реченицом

$$\forall x \forall y(x = y \leftrightarrow \forall X(Xx \leftrightarrow Xy))$$

познатом као Лајбницов *identitas indiscernibilium*: „две ствари су једнаке ако не постоји својство које их разликује".

Монадска логика другог реда L_{mon}

У логици L_{mon} дозвољено је квантификовање само по подскуповима домена структуре, те је зато језик првог реда проширен само новим бесконачним скупом променљивих $V_0, V_1, \ldots$

Значење формулама ове логике најчешће се даје у тзв. *слабим* структурама $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$, при чему је $\mathcal{M}$ нека (операцијско-релацијска) структура првог реда, а $\mathcal{S}$ подскуп партитивног скупа $\mathcal{P}(M)$ од M. Тако, на пример, ако је $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ било која слаба структура и ν валуација другог реда, имамо

$$(\mathcal{M}, \mathcal{S}) \models \exists V^n \varphi[\nu] \text{ акко постоји } C \in \mathcal{S} \text{ тако да } (\mathcal{M}, \mathcal{S}) \models \varphi[\nu(C/V^n)].$$

Логика L_{mon}, интерпретирана у слабим структурама, може се свести на одговарајући дво-сортни предикатски рачун са одговарајућим структурама облика $(\mathcal{M}, \mathcal{S}, \in)$, где је $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ нека слаба структура, а $\in$ релација припадања међу елементима скупа M и елементима колекције $\mathcal{S}$. Отуда и чињеница да се за логику L_{mon}, интерпретирану на овај начин, могу доказати основне модел-теоретске теореме: теореме потпуности и компактности, као и Левенхајм-Сколемова теорема.

Важно је приметити да, ако се ограничимо само на моделе облика $(\mathcal{M}, \mathcal{P}(M))$, тада ниједна од поменутих модел-теоретских теорема не важи. Иначе, логика L_{mon} интерпретирана само у оваквим структурама назива се и *пуна* монадска логика.

Уведимо и неколико појмова, који ће нам касније бити од користи. Наиме, коришћењем логичких правила за негацију, није тешко показати да је свака L_{mon}-формула еквивалентна својој тзв. *негацијској нормалној форми*, тј. формули у којој се знак $\neg$ појављује само испред атомичких формула. Кажемо да је L_{mon}-формула φ *позитивна* по скуповној променљивој X, ако је свако слободно појављивање променљиве X у *негацијској нормалној форми* од φ облика Xt при чему испред Xt нема знака негације; φ *негативна* по X, ако је свако слободно појављивање X у *негацијској нормалној форми* од φ облика $\neg Xt$. На пример, формула

$$\exists X \neg Xt \vee (Xz \wedge \neg Yz \wedge \exists y(Xy \wedge Yy))$$

је позитивна по X, али није ни позитивна ни негативна по Y.

1.2 Некласичне логике

Логике, које смо поменули, погодни су системи за изражавање својстава математичких структура. Исказни (Булов) рачун, као део сваке од поменутих логика, формализује онај део логике у којем легитимност аргументације зависи само од везника помоћу којих су реченице конструисане, а не и од њиховог значења или унутрашње структуре. У овом контексту, битни су само: структура реченице у односу на логичке (исказне) везнике[3] и чињеница да реченица може бити само истинита или лажна, при чему је ирелевантно зашто је истинита или лажна, како је интерпретирна и шта је њен смисао. Разне потребе теоријске (на пример, проблеми који су се појавили у заснивању математике, физике и филозофије) и практичне (на пример, у рачунарству) природно су утицале како на развој класичне исказне, односно предикатске, логике, тако и на стварање разних *некласичних* логика. Тако, издвојиле су се две главне групе некласичних логика:

[3] ако ... онда ...; ... и...; ... или...; не...; ... ако и само ако ...

- логике које користе исти формални језик ако и класичне логике, али се од њих разликују различитим третирањем истинитосних вредности, или одбацивањем неких ваљаних формула, и
- логике које користе богатији формални језик него класичне логике чиме се повећава изражајност, док се задржавају класичан начин дефинисања истине и одговарајуће ваљане формуле.

Тако је, на пример, *принцип искључења трећег*, веома значајан услов класичне логике, доведен у сумњу још у античко доба.[4] Напуштање овог принципа води или поливалентним логикама или интуиционизму.

Такође, напуштање услова да је истинитосна вредност исказа $(\varphi \to \psi)$ потпуно одређена истинитосним вредностима исказа φ и ψ, води или у модалне или у релевантне логике.

Поменућемо само неке некласичне исказне логике, уз напомену да за сваку од њих постоји и одговарајућа предикатска логика.

1.2.1 Поливалентне (вишевредносне) логике

У поливалентним логикама претпоставља се да исказ може имати више од двеју могућих истинитосних вредности; поред истинитосних вредности *тачно* и *нетачно* постоје и друге. Ако логика има три истинитосне вредности, трећа истинитосна вредност тумачи се као: *непознато, неодређено, тренутно нема истинитосну вредност* и сл. На пример, ако су истинотосне вредности: 0 (неистинито), 1 (истинито) и 2 (неодређено), истинитосне таблице за $\neg$ и $\to$ можемо дефинисати на следећи начин:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0
2	2

$\to$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	1	2
2	2	1	1

Није тешко показати да формула $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$, зависно од истинитисних вредности које имају φ, ψ, θ, није увек истинита, али да ни у једном случају није неистинита.

Такође, постоје и n-значне логике, за сваки природан број n, као и бесконачно-значне логике. У новије време све више се примењују $[0,1]$-значне логике, тзв. фази логике[5], где је $[0,1]$ јединични интервал реалних бројева. За сваки исказни везник $\star$ дефинише се истинитосна функција $f_\star : [0,1]^2 \to [0,1]$, при чему се, најчешће, захтева да $f_\star \restriction \{0,1\}$ представља класичну „истинитосну таблицу" везника $\star$; на пример да је $f_\wedge(1,1) = 1$ и $f_\wedge(1,0) = f_\wedge(0,1) = f_\wedge(0,0) = 0$. У великом броју случајева, избор истинитосних функција условљен је конкретним проблемом који се разматра и одређен је избором истинитосне функције за конјункцију; на пример, узима се да је

$$f_\to(x,y) = \max\{z : f_\wedge(x,z) \leqslant y\}.$$

Најпознатији примери оваквих логика су:

[4] Једна верзија овог принципа је и логичко учење да је сваки исказ или истинит или лажан.

[5] Фази теорију је 1965. године установио Задех увођењем фази скупова. Од тада фази теорија све више налази своју практичну индустријску примену.

- Лукасијевичева, где је $f_{\wedge}(x,y) = x \wedge_L y = \max\{0, x+y-1\}$ и

$$f_{\rightarrow}(x,y) = x \rightarrow_L y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ 1-x+y, & x > y \end{cases}.$$

- Геделова, где је $f_{\wedge}(x,y) = x \wedge_G y = \min\{x,y\}$ и

$$f_{\rightarrow}(x,y) = x \rightarrow_G y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ y, & x > y \end{cases}.$$

- Производ-логика, где је $f_{\wedge}(x,y) = x \wedge_\Pi y = x \cdot y$ и

$$f_{\rightarrow}(x,y) = x \rightarrow_\Pi y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ \frac{x}{y}, & x > y \end{cases}.$$

Детаљан преглед разних фази логика, схваћених као $[0,1]$-значних логика са исказним везницима уведеним преко истинитосних функција, дат је у [38].

1.2.2 Интуиционистичка логика

Један од најзначајнијих покушаја да се математика логички заснује пружила је интуиционистичка логика. Изразити представник тог становишта био је Брауер, велики противник логицизма и отац интуиционизма. Према његовом мишљењу: „*Не постоји логика која би обавезивала све људе у свим временима*“.

Интуиционизам сасвим одбацује помињање истинитог и лажног, и тврди само оне исказе који се могу ***конструктивно*** доказати.

Пример. **(Брауер)** $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ не можемо тврдити за свако тврђење φ. Заиста, напишимо децимални развој броја π: $\pi = 3,14159\ldots$[6] Запишимо и број $\rho = 0,333333\ldots$ прекидајући записивање када се низ цифара 0123456789 појави у запису броја π, под претпоставком: *Не знам да ли ће се икада низ* 0123456789 *појавити у децималном развоју броја* π. Нека је φ тврђење: *ρ је рационалан број.* Класично, φ је очигледно тачно. Интуиционистички φ се интерпретира на следећи начин: *Постоји **конструкција** целих бројева m и n таквих да је $\rho = \frac{m}{n}$.* Ако претпоставимо $\neg\varphi$, тада ρ не може бити облика $0,33\ldots300\ldots$, тј. $\rho = \frac{1}{3}$, односно φ важи што је контрадикција. Дакле (интуиционистички) $\neg\neg\varphi$. Али, интуиционистички, не можемо тврдити φ, а тиме не можемо тврдити ни $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

Аренд Хејтинг је формализовао интуиционистичку логику[7] и данас се често његова формализација сматра интуиционистичком логиком. Трагање за интуиционистичким законима, довело је до система чије су аксиоме

(I1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(I2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$

[6] Брауер је сматрао да је број π легитимно конструисан број јер постоји алгоритам конструисања цифара

[7] чему се, иначе, Брауер жестоко противио

(I3) $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

(I4) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

(I5) $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$

(I6) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$

(I7) $\varphi \wedge \psi \to \psi$

док је једино правило извођења *модус йоненс* (MP).

Интуиционизам је довео до настанка многих модерних математичких теорија.

1.2.3 Модалне логике

Неки логичари су сматрали, а многи још увек сматрају, да се у одређивању односа међу исказима морају узимати у обзир и обележја као што су *нужносш*, *могућносш*, *немогућносш*, као и други сродни појмови. Логика која проучава ове појмове зове се *модална логика*[8].

Језик модалне логике добија се проширењем језика класичне логике унарним операторима $\Box$ и $\Diamond$, при чему је $\Diamond\varphi \overset{\mathrm{def}}{=} \neg\Box\neg\varphi$. Операторе $\Box$ и $\Diamond$ редом ћемо звати *нужно* и *могуће*. Ове операторе, па тиме и везе међу њима, можемо схватити на разне начине [43], тако да постоје различити системи модалних законитости. На пример, аксиоме једног таквог система, означимо га са (**K4**), су:

(M1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(M2) $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$

(M3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

(M4) $\Box\varphi \to \varphi$

(M5) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

(M6) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

док су правила извођења *модус йоненс* (MP) и правило *нецесишације* (N): из φ изводи се $\Box\varphi$.

Познато је да се модални појмови не могу дефинисати само помоћу истинитости и лажности[9], те се за модалне логике каже да су логике изнијансиране истине; поред исказа који су тачни или нетачни, постоје и искази који су нужно тачни, који су могући и тако даље.

Напоменимо да се модални појмови *нужно* и *могуће* могу, на известан начин, повезати са разним временски одредбама. Такође, рачун вероватноће се може схватити као нумеричко проширење модалне логике, као што се модалне тврдње могу схватити и као специјални случајеви који се појављују у логици вероватноће.

[8]јер су се у традиционалној логици нужност, могућност итд. звали *модалишеши* сазнања или истине

[9]Истинитосна вредност формуле која почиње неким од модалних оператора није функција истинитосних вредности подформула те формуле

1.2.4 Крипкеови модели

Уопштавању интерпретација које су коришћене у разним некласичним логикама највише је допринео Саул Крипке (1940) претпоставком да су модели опремљени скупом *(могућих) светова*[10] W и извесном *релацијом достижности (доступности)* међу њима $R \subseteq W \times W$. Тако, у прецизном давању значења формулама неке некласичне логике пре свега се користи поменути приступ са могућим световима који се назива и релациона семантика.

Крипкеови модели за модалне логике

Модели за модалне логике се управо базирају на истовременом постојању више светова, који сваки за себе представља класичну исказну интерпретацију, и међу световима постоји релација достижности.

На пример, опишимо класу модела која одговара модалном систему (**K4**). Ако је I скуп исказних слова, уређена тројка (W, R, v) је *исказни Крипкеов модел*, ако је W непразан скуп, R транзитивна бинарна релација на W, а $v : W \times I \to \{true, false\}$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује једну класичну исказну интерпретацију $v(w, \cdot) : I \to \{true, false\}$. Релација *задовољивости*, у ознаци $\models$, је бинарна релација између светова модела (W, R, v) и формула, таква да за сваки свет $w \in W$ важи:

- ако $p \in I$, $w \models p$ акко $v(w,p) = true$,
- $w \models \neg\varphi$ акко није $w \models \varphi$,
- $w \models \varphi \wedge \psi$ акко $w \models \varphi$ и $w \models \psi$,
- $w \models \Box\varphi$ акко за сваки свет u такав да wRu важи $u \models \varphi$.

Кажемо да је нека формула φ *ваљана* у неком исказном Крипкеовом моделу ако за сваки свет w тог модела важи $w \models \varphi$, тј. ако је задовољена у сваком свету тог модела. Како модалне логике првог реда настају проширивањем класичне предикатске логике модалним операторима, као што је то рађено и у исказном случају, на семантичком нивоу се сваком свету модалног модела придружује домен, скуп објеката који постоје у том свету.

Крипкеови модели за интуционистичку логику

Значење формула у интуиционистичкој логици даје се, такође, употребом Крипкеових модела, код којих је релација достижности рефлексивна и транзитивна. Светови модела се могу схватити као скупови информација, односно стања знања у одређеном тренутку, док релација достижности представља могућа проширења актуелног стања знања[11]. Релација задовољивости испуњава следеће захтеве:

- ако је p исказно слово и $w \models p$, онда за сваки свет u такав да је wRu важи $u \models p$,

[10] На пример, много је исказа који су тачни једино у замаљским условима, тј. тачни на планети Земљи, док у неком другачијем свету могуће је да они нису истинити.

[11] wRu се тумачи као „ако сада знам w, онда ћу у будућности можда знати u".

- $w \models \varphi \wedge \psi$ акко $w \models \varphi$ и $w \models \psi$,
- $w \models \varphi \vee \psi$ акко $w \models \varphi$ или $w \models \psi$,
- $w \models \neg\varphi$ акко за сваки свет u такав да је wRu није $u \models \varphi$,
- $w \models \varphi \rightarrow \psi$ акко за сваки свет u такав да је wRu ако $u \models \varphi$, онда $u \models \psi$.

Формула φ је *ваљана у моделу* ако за сваки свет w модела важи $w \models \varphi$, а *интуиционистички ваљана*, ако је ваљана у свим моделима.

2

ТОПОЛОГИЈА И ЛОГИКА

Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis Sitûs.

H. Poincaré

2.1 Топологија

2.1.1 Тополошки простори

Развој функционалне анализе и других дисциплина у којима су уочени феномени слични непрекидности и конвергенцији (теорија парцијалних уређења, теорија скупова, логика) био је природан разлог да се, уместо метричких, посматрају апстрактнији простори. Тако долази до заснивања теорије *тополошких простора* која данас представља најшири оквир у коме се изучавају феномени непрекидности и сродни феномени. Реч „топологија" потиче од грчке речи $\tau \acute{o} \pi o \varsigma$; иако је уобичајен превод ове речи „простор", у последње време све чешће се она се преводи као „место[1]", што уосталом више одговара латинском називу за топологију: analysis situs.

Дефиниција 2.1.1. *Колекција $\mathcal{T}$ подскупова неког непразног скупа X је* ***колекција отворених скупова, или топологија****, ако и само ако важе следећа три услова:*

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(T2) *ако* $U, V \in \mathcal{T}$, *онда* $U \cap V \in \mathcal{T}$,

(T3) *за сваку фамилију* $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ *важи* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Тополошки простор *је пар* $(X, \mathcal{T})$.

Елементе колекције $\mathcal{T}$ називамо *отвореним* скуповима. *Затворени* скупови су комплементи отворених.

[1] Један од разлога је све значајнија теорија топоса.

Теорема 2.1.1. *Колекција $\mathcal{C}$ свих затворених скупова неког тополошког простора $(X, \mathcal{T})$ задовољава следеће услове:*

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,

(C2) *ако* $F, H \in \mathcal{C}$, *онда* $F \cup H \in \mathcal{C}$,

(C3) *за сваку фамилију* $\{F_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}$ *важи* $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

Тополошка структура на неком скупу X може се дефинисати тако што се прво зада колекција $\mathcal{C}$ подскупова од X која задовољава услове (C1), (C2), (C3) и чије елеманте зовемо затворени скупови, а онда се отворени скупови дефинишу као комплементи затворених.

Теорема 2.1.2. *Дати су тополошки простори $\mathcal{X}_1 = (X, \mathcal{T})$, колекцијом $\mathcal{T}$ отворених скупова на X, и $\mathcal{X}_2 = (X, \mathcal{C})$, колекцијом $\mathcal{C}$ затворених скупова на X. Ако за сваки $U \in \mathcal{T}$ и сваки $F \in \mathcal{C}$ важи $U \setminus F \in \mathcal{T}$ и $F \setminus U \in \mathcal{C}$, тада је $\mathcal{T}$ колекција отворених скупова простора $\mathcal{X}_2$, а $\mathcal{C}$ колекција затворених скупова простора $\mathcal{X}_1$.*

Према претходној теореми, тополошки простор се може дефинисати и као тројка $(X, \mathcal{T}, \mathcal{C})$, тако да колекција $\mathcal{T}$ задовољава услове (T1), (T2), (T3) за отворене скупове, а $\mathcal{C}$ услове (C1), (C2), (C3) за затворене скупове, уз додатни услов

$$(+) \qquad \text{ако } U \in \mathcal{T} \text{ и } F \in \mathcal{C}, \text{ тада } U \setminus F \in \mathcal{T} \text{ и } F \setminus U \in \mathcal{C}.$$

Напоменимо да је овакав приступ погодан за интуиционистичко проучавање тополошких простора ([7]), најпре због одвојених дефиниција отворених и затворених скупова (без комплементирања), а затим и због чињенице да се за разлику у $(+)$ може узети релативни комплемент.

Постоји још много начина да се на произвољном скупу дефинише тополошка структура: помоћу оператора затворења, оператора унутрашњости, дефинисањем колекција околина сваке тачке скупа и тако даље.

2.1.2 Топологије на класама

Метатеорија на којој ће бити засновано излагање у овом одељку је NBG[2] теорија скупова у којој се разматрају класе, а која је заправо екстензија ZF теорије скупова. Такође, у овом одељку ћемо, најчешће, великим масним словима: $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \ldots$ означавати класе, а обичним (малим и великим словима): $x, y, z, \ldots, X, Y, Z, \ldots$ скупове. Користићемо и стандардне ознаке: $\mathbf{V}$ за класу свих скупова, ORD за класу свих ординала, CARD за класу свих кардинала, и сл.

Приметимо најпре да се дефиниције и конструкције класичне топологије (на неком скупу) не могу директно пренети на класе. Разлог за то је коришћење скуповне операције комплементирања. Међутим, проблем се може превазићи ако одвојено дефинишемо

[2]Фон Нојман-Бернајс-Гедел

класу отворених и класу затворених подскупова простора, инспирисани теоремом 2.1.2 класичне топологије. Мијајловић и Ћирић у [7, 8] уводе појам тополошке структуре на правим класама следећом дефиницијом.

Дефиниција 2.1.2. *Нека су* $\mathbf{X}$, $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{C}$ *класе. Тројка* $(\mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ *је* ***тополошки класа-простор*** *ако и само ако важе следећи услови:*

(KT1) *ако* $u, v \in \mathbf{T}$, *онда* $u \cap v \in \mathbf{T}$;

(KT2) *за сваки скуп* i *и сваку фамилију* $\{u_j : j \in i\}$, *ако за сваки* $j \in i$, $u_j \in \mathbf{T}$, *онда и* $\bigcup_{j \in i} u_j \in \mathbf{T}$;

(KT3) *за сваки* $x \in \mathbf{X}$ *постоји* $u \in \mathbf{T}$, *такав да* $x \in u$;

(KT4) *ако* $u \in \mathbf{T}$ *и* $a \in \mathbf{C}$, *онда* $u \setminus a \in \mathbf{T}$;

(KC1) *ако* $a, b \in \mathbf{C}$, *онда* $a \cup b \in \mathbf{C}$;

(KC2) *за сваки скуп* i *и сваку фамилију* $\{a_j : j \in i\}$, *ако за сваки* $j \in i$, $a_j \in \mathbf{C}$, *онда и* $\bigcap_{j \in i} a_j \in \mathbf{C}$;

(KC3) *за сваки скуп* x, *такав да је* $x \subset \mathbf{X}$, *постоји* $a \in \mathbf{C}$, *такав да је* $x \subseteq a$;

(KC4) *ако* $u \in \mathbf{T}$ *и* $a \in \mathbf{C}$, *онда* $a \setminus u \in \mathbf{C}$.

Примери. 1. Дискретан класа-простор на $\mathbf{V}$: $(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})$.

2. За сваки ординал α, нека је τ_α скуп свих отворених, а σ_α свих затворених подскупова од α у односу на топологију уређења на α. Како је за $\alpha < \beta$, $\tau_\alpha \subseteq \tau_\beta$ и $\sigma_\alpha \subseteq \sigma_\beta$, лако се види да је за $\mathbf{T} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ORD}} \tau_\alpha$ и $\mathbf{C} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ORD}} \sigma_\alpha$, $(\mathbf{ORD}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ тополошки класа-простор. Тополошки класа-простор на класи $\mathbf{CARD}$, дефинише се на потпуно аналоган начин.

3. Нека је на скупу x дефинисан обичан тополошки простор, у коме је τ_x колекција свих отворених, а σ_x колекција свих затворених скупова. За произвољну класу $\mathbf{X}$, нека је $\mathbf{T} = \{u : u \subseteq \mathbf{X}, x \cap u \in \tau_x\}$ и $\mathbf{C} = \{a : a \subseteq \mathbf{X}, x \cap a \in \sigma_x\}$. Тада је $(\mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ тополошки класа-простор.

Аналогно последњем примеру, лако се показује да је, за сваки тополошки класа-простор $(\mathbf{X}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ и сваки скуп $x \in \mathbf{X}$, $(x, \mathbf{T} \restriction x, \mathbf{C} \restriction x)$ обичан тополошки простор, при чему је $\mathbf{T} \restriction x = \{y \cap x : y \in \mathbf{T}\}$ и $\mathbf{C} \restriction x = \{y \cap x : y \in \mathbf{C}\}$; важи и $\mathbf{T} = \bigcup_{x \subseteq \mathbf{X}} \mathbf{T} \restriction x$ $\mathbf{C} = \bigcup_{x \subseteq \mathbf{X}} \mathbf{C} \restriction x$.

2.1.3 Нека уопштења тополошких простора

Ако је X произвољан скуп, а $\mathcal{T}$ и $\mathcal{C}$ колекције подскупова од X које задовољавају својства (KT1)- (KC4) дефиниције 2.1.2, није тешко видети да тројка $(X, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ одређује један тополошки простор у класичном смислу.

Пример 1. Нека је на скупу $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ задат тополошки простор, при чему је $\mathcal{T}_X$ колекција отворених, а $\mathcal{C}_X$ колекција затворених скупова. Дефинишимо, индуктивно,

један низ тополошкип простора, стављајући да је:
$X_0 = A, \mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_X, \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_X,$
$X_1 = A \cup \{n+1\}, \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 \cup \{X_1\}, \mathcal{C}_1 = \{X_1 \setminus U : U \in \mathcal{T}_1\},$
$X_2 = X_1 \cup \{n+2\}, \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \cup \{X_2\}, \mathcal{C}_2 = \{X_2 \setminus U : U \in \mathcal{T}_2\},$
$\vdots$
Нека је $\mathcal{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$, $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$; очигледно је $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Није тешко доказати да важе следећа тврђења:

1. ако $U, V \in \mathcal{T}$, онда $U \cap V \in \mathcal{T}$;
2. за сваки коначан скуп I и сваку фамилију U_i, $i \in I$, ако $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, онда и $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;
3. за свако $x \in \mathbb{N}$ постоји $U \in \mathcal{T}$ да је $x \in U$;
4. ако $U \in \mathcal{T}$ и $F \in \mathcal{C}$, онда $U \setminus F \in \mathcal{T}$;
5. ако $F, H \in \mathcal{C}$, онда $F \cup H \in \mathcal{C}$;
6. за сваки скуп I и сваку фамилију $F_i, i \in I$, ако $F_i \in \mathcal{C}, i \in I$, онда и $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{C}$;
7. за сваки коначан подскуп K скупа $\mathbb{N}$ постоји $F \in \mathcal{C}$ такав да је $K \subseteq F$;
8. ако $U \in \mathcal{T}$ и $F \in \mathcal{C}$, онда $F \setminus U \in \mathcal{C}$. □

Дакле, тројка $(\mathbb{N}, \mathcal{T}, \mathcal{C})$, дефинисана у претходном примеру, има особине потпуно сличне оним које су узете за дефиницију тополошких класа-простора. Другим речима, оправдано је $(\mathbb{N}, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ сматрати неком врстом тополошког простора, иако, у смислу класичне дефиниције, он то није. Иначе, потпуно аналогно, може се дефинисати доста сличних структура са поменутим особинама. Наиме, нека је $(X, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ било који тополошки простор у класичном смислу и нека $|X| = \kappa$; можемо узети да је $X = \kappa$. Одговарајућа[3] тројка $(\kappa + \omega, \mathcal{T}_{\kappa+\omega}, \Sigma_{\kappa+\omega})$ задовољава услове 1. – 8., при чему уместо речи „коначан" може да стоји „кардиналности $< \kappa$".

Дефиниција 2.1.3. *Тројка $(X, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ је λ-тополошки простор, $\lambda \in \mathrm{CARD}$, ако и само ако важе следећи услови:*

1. *ако $U, V \in \mathcal{T}$, онда $U \cap V \in \mathcal{T}$;*
2. *за сваки скуп I кардиналности мање од λ и сваку фамилију U_i, $i \in I$, ако $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, онда и $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;*
3. *за свако $x \in X$ постоји $U \in \mathcal{T}$ да је $x \in U$;*
4. *ако $U \in \mathcal{T}$ и $F \in \mathcal{C}$, онда $U \setminus F \in \mathcal{T}$;*
5. *ако $F, H \in \mathcal{C}$, онда $F \cup H \in \mathcal{C}$;*

[3] стављајући да је: $(\kappa+1, \mathcal{T}_{\kappa+1}, \mathcal{C}_{\kappa+1})$, где је $\mathcal{T}_{\kappa+1} = \mathcal{T} \cup \{\kappa+1\}$ и $\mathcal{C}_{\kappa+1} = \{\kappa+1 \setminus U \mid U \in \mathcal{T}_{\kappa+1}\}, \ldots$

6. *за сваки скуп I и сваку фамилију F_i, $i \in I$, ако $F_i \in \mathcal{C}$, $i \in I$, онда и $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$;*

7. *за сваки подскуп K скупа X кардиналности мање од λ постоји $F \in \mathcal{C}$ такав да је $K \subseteq F$;*

8. *ако $U \in \mathcal{T}$ и $F \in \mathcal{C}$, онда $F \setminus U \in \mathcal{C}$.*

*$(X, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ је **слаб тополошки простор** ако је $|X|$-тополошки простор.*

Наведимо неколико примера ω-тополошких простора.

Пример 2. Нека је X произвољан скуп и $\mathcal{P}_{<\omega}(X)$ колекција свих коначних подскупова од X. Ако је $\mathcal{T}$ било која T_1-топологија[4] на X, тада је $(X, \mathcal{T}, \mathcal{P}_{<\omega}(X))$ један ω-тополошки простор. Приметимо да је и $(X, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ један ω-тополошки простор, где је $\mathcal{C}$ било која колекција коначних подкупова од X која је затворена за коначне уније и пресеке и покрива све коначне подскупове: за сваки коначан подскуп $K \subset X$, постоји $C \in \mathcal{C}$ такав да је $K \subseteq C$. □

Пример 3. Нека је $\mathcal{C}$ било која колекција подкупова од X која је затворена за коначне уније и произвољне пресеке и покрива све коначне подскупове. Ако је $\mathcal{T} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{C}\}$, тада је $(X, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ један ω-тополошки простор, што је лако показати имајући у виду скуповне једнакости: $F_1 \setminus (X \setminus F_2) = F_1 \cap F_2$, $(X \setminus F_1) \setminus F_2 = X \setminus (F_1 \cup F_2), \ldots$ □

Пример 4. Нека колекцију $\mathcal{C}$ чине празан скуп и коначне уније затворених интервала са рационалним крајевима (укључујући и синглтоне као затворене интервале $[a, a]$, $a \in \mathbb{Q}$), а колекцију $\mathcal{T}$ коначне уније отворених интервала са рационалним крајевима. Тада су $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ ω-тополошки простори. □

Пример 5. Нека је на затвореном интервалу $[0, 1]$ задата Лебегова мера. Ако је $\mathcal{C}$ колекција свих скупова мере 0 („скоро немогућих догађаја"), а $\mathcal{T}$ колекција свих скупова мере 1 („скоро сигурних догађаја"), тада је $([0, 1], \mathcal{T}, \mathcal{C})$ ω-тополошки простор. □

Велики број тврђења о тополошким просторима најчешће се формулише и доказује на „језику околина". Другим речима, објекти са којима најчешће радимо су парови (U, x): *тачка x и отворена околина U („место" око) тачке x*; често се и саме тополошке структуре дефинишу тако што се свакој тачки простора придружи колекција њених околина. Такође, како су разне колекције отворених скупова које посматрамо при проучавању неког тополошког простора индексиране тачкама самог простора, сваком подскупу A датог простора одговара на неки начин изабрана колекција отворених скупова $\{U_a : a \in A\}$, а тиме и *околина* $\bigcup_{a \in A} U_a$ скупа A. Чињеница да сваки подскуп простора има неку своју околину захтева да топологије буду доста богате колекције скупова. Слично ствари стоје и са затворењем неког скупа: *сваки подскуп има своје затворење, тј. постоји затворен скуп који га садржи.* Другим речима, колекције отворених и затворених скупова морају да покрију читав партитивни скуп датог простора који је много „компликованији" од посматраног скупа тачака. Слабљење ових захтева доводи нас управо до уведених слабих тополошких простора, у којима, такође, свака тачка има своју околину, док околине и затворења имају само неки скупови (*кардиналности* $< \lambda$). Слободније речено, слаби тополошки простори, можда боље

[4]Тополошки простор над X је T_1 ако су сви синглтони $\{x\}$, $x \in X$, па тиме и сви коначни скупови, затворени.

од уобичајених, осликавају „локалне" карактеристике неког скупа тачака. Ове идеје можемо и даље уопштавати. Наиме, пре него што дефинишемо тополошку структуру на неком скупу X можемо се најпре определити за коју (какву) колекцију $\mathcal{K}$ подскупова од X су нам потребне околине и затворења, односно, којим скуповима можемо индексирати колекције отворених скупова; у случају λ-тополошких простора $\mathcal{K} = \{A \subseteq X : |A| < \lambda\}$.

Пример 6. Слично примеру 4, нека је $\mathcal{C}$ колекција коју чине празан скуп и коначне уније затворених реалних интервала и $\mathcal{T}$ колекција коју чине коначне уније отворених реалних интервала. Тада је $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \mathcal{C})$ један ω-тополошки простори. Међутим, овој простор задовољавајa и следеће две особине:

- за сваки *ограничен* скуп $I \subset \mathbb{R}$ и сваку фамилију U_i, $i \in I$, ако $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, онда и $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
- за сваки *ограничен* подскуп $K \subset \mathbb{R}$ постоји $F \in \mathcal{C}$ такав да је $K \subseteq F$.

Дакле, у овом случају за колекцију $\mathcal{K}$ можемо узети колекцију ограничених подскупова. □

2.2 ТОПОЛОШКЕ ЛОГИКЕ

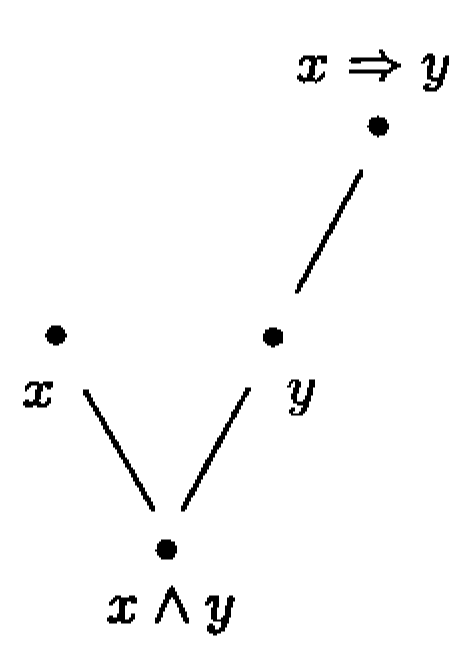
Поред почетне амбиције да се обједине сродни резултати анализе, геометрије, логике и алгебре, тополошке структуре су се појавиле у многим научним областима, укључујући информатику и рачунарство, на пример. Пре него изложимо разне логичке системе погодне за проучавање тополошких структура, поменућемо неколико карактеристичних појављивања тополошких простора у логици.

2.2.1 Тополошка семантика неких некласичних логика

Стон и Тарски су први приметили да алгебра отворених скупова није Булова, већ да се понаша по правилима интуиционистичке исказне логике. Пошто је таква правила први формулисао, већ поменути интуициониста, Хејтинг, одговарајућа алгебра се назива Хејтинговом.

Хејтингова алгебра (или Брауерова мрежа) је ограничена мрежа, са 0 и 1, таква да за сваки пар елемената x, y постоји степен y^x, или како се чешће означава $x \Rightarrow y$, и важи:

$$z \leqslant (x \Rightarrow y) \text{ акко } z \wedge x \leqslant y.$$



Колекција свих отворених скупова $\mathcal{T}$, неког тополошког простора, образује Хејтингову алгебру: $(\mathcal{T}, \subseteq)$ је ограничена мрежа, а за свака два отворена скупа U и V, $U \Rightarrow V$ се дефинише као унија $\bigcup_i W_i$ свих отворених скупова W_i таквих да је $W_i \cap U \subseteq V$.

Теорема 2.2.1. *За произвољне елементе x, y, z неке Хејтингове алгебре важи:*

(H1) $(x \Rightarrow x) = 1$,

(H2) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$, $y \wedge (x \Rightarrow y) = y$,

(H3) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

Обрнуто, ако бинарна операција $\Rightarrow$ неке ограничене (са 0 и 1) мреже L задовољава услове (H1)-(H3), онда је та мрежа Хејтингова алгебра са импликацијом $\Rightarrow$.

Поменимо да се негација у Хејтингову алгебру уводи са: $\neg x \overset{\text{def}}{=} (x \Rightarrow 0)$.

Тополошка семантика интуиционистичке логике

Под тополошким моделом интуиционистичке логике можемо сматрати свако пресликавање f које скуп исказних слова пресликава у колекцију отворених скупова неког тополошког простора $(X, \mathcal{T})$. Свако овакво пресликавање проширујемо на скуп свих формула на следећи начин:

- $f^+(\neg\varphi) = \text{int}(X \setminus f^+(\varphi))$,
- $f^+(\varphi \wedge \psi) = f^+(\varphi) \cap f^+(\psi)$,
- $f^+(\varphi \to \psi) = \text{int}((X \setminus f^+(\varphi)) \cup f^+(\psi))$.

Формула φ важи у моделу f, у ознаци $f \models \varphi$, ако и само ако је $f^+(\varphi) = X$. Није тешко показати да је систем аксиома $(I1) - (I7)$ са правилом MP, дат у пододељку 1.2.2, потпун у односу на уведену класу тополошких модела.

Тополошка семантика модалне логике

Слично, може се дати и тополошка семантика модалне логике. Под тополошким моделом модалне логике можемо сматрати свако пресликавање f које скуп исказних слова пресликава у колекцију свих подскупова од X неког тополошког простора. Свако овакво пресликавање проширујемо на скуп свих формула на следећи начин:

- $f^+(\neg\varphi) = X \setminus f^+(\varphi)$,
- $f^+(\varphi \to \psi) = (X \setminus f^+(\varphi) \cup f^+(\psi))$,
- $f^+\Box\varphi = \text{int}(f^+(\varphi))$,

и при томе $f \models \varphi$ ако и само ако је $f^+(\varphi) = X$. Систем аксиома $(M1) - (M6)$ са правилила MP и N, дат у пододељку 1.2.3, је потпун у односу на уведену класу тополошких модела.

2.2.2 Тополошке логике $L^{\mathrm{top}}_{\mathrm{mon}}$, L^{top} и $L(I^n)$

Под *тополошком структуром*, у овом одељку, подразумеваћемо пар $(\mathcal{M},\mathcal{T})$, где је $\mathcal{M}$ нека (операцијско-релацијска) структура првог реда, а $\mathcal{T}$ топологија на домену M. Примери овакних структура су класични тополошки простор, тополошке групе, тополошка поља и тако даље. Напоменимо да, у општем случају, нећемо претпостављати да су релације и операције структуре $\mathcal{M}$ на било какав начин сагласне са топологијом $\mathcal{T}$.

Постоји више формалних језика погодних за проучавање тополошких структура. Један од њих је језик логике L_{mon}, што је природно, будући да су отворени скупови објекти другог реда. Значење формула у тополошким структурама је очигледно: скуповне променљиве узимају вредности у $\mathcal{T}$. Монадску логику интерпретирану у тополошким структурама означаваћемо са $L^{\mathrm{top}}_{\mathrm{mon}}$.

На пример, ако је φ_{haus} формула:

$$\forall x\forall y(\neg x = y \to \exists X\exists Y(Xx \wedge Yy \wedge \forall z\neg(Xz \wedge Yz))),$$

а $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ тополошка структура, тада важи:

$$(\mathcal{M},\mathcal{T}) \models \varphi_{\mathrm{haus}} \text{ акко „}\mathcal{T}\text{ је Хауздорфова топологија“.}$$

Слично, многи тополошки појмови (регуларност, нормалност, повезаност,...) изразиви су у овом језику.

Како је већ на почетку наглашено, за логику L_{mon}, интерпретирану на слабим структурама, могу се доказати основне модел-теоретске теореме: потпуности, компактности, као и Левенхајм-Сколемова теорема. Међутим, то не важи ако се ограничимо само на тополошке структуре: ако је φ_{disc} реченица $\forall x\exists X\forall y(Xy \leftrightarrow y = x)$, тада за сваку тополошку структуру $(\mathcal{M},\mathcal{T})$, важи:

$$\begin{aligned}(\mathcal{M},\mathcal{T}) \models \varphi_{\mathrm{disc}} \quad &\text{акко} \quad \text{„}\mathcal{T}\text{ је дискретна топологија на } M\text{“}\\ &\text{акко} \quad \mathcal{T} = \mathcal{P}(M),\end{aligned}$$

па ако се ограничимо само на тополошке структуре, у оквиру добијене логике можемо добити и пуну монадску логику, за коју не важе поменуте теореме. Иначе, кажемо да је $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ пребројив, ако је $\mathcal{M}$ пребројив и $\mathcal{T}$ има пребројиву базу.

Такође, не постоји реченица φ таква да је:

$$(\mathcal{M},\mathcal{T}) \models \varphi \text{ акко „}\mathcal{T}\text{ је топологија на } M\text{“.}$$

Поменимо да је „бити тополошка база“ изразиво у овој логици: ако је φ_{bas} формула

$$\forall x\exists X\, Xx \wedge \forall x\forall X\forall Y(Xx \wedge Yx \to \exists Z(Zx \wedge \forall z(Zz \to (Xz \wedge Yz)))),$$

тада важи:

$$(\mathcal{M},\mathcal{B}) \models \varphi_{\mathrm{bas}} \text{ акко „}\mathcal{B}\text{ је тополошка база на } M\text{“.}$$

Да би се избегли наведени недостатаци, уводи се логика L^{top} ([4, 15]), која је слабија од $L^{\mathrm{top}}_{\mathrm{mon}}$, али за коју важе основне модел-теоретске теореме уколико се интерпретира само тополошким структурама. Формуле логике L^{top} граде са на истом језику, с тим што су дозвољена само квантификовања скуповним променљивим следећег облика:

- ако је t терм и φ позитивна по X[5], тада је $\forall X(Xt \to \varphi)$, или $\forall X \ni t\varphi$, формула,
- ако је t терм и φ негативна по X, тада је $\exists X(Xt \to \varphi)$, или $\exists X \ni t\varphi$, формула.

Интуитивно, у овој логици дозвољено је само квантификовање по довољно „малим" околинама тачака.

Пример 1. Ако је φ'_{haus} формула

$$\forall x \forall y(x = y \vee \exists X \ni x \exists Y \ni y \forall z \neg(Xz \wedge Yz)),$$

тада важи

$$(\mathcal{M}, \mathcal{T}) \models \varphi'_{\text{haus}} \text{ акко } \mathcal{T} \text{ је Хауздорфова топологија.}$$

□

Пример 2. Нека је F функцијски симбол арности n, и φ_f формула

$$\begin{aligned}\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall Y \ni f(x_1, \ldots, x_n) \ & \exists X_1 \ni x_1 \ldots \exists X_n \ni x_n \\ & \forall y_1 \ldots \forall y_n (X_1 y_1 \wedge \ldots \wedge X_n y_n \to Y f(y_1, \ldots, y_n)),\end{aligned}$$

тада важи:

$$((M, F^{\mathcal{M}}, \ldots), \mathcal{T}) \models \varphi_f \quad \text{акко} \quad F^{\mathcal{M}} : M^n \to M \text{ је непрекидно}$$
$$\text{(на } M^n \text{ је топологија производа).} \quad \square$$

За логику L^{top} се могу доказати теорема компактности и Левенхајм-Сколемова теорема, [4, 15][6]. Доказ се заснива на чињеници да су реченице логике L^{top} дефинисане тако да буду *инваријантне* у односу на тополошке базе: Ако је φ реченица и $\mathcal{B}$ база топологије $\mathcal{T}$ тада важи:

$$(\mathcal{M}, \mathcal{T}) \models \varphi \text{ акко } (\mathcal{M}, \mathcal{B}) \models \varphi.$$

Доказ није тешко спровести индукцијом по сложености формуле. Кључно тврђење за важење основних модел-теоретских теорема.

Теорема 2.2.2. *Скуп реченица T логике L^{top} има тополошки модел ако и само ако $T \cup \{\varphi'_{\text{bas}}\}$ има слаб модел.*

Поменимо и логику $L(I^n)_{n \geqslant 1}$, која је проширење класичног предикатског рачуна листом нових квантификатора за оператор унутрашњости. Поред уобичајених формула класичног предикатског рачуна овде имамо и формуле облика: $I^n x_1 \ldots x_n \varphi$, при чему је:

$$(\mathcal{M}, \mathcal{T}) \models I^n x_1 \ldots x_n \varphi(\vec{x}, \vec{y})[\vec{a}, \vec{b}] \text{ акко } \vec{a} \in \text{int}_{\mathcal{T}}\{\vec{c} \in M^n : (\mathcal{M}, \mathcal{T}) \models \varphi(\vec{c}, \vec{b})\}.$$

На пример,

$$(\mathcal{M}, \mathcal{T}) \models \forall x \forall y(x = y \vee I^2 xy \neg x = y) \text{ акко } \mathcal{T} \text{ је Хауздорфова топологија.}$$

[5] видети пододељак 1.1.3

[6] такође се показује да је ова логика уједно и максимална таква

Може се показати да је $L(I^n)_{n\geqslant 1} < L^{\mathrm{top}} < L^{\mathrm{top}}_{\mathrm{mon}}$ ([4, 15]). На пример, да је $L(I^n)_{n\geqslant 1} < L^{\mathrm{top}}$ следи из чињенице да се формула $I^n x_1 \dots x_n \varphi$ може изразити у L^{top} са

$$\exists X_1 \ni x_1 \dots \exists X_n \ni x_n \forall x_1 \dots \forall x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} X_i x_i \to \varphi \right),$$

и чињенице да својство „бити регуларан тополошки простор" није изразиво у $L(I^n)_{n\geqslant 1}$, док у L^{top} јесте.

За развој тополошких логика најзаслужнији су Флум и Зајглер. Поменимо да су они разматрали и $L^{\mathrm{top}}_{\omega_1\omega}$. Такође, разматране су логике разних специјалних тополошких простора, као што су униформни простори, инфинитезимални простори, ...

2.2.3 Тополошка логика $L(O)$

Тополошка класа-логика коју ћемо увести у наредном одељку, је слична логици $L(O)$, коју је разматрао Сгро у [52]. С друге стране, логика $L(O)$ је доста слична логици $L(Q_1)$, са уопштеним квантификатором „постоји непребројиво много". Тако, скуп формула логике $L(O)$ генерисан је правилима која, поред стандардних, садрже и следеће правило: ако је φ формула и x променљива, $Ox\psi(x)$ је формула, при чему је x везана променљива у овој формули. Интерпретација формуле $Ox\varphi$ у тополошкој структури $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ за валуацију $\nu : \mathrm{Var} \to M$ дефинисана је тако да:

$$\mathcal{M} \models Ox\varphi[\nu] \text{ акко } \{b \in M : (\mathcal{M}, \mathcal{T}) \models \varphi[\nu(b/x)]\} \in \mathcal{T},$$

где је $\nu(b/x)$ валуација која свим променљивим додељује исте вредности као и валуација ν, осим променљивој x којој додељује вредност b. Потпуност је доказана за аксиоматски систем који је проширење Кислеровог аксиоматског система за $L(Q_1)$ следећим схема-аксиомама:

1. $Ox\, x = x$;
2. $Ox\, x \neq x$;
3. $Ox\varphi \wedge Ox\psi \to Ox(\varphi \wedge \psi)$;
4. $\forall y Ox\varphi \to Ox\exists y\varphi$.

Теорема 2.2.3. ([52]) *Скуп реченица T, логике $L(O)$, је непротивречан ако и само ако T има тополошки модел.*

Главни проблем у конструкцији тополошког модела је како обезбедити да интерпретација новог квантора буде затворена за произвољне уније. Кључни корак конструкције, којим се ово постиже, је додавање тачака дефинабилним скуповима који нису отворени тако да они не буду уније отворених скупова. Овај корак конструкције је базиран на једноставном тврђењу: *Ако је $Y \subseteq X$ и Y није отворен скуп простора $(X, \mathcal{T})$, тада постоји тачка $c \in Y$ таква да за сваки отворен скуп $U \subseteq Y$ имамо да $c \notin U$.* Такође, показане су и теорема компактности и Левенхајм-Сколемова теорема.

Поменимо да је квантор Q_1 компатибилан са квантором O, у смислу да се теорема потпуности може показати и за логику $L(Q_1, O)$, при чему је аксиоматски систем последње логике унија аксиома за $L(Q_1)$ и $L(O)$.

Теорема потпуности показана је и за логику $L_{\omega_1\omega}(O)$, где је скуп аксиома за логике $L_{\omega_1\omega}$ и $L(O)$ проширен са:

- $\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi} Ox\varphi \to Ox\bigvee\Phi$,

за сваки скуп формула Φ са коначно много слободних променљивих.

Иако је $L(O)$ слабија од $L(I^1)$, њене „добре" особине чине је веома значајном у применама тополошких логика.

2.2.4 Тополошка класа-логика $L_{\mathcal{A}}(O, C)$

Синтакса

Нека је $\mathcal{A}$ пребројив допустив скуп (видети [3]) који садржи све објекте потребне у наредним конструкцијама: скуп ω, формуле, скупове формула и тако даље. Тополошка класа-логика $L_{\mathcal{A}}(O, C)$ је инфинитарна логика добијена из $L_{\mathcal{A}} = L_{\omega_1\omega} \cap A$ додавањем квантификатора O и C. Тако, скуп формула логике $L_{\mathcal{A}}(O, C)$ је најмањи скуп који садржи све атомичне формуле и затворен је за негацију $(\neg)$, квантификаторе $(\forall)$, $(\exists)$, (O), (C) и пребројиве бесконачне конјункције $(\bigwedge)$, тј. ако је Φ скуп формула са коначно много слободних променљивих и $\Phi \in \mathcal{A}$, тада је $\bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi$ формула. За сваки природан број n нека је $\Phi_n = \{\varphi \in \Phi \,:\, \varphi \text{ је формула логике } L_{\mathcal{A}}(O, C) \text{ са } n+1 \text{ слободних променљивих}\}$ тако да $\Phi_n \in \mathcal{A}$; очигледно је $\Phi = \bigcup\limits_n \Phi_n$.

Семантика

Дефиниција 2.2.1. ***Слаб модел*** *за $L_{\mathcal{A}}(O, C)$ је структура $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$, где је $\mathcal{K}$ модел првог реда на језику L чији је универзум $\mathbf{K}$ класа, а $\mathbf{T}$ и $\mathbf{C}$ су класе подскупова од K.*

Средњи модел *за $L_{\mathcal{A}}(O, C)$ је слаб модел $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$, такав да важи:*

i) за сваки $x \in \mathbf{K}$ постоји $U \in \mathbf{T}$ такав да $x \in U$,

ii) за сваки подскуп $X \subseteq \mathbf{K}$ постоји $F \in \mathbf{C}$ такав да $X \subseteq F$,

iii) за све $U \in \mathbf{T}$ и $F \in \mathbf{C}$, $U \setminus F \in \mathbf{T}$ и $F \setminus U \in \mathbf{C}$.

Тополошки класа модел *за $L_{\mathcal{A}}(O, C)$ је слаб модел $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ који је тополошки класа-простор.*

Релација задовољења $\models$ дефинисана је на уобичајен начин, тј.

$$(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models Ox\varphi[b_1, \ldots, b_n] \text{ акко } \{a \,:\, (\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models \varphi[a, b_1, \ldots, b_n]\} \in \mathbf{T},$$

$$(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models Cx\varphi[b_1, \ldots, b_n] \text{ акко } \{a \,:\, (\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models \varphi[a, b_1, \ldots, b_n]\} \in \mathbf{C}.$$

Аксиоматски систем

Скуп ваљаних формула у односу на тополошке класа-моделе може бити окарактерисан следећим сагласним и потпуним скупом схема аксиома:

1. Све аксиоме за $L_{\mathcal{A}}$;
2. $\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (Ox\varphi \leftrightarrow Ox\psi)$; $\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (Cx\varphi \leftrightarrow Cx\psi)$;
3. $Ox\varphi(x) \to Oy\varphi(y)$; $Cx\varphi(x) \to Cy\varphi(y)$;
4. $Ox(x \neq x)$; $Cx(x \neq x)$;
5. $Ox\varphi \wedge Ox\psi \to Ox(\varphi \wedge \psi)$; $Cx\varphi \wedge Cx\psi \to Cx(\varphi \vee \psi)$;
6. $Ox\varphi \wedge Cx\psi \to Ox(\varphi \wedge \neg\psi)$; $Ox\varphi \wedge Cx\psi \to Cx(\neg\varphi \wedge \psi)$;
7. $\forall y Ox\varphi(x,y) \to Ox\exists y\varphi(x,y)$; $\forall y Cx\varphi(x,y) \to Cx\forall y\varphi(x,y)$;
8. $\bigwedge_{\varphi\in\Phi} Ox\varphi \to Ox\bigvee\Phi$; $\bigwedge_{\varphi\in\Phi} Cx\varphi \to Cx\bigwedge\Phi$;
9. $\forall x \bigvee_{n} \bigvee_{\varphi\in\Phi_n} \exists y_1 \ldots \exists y_n(Oz\varphi(z, y_1, \ldots, y_n) \wedge \varphi(x, y_1, \ldots, y_n))$;
10. $\bigwedge_{n} \bigwedge_{\varphi\in\Phi_n} \forall x_1 \ldots \forall x_n \bigvee_{m} \bigvee_{\psi\in\Phi_m} \exists y_1, \ldots, \exists y_m$ $(Cz\psi(z, y_1, \ldots, y_m) \wedge \forall x(\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \psi(x, y_1, \ldots, y_m)))$;

и правила извођења:

1. из φ и $\varphi \to \psi$, закључујемо ψ;
2. из $\varphi \to \psi$, за све $\psi \in \Psi$, закључујемо $\varphi \to \bigwedge_{\psi\in\Psi} \psi$;
3. из φ, закључујемо $\forall x\varphi$, при чему x није слободно у φ.

Изложени аксиоматски систем за $L_{\mathcal{A}}(O, C)$, прилагођен тополошким класа-просторима, сличан је логици $L(O)$ за класичне тополошке просторе о којој је били речи у претходном пододељку [52], при чему су сада додате аксиоме које изражавају својства топологија на правим класама [8].

Потпуност

Аксиоматски систем за $L_{\mathcal{A}}(O, C)$ је сагласан будући да све аксиоме представљају неопходна особине топологије на правим класама. Доказаћемо да је овај систем и потпун у односу на класу тополошких класа-модела, комбинујући Кислеров доказ слабе теореме потпуности [25], конструкцију Сгроа у [52] и конструкцију јаког модела помоћу средњег [9, 47].

Нека је T непротивречан, Σ-дефинабилан над $\mathcal{A}$, скуп реченица из $L_{\mathcal{A}}(O, C)$. За сваку формулу $\theta(x, y_1, \ldots, y_n)$ са θ^O и θ^C означимо следеће реченице:

$$(O) \qquad \theta^O \text{ je } \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x(\neg Oz\theta(z, y_1, \ldots, y_n) \to \bigwedge_{m} \bigwedge_{\chi\in\Phi_m} \theta^O_\chi(x, y_1, \ldots, y_n))$$

при чему је $\theta^O_\chi(x, y_1, \ldots, y_n)$ формула

$$\begin{aligned} \forall z_1 \ldots \forall z_m((Oz\chi(z, z_1, \ldots, z_m) \quad &\wedge \quad \forall z(\chi(z, z_1, \ldots, z_m) \rightarrow \theta(z, y_1, \ldots, y_n))) \\ &\rightarrow \quad (\theta(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge \neg\chi(x, z_1, \ldots, z_m))); \end{aligned}$$

$$(C) \qquad \theta^C \text{ је } \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x(\neg Cz\theta(z, y_1, \ldots, y_n) \rightarrow \bigvee_m \bigvee_{\chi\in\Phi_m} \theta^C_\chi(x, y_1, \ldots, y_n))$$

при чему је $\theta^C_\chi(x, y_1, \ldots, y_n)$ формула

$$\begin{aligned} \forall z_1 \ldots \forall z_m((Cz\chi(z, z_1, \ldots, z_m) \quad &\wedge \quad \forall z(\theta(z, y_1, \ldots, y_n) \rightarrow \chi(z, z_1, \ldots, z_m))) \\ &\rightarrow \quad (\neg\theta(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge \chi(x, z_1, \ldots, z_m))). \end{aligned}$$

Тако, $\theta^O_\chi(x, y_1, \ldots, y_n)$ је скуп свих x који су у θ а нису ни у ком отвореном подскупу од θ дефинисаном помоћу χ преко параметара, док θ^O значи да за произвољне параметре, ако θ није отворен, тада он није једнак никаквој унији отворених скупова дефинабилних у $L_{\mathcal{A}}(O, C)$. Слично, $\theta^C_\chi(x, y_1, \ldots, y_n)$ је скуп свих x који припадају затвореном скупу θ дефинисаном помоћу χ преко параметара, док θ^C значи да за произвољне параметре, ако θ није затворен, тада он није пресек затворених скупова дефинабилних у $L_{\mathcal{A}}(O, C)$.

Скуп реченица $\Gamma = T \cup \{\theta^O, \theta^C : \theta \text{ је формула у } L_{\mathcal{A}}(O, C)\}$ је непротивречан у $L_{\mathcal{A}}(O, C)$ будући да важе:

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \bigwedge_m \bigwedge_{\chi\in\Phi_m} Ox\theta^O_\chi(x, y_1, \ldots, y_n)\text{, према } (O),$$

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n Ox \bigvee_m \bigvee_{\chi\in\Phi_m} \theta^O_\chi(x, y_1, \ldots, y_n)\text{, према аксиоми}(8),$$

па важи и θ^O; и, слично, из

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \bigwedge_m \bigwedge_{\chi\in\Phi_m} Cx\theta^C_\chi(x, y_1, \ldots, y_n)\text{, према } (C),$$

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n Cx \bigwedge_m \bigwedge_{\chi\in\Phi_m} \theta^C_\chi(x, y_1, \ldots, y_n)\text{, према аксиоми } (8),$$

следи θ^C.

Важно је приметити следеће: ако је $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ неки тополошки класа модел, домен $\mathbf{K}$ је права класа ако и само ако $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models \neg Oxx = x$. Какав је статус формуле $Oxx = x$?

Нека је $\theta(x)$ формула $x = x$ и θ^O одговарајућа реченица за формулу $\theta(x)$ дата са (O). Ако важи $\vdash \neg Oxx = x$, тада је θ^O еквивалентно формули $\exists x \bigwedge_m \bigwedge_{\chi\in\Phi_m} \theta^O_\chi(x)$, где је $\theta^O_\chi(x)$ формула

$$\begin{aligned} \forall z_1 \ldots \forall z_m((Oz\chi(z, z_1, \ldots, z_m) \quad &\wedge \quad \forall z(\chi(z, z_1, \ldots, z_m) \rightarrow z = z)) \\ &\rightarrow \quad (x = x \wedge \neg\chi(x, z_1, \ldots, z_m))) \end{aligned}$$

тј.

$$\forall z_1 \ldots \forall z_m(Oz\chi(z, z_1, \ldots, z_m) \rightarrow \neg\chi(x, z_1, \ldots, z_m)).$$

Дакле, θ^O је еквивалентно формули

$$\exists x \bigwedge_m \bigwedge_{\chi\in\Phi_m} \forall z_1 \ldots \forall z_m (Oz\chi(z, z_1, \ldots, z_m) \to \neg\chi(x, z_1, \ldots, z_m)),$$

која је контрадикторна аксиоми 9.

Према томе, ако $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models Oxx = x$, тада је домен $\mathbf{K}$ скуп, тј. структура $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ је заправно скуповна, али са особинама тополошких класа простора.

Користећи Кислеров доказ теореме слабе потпуности [25] (Лема 2.3.), добијамо слаб скуповни модел $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ теорије Γ, при чему су $\mathbf{T}$ и $\mathbf{C}$ скупови $L_{\mathcal{A}}(O, C)$-дефинабилних скупова са параметрима у скупу $\mathbf{K}$, тако да важи:

(Б1) за сваки $x \in \mathbf{K}$ постоји $U \in \mathbf{T}$ такав да $a \in U$ (према аксиоми 9),

(Б2) за сваки $L_{\mathcal{A}}(O, C)$-дефинабилан подскуп $X \subseteq \mathbf{K}$ постоји $F \in \mathbf{C}$ такав да је $X \subseteq F$ (према аксиоми 10),

(Б3) за сваки $U \in \mathbf{T}$ и $F \in \mathbf{C}$, $U \setminus F \in \mathbf{T}$ и $F \setminus U \in \mathbf{C}$ (према аксиоми 6).

Проблем са, управо описаним, слабим моделом је да услов (Б2) важи једино за $L_{\mathcal{A}}(O, C)$-дефинабилне подскупове од $\mathbf{K}$. Жеља нам је да својство (Б2) проширимо на све подскупове од $\mathbf{K}$, тј. да конструишемо средњи модел.

Теорема 2.2.4. *(Теорема потпуности за средње моделе логике $L_{\mathcal{A}}(O, C)$) Нека је T непротивречан скуп реченица Σ-дефинабилних над $\mathcal{A}$. Тада постоји средњи модел за T.*

Доказ. Нека је L' језик који уводи Кислер у поменутој конструкцији за Γ, тј. L' је проширење језика L скупом из $\mathcal{A}$, нових симбола константи. Нека језик M садржи две врсте променљивих: X, Y, Z,... променљиве за скупове и x, y, z,... променљиве за урелементе. Затим, нека језик M садржи и предикате: $E_n(x_1, \ldots, x_n, X)$, $O(X)$ и $C(X)$ са значењем $(x_1, \ldots, x_n) \in X$, *X је отворен скуп* и *X је затворен скуп*, редом. Симболи константи су C_φ, за сваку формулу φ у $L'_{\mathcal{A}}(O, C)$. Нека S садржи следеће реченице језика $M_{\mathcal{A}}$:

(C1) (Аксиома добре дефинисаности)

$$\forall X \bigwedge_{n<m} \neg(\exists x_1, \ldots, x_n, y_{n+1}, \ldots, y_m)(\; E_m \;(x_1, \ldots, x_n, y_{n+1}, \ldots, y_m, X) \wedge \; E_n(x_1, \ldots, x_n, X))$$

при чему је $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \{y_{n+1}, \ldots, y_m\} = \emptyset$.

(C2) (Аксиома екстензионалности)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (E_n(x_1, \ldots, x_n, X) \leftrightarrow E_n(x_1, \ldots, x_n, Y)) \leftrightarrow X = Y.$$

(C3) (Аксиома компрехензије[7])

1. $\forall x_1 \ldots \forall x_n (\forall y_1 \ldots \forall y_m E_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, C_R) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow E_{n+m}(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_m, C_R))$,
за сваку атомичну формулу $R(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_m)$ језика $L'_{\mathcal{A}}$;

[7] спецификације или издвајања

2. $\forall x_1 \dots \forall x_n (E_n(x_1, \dots, x_n, C_{\neg\varphi}) \leftrightarrow \neg E_n(x_1, \dots, x_n, C_\varphi))$;

3. $\forall x_1 \dots \forall x_n (E_n(x_1, \dots, x_n, C_{\wedge\Phi}) \leftrightarrow \bigwedge_{\varphi\in\Phi} E_n(x_1, \dots, x_n, C_\varphi))$;

4. $\forall x_1 \dots \forall x_n (E_n(x_1, \dots, x_n, C_{(\forall x)\varphi}) \leftrightarrow \forall x E_{1+n}(x, x_1, \dots, x_n, C_\varphi))$;

5. $\forall x_1 \dots \forall x_n (E_n(x_1, \dots, x_n, C_{(\exists x)\varphi}) \leftrightarrow \exists x E_{1+n}(x, x_1, \dots, x_n, C_\varphi))$;

6. $\forall x_1 \dots \forall x_n (E_n(x_1, \dots, x_n, C_{Ox\varphi}) \leftrightarrow \exists X(O(X) \wedge \forall x(E_1(x, X) \leftrightarrow$
   $\leftrightarrow E_{1+n}(x, x_1, \dots, x_n, C_\varphi))))$;

7. $\forall x_1 \dots \forall x_n (E_n(x_1, \dots, x_n, C_{Cx\varphi}) \leftrightarrow \exists X(C(X) \wedge \forall x(E_1(x, X) \leftrightarrow$
   $\leftrightarrow E_{1+n}(x, x_1, \dots, x_n, C_\varphi))))$;

(C4) (Аксиома подскупа)

1. $\forall x \exists X(O(X) \wedge E_1(x, X)))$;
2. $\forall X \exists Y(C(Y) \wedge \forall x(E_1(x, X) \to E_1(x, Y)))$;
3. $\forall X \forall Y(O(X) \wedge C(Y) \to \exists Z(O(Z) \wedge \forall x(E_1(x, Z) \leftrightarrow \neg E_1(x, Y) \wedge E_1(x, X))))$;
4. $\forall X \forall Y(O(X) \wedge C(Y) \to \exists Z(C(Z) \wedge \forall x(E_1(x, Z) \leftrightarrow \neg E_1(x, X) \wedge E_1(x, Y))))$.

(C5) (Аксиоме аналогне свим аксиомама φ логике $L'_\mathcal{A}(O, C)$)

$$\forall x_1 \dots \forall x_n E_n(x_1, \dots, x_n, C_\varphi).$$

(C6) (Аксиома реализације реченица φ из Γ)

$$\forall x E_1(x, C_\varphi).$$

Слаб модел $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ за $L'_\mathcal{A}(O, C)$ може се трансформисати у стандардну структуру првог реда $\mathcal{B} = (B, P, E_n^\mathcal{B}, O^\mathcal{B}, C^\mathcal{B}, C_\varphi^\mathcal{B})_{n\geqslant 1, \varphi\in F}$ где је $B = \mathbf{K}$, $P \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{P}(B^n)$, $E_n^\mathcal{B} \subseteq B^n \times P$, $O^\mathcal{B} \subseteq B$, $C^\mathcal{B} \subseteq B$, $C_\varphi^\mathcal{B} \in P$ и $F \subseteq L'_\mathcal{A}(O, C)$. Нека је $C_\varphi^\mathcal{B} = \{(a_1, \dots, a_n) : (\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}$ и $P = \{C_\varphi^\mathcal{B} : \varphi \in L'_\mathcal{A}(O, C)\}$. Теорија S је Σ-дефинабилна над $\mathcal{A}$ и сваки $S_0 \subseteq S$, $S_0 \in \mathcal{A}$, има стандардан модел, јер аксиома

$$\begin{aligned}\bigwedge_n \bigwedge_{\varphi\in(S_0')_n} \forall x_1 \dots \forall x_n \quad \bigvee_m \bigvee_{\psi\in(S_0')_m} &\exists y_1 \dots \exists y_m (Cz\psi(z, y_1, \dots, y_m) \wedge \\ &\wedge \forall z(\varphi(z, x_1, \dots, x_n) \to \psi(z, y_1, \dots, y_m)))\end{aligned}$$

важи у слабом моделу, при чему је $S_0 \subseteq S_0'$, $S_0' \in \mathcal{A}$, затворен за супституцију константних симбола из L' и дисјункцију, и $(S_0')_n = \{\varphi \in S_0' : \varphi$ има $n+1$ слободну променљиву$\}$. Према Барвајзовој теореми потпуности (видети [3]) следи да S има стандардан модел $\mathcal{B}$.

Стандардан модел $\mathcal{B}$ се може трансформисати у средњи модел $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ од Γ стављањем да је:

$$R^\mathcal{K} = \{(x_1, \dots, x_n) \in B^n : E_n^\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n, C_R)\},$$

$U \in \mathbf{T}$ акко $O^\mathcal{B}(U)$, $F \in \mathbf{C}$ акко $C^\mathcal{B}(F)$, за $U, F \subseteq B$. Овим је теорема доказана. □

Теорема 2.2.5. *(Теорема потпуности за $L_{\mathcal{A}}(O,C)$) Ако је T непротивречан, Σ-дефинабилан над $\mathcal{A}$, скуп реченица, онда T има тополошки класа-модел.*

Доказ. Нека је $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ тополошки модел добијен из средњег модела $(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}')$ (видети [8], теорема 3.2). Тада је, $\mathbf{T} = \{\bigcup x : x \in \mathbf{T}_1\}$ и $\mathbf{C} = \{\bigcup x : x \in \mathbf{C}_1\}$, при чему је

$$\mathbf{T}_1 = \{x : x \text{ је коначан пресек елемената из } \mathcal{T}''\}$$

и

$$\mathbf{C}_1 = \{x : x \text{ је коначан пресек елемената из } \mathbf{C}'\}.$$

Доказ да је $(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}') \equiv_{L_{\mathcal{A}}(O,C)} (\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$, изводи се индукцијом по сложености формуле из $L_{\mathcal{A}}(O,C)$ са параметрима у K. Ми ћемо овде доказати само случајеве са новим квантификаторима: $Ox\theta(x, a_1, \dots, a_n)$ и $Cx\theta(x, a_1, \dots, a_n)$.

Ако је $(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}') \models Ox\theta$, тада $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models Ox\theta$, јер $\mathbf{T}' \subseteq \mathbf{T}$. Слично за $Cx\theta$.

Претпоставимо да $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models Ox\theta$, али да $(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}') \models \neg Ox\theta$. Тада је

$$\begin{aligned}
[\theta(x, a_1, \dots, a_n)]^{(\mathcal{K}, \mathcal{T}', \Sigma')} &= [\theta(x, a_1, \dots, a_n)]^{(\mathcal{K}, \mathcal{T}, \Sigma)} \text{ (према индукцијској претпоставци)} \\
&= \bigcup_{\alpha} \left(\bigcap_{j} [\theta^j_\alpha(x)]^{(\mathcal{K}, \mathcal{T}', \Sigma')} \right),
\end{aligned}$$

где је $(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}') \models Ox\theta^j_\alpha$ (индексни скуп за α је произвољан, а за j коначан). Приметимо да је

$$\theta^O(a_1, \dots, a_n) \in [\theta(x, a_1, \dots, a_n)]^{(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}')} \setminus \bigcup_{\alpha} \left(\bigcap_{j} [\theta^j_\alpha(x)]^{(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}')} \right).$$

Слично, претпоставимо да је $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C}) \models Cx\theta$, али да је $(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}') \models \neg Cx\theta$. Тада је

$$\begin{aligned}
[\theta(x, a_1, \dots, a_n)]^{(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}')} &= [\theta(x, a_1, \dots, a_n)]^{(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})} \text{ (према индукцијској претпоставци)} \\
&= \bigcap_{\alpha} \left(\bigcup_{j} [\theta^j_\alpha(x)]^{(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}')} \right),
\end{aligned}$$

где је $(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}') \models Ox\theta^j_\alpha$. Такође је

$$\theta^C(a_1, \dots, a_n) \in [\theta(x, a_1, \dots, a_n)]^{(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}')} \setminus \bigcap_{\alpha} \left(\bigcup_{j} [\theta^j_\alpha(x)]^{(\mathcal{K}, \mathbf{T}', \mathbf{C}')} \right).$$

Дакле, $(\mathcal{K}, \mathbf{T}, \mathbf{C})$ је тополошки класа-модел за T. □

3

ВЕРОВАТНОЋА И ЛОГИКА

> **J'ai dit plus d'une fois qu'il faudrait une nouvelle espèce de logique, qui traiteroit des degrés de Probabilité.**
>
> **G. Leibnitz**

3.1 Вероватноћа

Од свог настанка[1], теорија вероватноће се веома брзо развија, непрекидно налазећи нове могућности примене: теорија поузданости, биологија, социологија, медицинска дијагностика, лингвистика, атомска физика, контрола квалитета масовне индустријске производње, транспорт, вештачка интелигенција и многе друге области. Такође, термини везани за вероватноћу су веома чести и у свакодновном говору. „Вероватноћа је", према Батлеру ([28]), „суштинска водиља живота".

Све исцрпније и детаљније испитивање појава у природи и друштву подстичу теорију вероватноће у трагању за новима интерпретацијама, методама и законитостима. Како је значај вероватноће у модерном друштву и науци све већи, њеним концептима се многи баве: филозофи, математичари, физичари, статистичари, при чему се још увек дискутује о теоријском заснивању овог појма. Две основне интерпретације вероватноће су:

- релативне учесталости (статистички, објективистички, емпиријски приступ), и
- степен веровања (субјективистички, лични приступ).

У наставку приказаћемо два модела теорије вероватноће: један који је погодан за објективистички, а други погодан за субјективистички приступ интерпретацији вероватноће. Први потиче од Колмогорова [29], који је дао два система: за коначно-адитивну и σ-адитивну вероватноћу (дефиниције 1. и 2.). Други потиче од де Финетија [11].

[1]средином XVII века са радовима Ферма, Паскала и Хајгенса на задацима везаним за хазардне игре; важност нових проучавања била им је и тада јасна, јер, на пример, Хајгенс у свом делу „О прорачунима и хазардним играма" пише: „Читалац ће да примети да се овде не ради само о игри, већ да се овде постављају основе врло интересантне и дубоке теорије."

3.1.1 Вероватноћа као релативна учесталост

Основни модел, при објективистичком приступу интерпретацији вероватноће, је *експеримент* код кога остваривање одређених услова не доводи до једнозначног (детерминистичког) резултата. Скуп свих логички могућих исхода неког опита означаваћемо са Ω, а његове елементе, тзв. *елементарне исходе*, са ω. Међутим, у овом приступу вероватноћи нагласак није на елементарним исходима, већ на скуповима елементарних исхода. *Догађај* се дефинише као подскуп скупа Ω, и каже се да се неки догађај *реализовао* ако и само ако се остварио елементарни исход који припада том догађају. Дефинишући догађаје као подскупове од Ω, разне познате релације и операције међу скуповима тумаче се у терминима реализације догађаја: $ne A \equiv \Omega \setminus A$ (*супротан* догађај догађају A) се реализује ако и само ако се не реализује A, A *и* $B \equiv A \cap B$ (тј. AB) се реализује ако и само ако се реализују и A и B, A *или* $B \equiv A \cup B$ се реализује ако и само ако се реализује бар један од догађаја A и B. Често је потребно посматрати и пребројиве пресеке и уније догађаја. Како подскупови било ког бесконачног скупа могу бити веома „ружни", уместо свих подскупова од Ω, посматрају се само подскупови за које смо у датој ситацији „заинтересовани", при чему се захтева да скуп свих догађаја $\mathcal{F}$ који се посматрају буде затворен за комплементирања, у односу на Ω, уније и пресеке, тј. захтева се да $\mathcal{F}$ буде Булова алгебра или, како се често каже, алгебра (поље) подскупова од Ω. Често се захтева затвореност и за пребројиве пресеке и уније, тј. да $\mathcal{F}$ буде σ-алгебра (σ-поље) подскупова од Ω.

Веома важна претпоставка при оваквом заснивању вероватноће, је да догађаји посматране (σ-)алгебре $\mathcal{F}$ имају такозвану *статистичку хомогеност*. Реч је о томе да замишљамо да одговарајући експеримент можемо понављати произвољно много пута и у сваком понављању региструјемо да ли се неки догађај $A \in \mathcal{F}$ реализовао или није. Ако је n број понављања експеримента а $n(A)$, $0 \leqslant n(A) \leqslant n$, број реализација догађаја A, људско искуство садржано у историјском развоју науке и непосредна интуиција показују да је увећањем броја понављања експеримента ($n \to \infty$), такозвана *релативна учесталост* $\dfrac{n(A)}{n}$ догађаја A све ближа неком фиксираном броју $P(A)$, који зовемо *вероватноћа* догађаја A. Овај приступ вероватноћи је управо математички модел за догађаје са оваквим својством статистичке хомогености, тзв. *случајне догађаје*. У формалној дефиницији вероватноће захтева се да она задовољава она својства која проистичу из представе о вероватноћи неког догађаја као о броју око кога се „групишу" релативне учестаности.

Дефиниција 3.1.1. ***Коначно-адитивна вероватноћа**, или само **вероватноћа**, догађа алгебре $\mathcal{F}$ је пресликавање $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ које задовољава следећа својства:*

(1) (нормираност) $P(\Omega) = 1$,

(2) (коначна адитивност) ако су $A, B \in \mathcal{F}$ дисјунктни догађаји, тада је $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Коначно-адитивни простор вероватноћа је уређена тројка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Дефиниција 3.1.2. *σ-**адитивна вероватноћа** догађа σ-алгебре $\mathcal{F}$ је свако пресликавање*

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ *које задовољава следећа својства:*

(1) (нормираност) $P(\Omega) = 1$,

(2) (σ-адитивност) ако су $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$, *узајамно дисјунктни догађаји, тада је* $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Простор вероватноћа је уређена тројка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$[2].

Из наведених дефиниција следе неке основне особине (коначно-адитивне) вероватноће: $P(\emptyset) = 0$; монотоност (ако је $A \subset B$, онда је $P(A) \leqslant P(B)$); $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ и тако даље. Вероватноћа (дефиниција 2.) има и нека специјална својства као што је, на пример, непрекидност (ако је низ догађаја $A_1, A_2, \ldots$ неопадајући, онда је $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$) и тако даље.

Иако се у савременим курсевима вероватноће фаворизује концепт σ-адитивне вероватноће, поједини истраживачи сматрају да је то често непотребно, наглашавајући да је у многим ситуацијама довољан концепт коначне адитивности.

Условне вероватноће

Ако нам је познато или ако претоставимо да се ралüзовао догађај A, онда то може да има утицаја на вредност вероватноће неког другог догађаја B. Тако се долази до *условне вероватноће* $P(B \mid A)$, тј. вероватноће догађаја B под условима који извесно или сигурно доводе до реализације догађаја A. Интуитивна представа о вероватноћи као броју око кога се групишу релативне учесталости, доводи до дефиниције условне вероватноће:

$$(\star) \qquad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0.$$

Теорема 3.1.1. *Ако је* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *простор вероватноћа и* $A \in \mathcal{F}$, *такав да је* $P(A) > 0$, *тада је функција* $P(\,\cdot \mid A) : \mathcal{F} \to [0,1]$ *вероватноћа над* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Интуитивна представа о *независности догађаја* B од догађаја A, овде се формализује условом $P(B \mid A) = P(B)$. Користећи се везама

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B),$$

имамо да је у том случају и $P(A \mid B) = P(A)$. Тако, догађаји A и B су независни (статистички или стохастички) ако је $P(AB) = P(A)P(B)$. Треба приметити да је овако дефинисана независност догађаја симетрична (узајамна), као и да су свака два дисјунктна догађаја са позитивним вероватноћама **зависна**! Такође, у овом контексту, остаје нерасветљено питање независности догађаја чија је вероватноћа 0 од осталих

[2] Са становишта Теорије мере имамо мерљив простор $(\Omega, \mathcal{F})$ над којим је дефинисана нормирана мера P. Важно је истаћи да је Теорија вероватноће, историјски гледано, старија од Теорије мере, те да је у Теорији мере нађен само један погодан оквир у коме се могу описати појмови Теорије вероватноће.

догађаја. Напоменимо, да је независност дефинисана помоћу вероватноће шири појам од интуитивне представе о независности два догађаја. (Не)зависност догађаја често се не сме мешати са *узрочношћу*.

3.1.2 Вероватноћа као мера веровања

Према овом становишту, *догађај* се посматра као исказ, док је колекција догађаја снабдевена алгебарском структуром сходно природним везама: ***или*** $\equiv \vee$, ***и*** $\equiv \wedge$, ***не*** $\equiv \neg$, ***сигуран догађај*** $\equiv \top$, ***немогућ догађај*** $\equiv \bot$. Ако се не претпоставе никакве логичке везе међу догађајима неке посматране колекције $\mathcal{D}$, она се допуњује до Булове алгебре $\mathcal{F}$, која је заправо слободна Булова алгебра над скупом слободних генератора $\mathcal{D}$, тј. Линденбаумова алгебра исказног рачуна са скупом исказних слова $\mathcal{D}$. Претпостављањем логичких веза међу посматраним догађајима добијамо Булову алгебру $\mathcal{F}(T)$, где је T теорија исказног рачуна која одговара претпостављеним логичким везама. Сама природа овакве интерпретације намеће да се најчешће посматра коначна колекција догађаја $\mathcal{D} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, која, у случају логичке назависности догађаја, доводи до (слободне) коначно генерисане Булове алгебре са атомима: $A_j = {E_1}^{j(1)} \wedge \cdots \wedge {E_n}^{j(n)}$, $j \in \{0,1\}^n$ ($E^0 = \neg E$, $E^1 = E$). Са $A_j \subseteq E_i$, означаваћемо чињеницу да је $j(i) = 1$. У овом поглављу посматраћемо увек колекције логички независних догађаја, осим ако другачије није речено.

Вероватноћа догађаја се схвата као степен уверености у истинитост одговарајућег исказа. Рецимо, према де Моргану ([28]) вероватноћа означава: „стање духа у погледу једног тврђења, једног догађаја који ће се десити или у погледу било којег другог предмета о којем не постоји апсолутно знање.“. Тако, степен уверености, односно вероватноће догађаја неке задате колекције $\mathcal{D}$, и у овом случају меримо реалним бројевима, тј. вероватноћу схватамо као пресликавање $P : \mathcal{D} \to [0,1]$ дефинисано од стране неког рационалног посматрача. Али, природно се намећу питања: „Кога ћемо сматрати рационалним посматрачем?“, „Чије ћемо веровање мерити?“. Одговар лежи у наредној дефиницији; наиме, рационалним посматрачем ћемо сматрати оног чије је веровање *кохерентно*.

Дефиниција 3.1.3. *Нека је $\mathcal{D}$ нека колекција догађаја. Пресликавање $P : \mathcal{D} \to [0,1]$ је* ***кохерентно*** *(додељивање вероватноћа) ако и само ако се може проширити до коначно-адитивне вероватноће на $\mathcal{F}$, где је $\mathcal{F}$ Булова алгебра догађаја генерисана са $\mathcal{D}$.*

Приметимо да је проширење до вероватноће на $\mathcal{F}$, неког кохерентног пресликавања $P : \{E_1, E_2, \ldots, E_n\} \to [0,1]$, потпуно одређено својим вредностима на одговарајућем скупу атома, тј. свака коначно-адитивна вероватноћа $P^* : \mathcal{F} \to [0,1]$ потпуно је одређена кореспонденцијом: ${E_1}^{j(1)} \wedge \cdots \wedge {E_n}^{j(n)} \overset{P^*}{\mapsto} p_j$, $j \in \{0,1\}^n$, при чему је $\sum\limits_{j \in \{0,1\}^n} p_j = 1$.

Имајући ово у виду, није тешко доказати следећу теорему.

Теорема 3.1.2. *Нека је $\mathcal{D}$ нека колекција догађаја. Пресликавање $P : \mathcal{D} \to [0,1]$ је* *кохерентно ако и само ако систем, по непознатим x_j, $j \in \{0,1\}^n$,*

$$(S) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{j \atop A_j \subseteq E_i} x_j = P(E_i) & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum\limits_{j \in \{0,1\}^n} x_j = 1 & \\ x_j \geqslant 0 & (j \in \{0,1\}^n) \end{cases}$$

има решење, при чему су A_j, $j \in \{0,1\}^n$, атоми.

Приметимо да су решења система заправо вероватноће одговарајућих атома.

Упоредимо изложен приступ, са објективистичким, навођењем редом корака у конструкцији неког коначног простора веороватноћа.

ОБЈЕКТИВИСТИЧКИ	СУБЈЕКТИВИСТИЧКИ
Задаје се скуп *елементарних догађаја* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.	Задаје се скуп *догађаја* $\mathcal{D} = \{E_1, \ldots, E_n\}$.
Дефинише се тзв. *функција расподеле вероватноћа* $P : \Omega \to [0,1]$, тако да је	Дефинише се *додељивање вероватноћа* $P : \mathcal{D} \to [0,1]$, које је
$\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.	**кохерентно**
Догађај је сваки подскуп од Ω.	*Елементаран догађај* је сваки атом $\pm E_1 \wedge \cdots \wedge \pm E_n$
Одређује се *вероватноћа* ма ког догађаја: $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega)$.	Одређује се *вероватноћа* елементарних догађаја, решавањем система (S) у теореми 3.1.2.

Један од модела (сличан *експерименту* за вероватноћу као релативну учесталост) за вероватноћу схваћену као степен веровања је *клађење* [5, 6, 11]. Наиме, претпоставимо да је реч о опклади на догађаје: $E_1, \ldots, E_n$ са коефицијентима $0 < p_1, \ldots, p_n < 1$, редом, при чему се за сваки од догађаја E_i улаже $p_i s_i$ динара. У случају реализације догађаја E_i добија се сума од s_i динара. Атоми над $E_1, \ldots, E_n$ се могу схватити као нека врста „елементарних исхода". Тако, ако се оствари $A_j = E_1{}^{j(1)} \wedge \cdots \wedge E_n{}^{j(n)}$, добитак, онога ко се кладио, је:

$$G_j = s_1(j(1) - p_1) + \ldots + s_n(j(n) - p_n).$$

Није тешко видети да је матрица-врста $\mathrm{G}_{1 \times 2^n}$, коју чине добици G_j у сваком од случајева A_j, $j \in \{0,1\}^n$, једнака производу:

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{bmatrix}_{1 \times n} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & j(1) - p_1 & \cdots \\ \cdots & j(2) - p_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & j(n) - p_n & \cdots \end{bmatrix}_{n \times 2^n} = \mathrm{sB}.$$

Наравно, нико разуман не би организовао клађење тако да су сви добици G_j позитивни, тј. да је $\mathrm{G} > 0$; разумно (тј. кохерентно додељивање коефицијената клађења) је да бар један добитак буде $\leqslant 0$. Употреба речи кохерентан није случајна, што расветљава наредна теорема [6].

Теорема 3.1.3. *Нека је* $\mathbf{B}$ *произвољна матрица типа* $n \times m$. *Тачно један од система* (S_1) *и* (S_2) *има решење, где је*

$$(S_1) \qquad \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \geqslant 0,\ ||\mathbf{x}|| = 1,$$

са непознатом матрицом $\mathbf{x}_{m\times 1}$, *при чему је* $||\mathbf{x}|| = \sum_{i=1}^{m} x_i$, *и*

$$(S_2) \qquad \mathbf{s}\mathbf{B} > \mathbf{0},$$

са непознатом матрицом $\mathbf{s}_{1\times n}$.

Приметимо да се систем (S), из теореме 3.1.2, може записати у облику (S_1), што значи да ако смо *кохерентно доделили* коефицијенте (*вероватноће*) догађајима $E_1, \ldots, E_n$, тада и само тада добитак онога ко се клади није загарантован, тј. *нису сви који се кладе сигурни добитници*; такође *нису сви ни сигурни губитници*, јер ако систем $\mathbf{s}\mathbf{B} < \mathbf{O}$ има решење, има га и систем (S_2) претходне теореме.

Условне вероватноће

Разлике у схватању и дефинисању вероватноће, у изложеним приступима, још су драстичније по питању условних вероватноћа. Сматра се да приступ условним вероватноћама, у смислу дефиниције $(\star)$, није погодна формализација овог појма. Наиме, захтев да је вероватноћа услова позитивна је прејак, у смислу да без одговора остају многобројна теоријско-практична питања која се односе на интуитивно поимање условних догађаја и њихових вероватноћа. Неки проблеми ове природе су већ поменути у пододељку 3.1.1.

Такође, како је на почетку овог поглавља примећено, свака вероватноћа је у извесном смислу условна, па су природни покушаји да се теорија вероватноће заснује увођењем само условних вероватноћа, тј. да се посматрају само вероватноће парова догађаја (E, H). Наравно, *догађај* остаје централни појам. Под условним догађајем сматраћемо пар догађаја, у ознаци $(E \mid H)$, као целину, а условну вероватноћу као вероватноћу те целине

вероватноћа од $(E$ *под условом* $H)$,

а не као

(*вероватноћа од* E), *под условом* H.

Дефиниција 3.1.4. *Нека је* $\mathcal{F}$ *(Булова) алгебра скупова,* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ *затворен за коначне уније (адитиван скуп) и* $\mathcal{B}^0 = \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$. ***Условна вероватноћа*** *на* $\mathcal{F} \times \mathcal{B}^0$ *је пресликавање* $P : \mathcal{F} \times \mathcal{B}^0 \to [0,1]$ *које задовољава следеће услове:*

1. $P(H \mid H) = 1$, *за сваки* $A \in \mathcal{B}^0$,
2. $P(\cdot \mid H)$ *је коначно-адитивна вероватноћа на* $\mathcal{F}$, *за сваки* $H \in \mathcal{B}^0$,
3. $P(AE \mid H) = P(E \mid H) \cdot P(A \mid EH)$, *за сваки* $A \in \mathcal{F}$ *и* $E, H \in \mathcal{B}^0$, $EH \neq \emptyset$.

Приметимо да услов 3 претходне дефиниције даје да условна вероватноћа $P(\cdot \mid H)$ није потпуно одређена догађајем H, већ да на известан начин зависи и од других условних вероватноћа $P(\cdot \mid EH)$; другим речима не може се $P(\cdot \mid H)$ дефинисати независно.

Дефиниција 3.1.5. *Нека је $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ произвољан скуп условних догађаја и $P : \mathcal{C} \to [0,1]$. Пресликавање P је* ***кохерентно*** *ако се може проширити до условне вероватноће на $\mathcal{F} \times \mathcal{B}^0$, при чему је $\mathcal{F}$ алгебра скупова, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ адитиван скуп и $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{B}$.*

Није тешко видети да се за алгебру $\mathcal{F}$, поменуту у претходној дефиницији, може узети минимална алгебра генерисана са $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, а за $\mathcal{B}$ минималан адитиван скуп генерисан са $\mathcal{C}_2$.

Теорема 3.1.4. *Нека је $\mathcal{C} = \{E_1 \mid H_1, \ldots, E_n \mid H_n\}$ произвољан коначан скуп условних догађаја, $\mathcal{B}$ адитиван скуп генерисан са $H_1, \ldots, H_n$, $\mathcal{F}$ минимална алгебра генерисана догађајима $E_1, H_1, \ldots, E_n, H_n$ са скупом атома $\mathcal{A}$ и $P : \mathcal{C} \to [0,1]$. Следећи услови су међусобно еквивалентни:*

(i) *P је кохерентно;*

(ii) *Сагласни су системи (S_k), по непознатим x_j^k, $j \in \{0,1\}^{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, m \leqslant n$,*

$$(S_0)\begin{cases} \sum_{\substack{j\\ A_j \subseteq E_i H_i}} x_j^0 = P(E_i \mid H_i) \sum_{\substack{j\\ A_j \subseteq H_i}} x_j^0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{\substack{j\\ A_j \subseteq H^0}} x_j^0 = 1 \\ x_j^0 \geqslant 0, \quad j \in \{0,1\}^{2n}, \end{cases}$$

где је $H^0 = H_1 \cup \ldots \cup H_n$, и за $k \geqslant 1$

$$(S_k)\begin{cases} \sum_{\substack{j\\ A_j \subseteq E_i H_i}} x_j^k = P(E_i \mid H_i) \sum_{\substack{j\\ A_j \subseteq H_i}} x_j^k, \text{ ако је } \sum_{\substack{j\\ A_j \subseteq H_i}} x_j^{k-1} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{\substack{j\\ A_j \subseteq H^k}} x_j^k = 1 \\ x_j^k \geqslant 0, j \in \{0,1\}^{2n}, \end{cases}$$

где је H^k унија свих скупова H_i таквих да је $\sum_{\substack{j\\ A_j \subseteq H_i}} x_j^{k-1} = 0$;

Доказ. Даћемо само кључне кораке прилично гломазног доказа.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Нека је $\mathcal{B}$ адитиван подскуп од $\mathcal{F}$ и $P^* : \mathcal{F} \times \mathcal{B}^0 \to [0,1]$ условна вероватноћа која проширује пресликавање P. Означимо са P_0 (коначно-адитивну) вероватноћу $P^*(\cdot \mid H^0)$ на $\mathcal{F}$. Приметимо да је: $P_0(H^0) = 1$, да је за бар један i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $P^*(H_i \mid H^0) > 0$, као и да је $P_0(A_j) = 0$, за све $A_j \not\subseteq H^0$.

За $k \geqslant 1$, индуктивно дефинишемо скупове: $H^k = \bigcup\{H_i : P_{k-1}(H_i) = 0\}$ и вероватноће $P_k(\cdot) = P^*(\cdot \mid H^k)$ на $\mathcal{F}$, док год је $H^k \neq \emptyset$; наравно, на описан начин, могуће је дефинисати само коначно много скупова $H^1, \dots, H^m$ и вероватноћа $P_1, \dots, P_m$, при чему је $m \leqslant n$. Приметимо да, за свако $k \in \{1, \dots, m\}$, постоји бар један $H_j \subseteq H^k$, да је $P_k(H_i) > 0$, као и да је $P_k(A_j) = 0$, за $A_j \nsubseteq H^k$. Такође, за свако H_i, постоји бар једно $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, да је $\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq H_i}} P_k(A_j) > 0$.

Није тешко видети да су $x_j^k = P_k(A_j)$, $j = 1, \dots, 2^{2n}$, решења система (S_k), за свако $k = 0, 1, \dots, m$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Претпоставимо да су сви системи (S_k), $k = 0, 1, \dots, m$ сагласни. Дефинишимо условну вероватноћу P^* на $\mathcal{F} \times \mathcal{B}^0$. Нека је $E \mid H \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}^0$ произвољан условни догађај. Пошто је $\mathcal{B}$ адитиван скуп, H је унија неких (можда и свих) догађаја H_i, $i = 1, \dots, n$. Означимо са k_0 максималан k, такав да је $H \subseteq H^k$; тада систем (S_{k_0}) садржи одговарајућу једначина за сваки H_i за који је $H_i \subseteq H$. Пошто је бар једно од решења $x_j^{k_0}$, $j \in \{0, 1\}^{2n}$, поменутих једначина ненегативно и $H \nsubseteq H^{k_0+1}$, следи да је $\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq H}} x_j^{k_0} > 0$, као и да је $\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq H}} x_j^k = 0$, за свако $k < k_0$. Дакле, можемо ставити да је

$$P^*(E \mid H) = \frac{\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq EH}} x_j^{k_0}}{\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq H}} x_j^{k_0}}.$$

Сада, треба доказати да је овако дефинисано пресликавање P^* заиста условна вероватноћа на $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$. Услове 1. и 2. дефиниције 3.1.4 није тешко проверити. Доказаћемо само услов 3. Посматрајмо следеће условне догађаје $AE \mid H$, $E \mid H$, $A \mid EH$ из $\mathcal{F} \times \mathcal{B}^0$. Ако је k_0 такав да је $H \subseteq H^{k_0}$, $H \nsubseteq H^{k_0+1}$ и $\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq H}} x_j^{k_0} > 0$, тада је, према дефиницији пресликавања P^*,

$$P^*(E \mid H) = \frac{\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq EH}} x_j^{k_0}}{\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq H}} x_j^{k_0}} \quad \text{и} \quad P^*(AE \mid H) = \frac{\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq AEH}} x_j^{k_0}}{\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq H}} x_j^{k_0}}. \tag{1}$$

Даље, разликујемо два случаја.

1° $\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq EH}} x_j^{k_0} = 0$[3]. У овом случају је $P^*(E \mid H) = 0$, а такође и $P^*(AE \mid H) = 0$, па одговарајућа једнакост тривијално важи.

2° $\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq EH}} x_j^{k_0} > 0$. Тада је $P^*(A \mid EH) = \frac{\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq AEH}} x_j^{k_0}}{\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq EH}} x_j^{k_0}}$, што заједно са једнакостима (1), даје да важи: $P^*(AE \mid H) = P^*(E \mid H) \cdot P^*(A \mid EH)$. □

3.1.3 Нека уопштења простора вероватноће

Основни појмови везани за вероватноћу су *догађај* и *вероватноћа догађаја*, док су суштинске претпоставке

[3] напоменимо да постоји $k > k_0$, такво да је $\sum_{\substack{j \\ A_j \subseteq EH}} x_j^k > 0$.

- колекција *догађаја* (које разматрамо), снабдевена је извесном алгебарском структуром: ако су A и B неки догађаји, то су и A *или* B, A *и* B, *не* A, ... и истакнути (одређени) су *(апсолутно) немогућ* и *(апсолутно) сигуран* догађај, које ћемо редом означавати са $\emptyset$ и Ω. Тако, под догађајима се најчешће подразумевају неки подскупови унапред изабраног скупа Ω који се сматра апсолутно сигурним догађајем, при чему колекција свих догађаја $\mathcal{D} = \{A, B, \ldots\}$ представља један *прстен* подскупова од Ω:

  1. $\emptyset \in \mathcal{D}$,
  2. ако $A, B \in \mathcal{D}$, тада $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{D}$,
  3. ако $A, B \in \mathcal{D}$, тада $A \setminus B \in \mathcal{D}$;

  ако $\Omega \in \mathcal{D}$, тада се колекција $\mathcal{D}$ назива *пољем* догађаја над Ω и представља једну Булову алгебру.

- *вероватноћа догађаја*

  – није унутрашње својство тог догађаја, односно о вероватноћи неког догађаја се може говорити само при неким тачно утврђеним *условима*; вероватноћа неког догађаја може бити различита у различитим околностима;

  – је мерљиво својство, односно вероватноће догађаја се могу приказати као елементи неког скупа на коме је задато некакво уређење и извесна алгебарска структура; потребу за уређењем намеће потреба за упоређивањем вероватноћа, тј. за формализацијом појмова „вероватније“, „мање вероватно“ и сл, док нам је алгебарска структура потребна за израчунавање вероватноћа „сложених догађаја“.

Као што смо видели у претходним пододељцима уобичајено је да се претпостави да је вероватноћа неког догађаја реалан број из интервала $[0,1]$, иако су у многим ситуацијама вероватноће посматраних догађаја само рационални бројеви из $[0,1]$ или само неки од $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$, за неки природан број n.

Пример 1. Дефиниција вероватноће коју је дао Лаплас 1812. године[4], а која је данас позната као *класична* или *Лапласова* дефиниција вероватноће, односи се на експерименте са коначним скупом могућих исхода Ω, под претпоставком да су сви исходи једнако вероватни: $\omega \overset{P}{\mapsto} \frac{1}{|\Omega|}$. Наиме, према класичној дефиницији је вероватноћа догађаја A једнака количнику броја *повољних* исхода за догађај A и броја свих *могућих* исхода, тј. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, за сваки догађај $A \subseteq \Omega$. Дакле, ранг Лапласове вероватноће је $\left\{0, \frac{1}{|\Omega|}, \ldots, 1\right\}$. □

Пример 2. Нека је $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$ скуп природних бројева, а $\mathcal{F}$ колекција подскупова $A \subseteq \Omega$ чије су карактеристичне функције $\chi_A : \Omega \to \{0,1\}$ периодичне[5]. Приметимо

[4] у свом раду „ Theorie analitique des probabilites“

[5] периодом карактеристичне функције скупа A је најмањи природан број n_A такав да је $\chi_A(n + n_A) = \chi_A(n)$, $n \in \Omega$.

да је $\mathcal{F}$ једна алгебра подскупова од Ω. Дефинишимо пресликавање $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ са: $P(A) = \sum_{\substack{i\\ i\in A}} \frac{1}{2^i}$, $A \in \mathcal{F}$. Пресликавање P је вероватноћа на $\mathcal{F}$, чији је ранг скуп свих рационалних бројева из $[0,1]$. □

Ако је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ неки простор вероватноће (коначно или σ-адитиван), под рангом вероватноће $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ подразумевамо скуп $\mathrm{Ran}(P) = \{P(A) : A \in \mathcal{F}\}$. Какав ранг имају $[0,1]$-вредносне вероватноће окарактерисано је наредном теоремом [1].

Теорема 3.1.5. *1. Ако је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ коначно-адитиван простор вероватноћа, тада или је сваки број из $\mathrm{Ran}(P)$ његова изолована тачка и $\mathrm{Ran}(P)$ је коначан скуп или је сваки број из $\mathrm{Ran}(P)$ његова тачка нагомилавања.*

2. Ако је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа, тада је сваки број из $\mathrm{Ran}(P)$ његова изолована тачка и $\mathrm{Ran}(P)$ је коначан скуп или сваки број из $\mathrm{Ran}(P)$ има околину која садржи неки затворен скуп $C \subset \mathrm{Ran}(P)$ без изолованих тачака.

Међутим постоје и многе друге структуре чији подскупови могу бити веома погодни за изражавање вероватноће. Навешћемо само неке пребројиве. Поред стандардног примера архимедског поља рационалних бројева:

- $\mathbb{Q}$, тј. интеравала $[0,1]_{\mathbb{Q}}$

важан је и пример неархимедског поља, као што је:

- $\mathbb{Q}[\varepsilon]$, тј. најмањег поља које се добија додавањем једне позитивне инфинитезимале ε пољу рационалних бројева. Елементи овог поља су „рационалне функције“ облика
$$f(\varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)} = \frac{a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_m\varepsilon^m}{b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \ldots + b_n\varepsilon^n},$$
где се $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ могу схватити као полиноми по ε са рационалним коефицијентима, при чему нису сви коефицијенти у $B(\varepsilon)$ једнаки нули. Ако је b_ℓ, $\ell \geqslant 0$, први, слева на десно, коефицијент у $B(\varepsilon)$ различит од нуле, тада ако сваки коефицијент броиоца и имениоца поделимо са b_ℓ добијамо тзв. нормиран облик елемента $f(\varepsilon)$:
$$(1) \qquad f(\varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)} = \frac{a'_0 + a'_1\varepsilon + a'_2\varepsilon^2 + \ldots + a'_m\varepsilon^m}{\varepsilon^\ell + b'_{\ell+1}\varepsilon^{\ell+1} + \ldots + b'_n\varepsilon^n}.$$
Приметимо да је $f(\varepsilon) = 0$ ако и само ако је $a'_0 = a'_1 = \ldots = a'_m = 0$, а такође и да се сваки рационалан број q може записати у облику $\frac{q}{1}$, па је $Q \subset Q[\varepsilon]$. Уређење на $Q[\varepsilon]$ је дефинисано на следећи начин: $f(\varepsilon) > 0$ акко $a'_k > 0$, при чему је $f(\varepsilon)$ записан у нормалном облику и a'_k, $k \leqslant 0$, је први коефицијент, слева на десно у броиоцу развоја (1), који је различит од 0, тј. $f(\varepsilon) \leqslant g(\varepsilon)$ акко је $g(\varepsilon) - f(\varepsilon) > 0$ или $f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$. Није тешко показати да је једно овако дефинисано уређење линеарно и да није архимедско: $n\varepsilon < 1$, за сваки природан број n.

Такође, интересантни су примери производа уређених поља, који су уређени прстени, као што су, на пример, производи[6]:

- $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \ldots$

Теорије комплексних, векторских, нестандардних мера нам указују да ни овакве случајеве не треба занемарити.

Пример 3. Како смо већ напоменули, истраживачи који разматрају „статистичку вероватноћу" сматрају да је основни задатак теорије вероватноће да опише „регуларност" при остваривању неког случајног догађаја при реализацији одређеног експеримента или при посматрању неке појаве. Први корак у налажењу одговора на питање „Колико често се остварује неки догађај?" је понављање експеримента и регистровање броја појављивања одређеног догађаја: ако је неки експеримент реализован N пута, и при том је сигуран догађај Ω изабран тако да се остварује при сваком успешно изведеном експерименту, за сваки догађај A, посматраног поља догађаја $\mathcal{D}$ (неких подскупова од Ω), региструје се број n_A појављивања догађаја A ($n_\Omega = N$). Вероватноћа којом, на овом нивоу, извођач експеримента (агент) располаже је коначно-адитивна $[0,1]_{\mathbb{Q}}$-вредносна вероватноћа P, тзв. *релативна учесталост*, дефинисана са:

$$P(A) = \frac{n_A}{N},$$

а која се узима као једна апроксимација функције која се, у датом контексту, сматра „апсолутном" вероватноћом. Тој „апсолутној" вероватноћи приближавамо се тек „нагомилавањем искуства", тј. посматрањем $\underbrace{[0,1]_{\mathbb{Q}} \times [0,1]_{\mathbb{Q}} \times \ldots \times [0,1]_{\mathbb{Q}}}_{k}$-вредносне вероватноће P^*, при чему је k број агената који, независно један од другог, изводе један исти експеримент, сваки по N_i пута, $i = 1, \ldots, k$, региструјући бројеве n_A^i појављивања догађаја A:

$$P^*(A) = \left(\frac{n_A^1}{N_1}, \ldots, \frac{n_A^k}{N_k}\right).$$

Због претпостављене *статистичке хомогености* догађаја (пододељак 3.1.1) природно је да се за најрелевантније „искуство" узима релативна учесталост за највећим N_i. У вези са овим интерасантно је поменути да неке студије показују да мала деца и (многи нематематичари) интуитивно вероватноћу не схватају увек као количник $\frac{n_A}{N}$, већ као пар (n_A, N), у смислу да је догађај коме одговара пар (1 повољан исход, 2 могућа исхода) *мање вероватан* од оног коме одговара пар (2 повољна исхода, 4 могућа исхода). □

Дефиниција 3.1.6. *Нека је* $\mathbb{G} = (G, +, -, 0, \leqslant)$ *уређена Абелова група таква да је* $(G, \leqslant)$ *мрежа,* 1 *фиксиран позитиван елемент ове групе и* $[0,1]_{\mathbb{G}} = \{x \in G : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. *Пресликавање* $P : \mathcal{F} \to [0,1]_{\mathbb{G}}$ *је* ***коначно-адитивна*** $[0,1]_{\mathbb{G}}$***-вероватноћа*** *на алгебри* $\mathcal{F}$

[6]Производ, у стандардном смислу, линеарних уређења није линеарно уређење; уређење $\leq$ на $L_1 \times L_2$ производа $(L_1, \leq_1) \times (L_2, \leq_2)$ дато са: $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x_1 \leq_1 y_1 \wedge x_2 \leq_2 y_2$ није линеарно, али је $(L_1 \times L_2, \leq)$ мрежа.

подскупова од Ω ако и само ако важи:

(1) (нормираност) $P(\Omega) = 1$,

(2) (коначна адитивност) ако су $A, B \in \mathcal{F}$ *дисјунктни догађаји, тада је* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Није тешко доказати да из ове дефиниције следе поменуте (пододељак 3.1.1) основне особине вероватноће.

3.2 ВЕРОВАТНОСНЕ ЛОГИКЕ

Етимологија речи вероватноћа (латински probare) показује да се у народу вероватноћа осећа као врста веровања, тј. нека врста непотпуног доказа. Тако, свакодневна и уобичајена „закључивања по вероватноћи" сматрају се *рационално добро заснованим*, иако се зна да сведочанства за њих нису нити потпуна нити апсолутна.

Први који је теорију вероватноће схватио као део логике је Лајбниц. Поменимо и Болцана који је предлагао да вероватноћа буде логичка веза између ставова, а да импликација буде специјалан случај те везе. Сличним путем ишли су многи логичари: Џорџ Бул ([2]), Џон Вен, Чарлс Перс и други.

Данас, постоје два главна приступа формализацији вероватносног резоновања:

- логике за вероватносним квантификаторима ([21, 26, 27, 47, 49]), и
- логике са вероватносним операторима ([12, 13, 35, 39, 45, 46, 48]).

Логике са вероватносним квантификаторима увео је Џером Кислер ([26]) разматрајући структуре првог реда у којима је вероватноћа дефинисана на домену, тј. структуре облика $(\mathcal{M}, \mu)$, при чему је $\mathcal{M}$ нека структура првог реда. Језик ових логика садржи квантификаторе облика $P\vec{x} \geqslant r$, при чему формула $(P\vec{x} \geqslant r)\varphi(\vec{x})$ значи *вероватноћа скупа* $\{\vec{x} : \varphi(\vec{x})\}$ *је већа или једнака* r.[7] Овакав концепт је погодан за проучавање објективне вероватноће, и као такав представља моћно средство за изражавање математичких појмова који се јављају у класичној теорији вероватноће. Разрађујући Кислерове идеје, Хувер [21] је проучавао логике L_P, $L_{\omega_1 P}$, L_{AP}, у којима се користе вероватносни квантификатори. У [27] Кислер је разматрао и вероватносне логике погодне за изражавање особина случајних променљивих, изучавање стохастичких процеса и тако даље. У логици $L_{A\int}$ се интегрални оператори, слично Сколемовим функцијама у класичној логици, користе за елиминацију вероватносних квантификатора. У логици $L_{\mathcal{A}}(\int)$ су уместо вероватносних квантификатора уведени квантификатори облика $\int \ldots dx$ који везују променљиву x. У логици L_{AE} уведен је оператор $E[\cdot \mid \cdot]$ којим се изражава условно очекивање случајне промељиве. Преглед резултата у овој области дат је у [49], где су такође разматране и исказне логике које садрже вероватносне операторе.

Логике са вероватносним операторима, тзв. вероватносне логике, су некласичне логике које имају низ сличности са модалним логикама, а омогућавају строго, формално,

[7] Вероватносни квантификатори се користе уместо класичних $\forall$ и $\exists$ чије би присуство онемогућило да пројекције мерљивих догађаја буду у општем случају мерљиве.

закључивање о вероватноћи (схваћеној, пре свега, као степен веровања). Међу првима који су дали разне аксиоматске системе за експлицитно резоновање о вероватноћи, доказујући одговарајуће теореме потпуности и сл., су Фагин, Халперн и Магидо [12, 13]. Сличне логике је, независно, разматрао и Рашковић у [48]. Полазећи од поменутих резултата Огњановић, у [41], детаљно је проучио и описао ове логике, разматрајући и њихове односе са модалним и темпоралним логикама. Бесконачне аксиоматизације, дате у [41, 45, 46], биће коришћене и у овом раду. Треба нагласити да се бесконачност односи на метајезик, тј. докази могу бити бесконачни док су формуле коначне. У поменутим радовима показана је сагласност и јака потпуност („Сваки непротивречан скуп формула је задовољив") у односу на класе модела у којима су вероватноће дефинисане над могућим световима. Ови модели подсећају на модалне моделе, с тим што се уместо модалне релације достижности уводи(-е) простор(и) вероватноћа. Бесконачна аксиоматизација се оправдава одсуством компактности у оваквим логикама. Многобројни нови резултати, од којих ће неки у даљем тексту бити описани, су у извесном смислу наставак поменутих радова.

Да бисмо добили систем погодан за формализацију формула чије је интуитивно значење: „Вероватноћа од φ није мања од s", најједноставније је (према [12, 13, 35, 41, 45, 46, 48]) језик класичне логике проширити листом оператора $P_{\geqslant s}$, за сваки рационалан број s, тако да тзв. вероватносна формула $P_{\geqslant s}\varphi$ има наведено интуитивно значење. Вероватносне операторе је могуће индексирати и неким другим скупом који је узет за кодомен вероватноће; на пример, неким коначним скупом (рационалних бројева) или, као у [50], јединичним интервалом неког рекурзивног неархимедског поља које садржи рационалне бројеве (какво је, рецимо, Хардијево поље $Q[\varepsilon]$, описано у пододељку 3.1.3) и тако даље, добијајући притом разне логике погодне за резоновање о вероватноћи израженој одговарајућим скупом. Такође, до посебних логика доводи и опредељење за једну од следећих могућности:

- дозвољене су итерације вероватноћа, тј. формуле облика $P_{\geqslant s}P_{\geqslant s'}\varphi$, и
- нису дозвољене итерације вероватноћа, тј. вероватносни оператори се могу примењивати само на класичне формуле, нити је дозвољено мешање класичних и вероватносних формула, у смислу да се исказни везници могу примењивати или на вероватносне или на класичне формуле.

3.2.1 Логике са операторима за условну вероватноћу

Сматра се да формално резоновање о условној вероватноћи може бити од великог значаја у многим областима рачунарства и вештачке интелигенције. Многи истраживачи (на пример, Нилсон у [39, 40]) сматрају да „вероватноћа од β под условом α" много више одражава оно што мислимо о сигурношћу неког правила облика „ако α, онда β", него „вероватноћа од $\alpha \to \beta$". У вероватносним генерализацијама немонотоних правила закључивања користе се разни приступи условним вероватноћама; на пример приступ Колмогорова у [33], де Финетијев у [16]. Ипак, упркос значају условних вероватноћа у „несигурном" закључивању, нема много радова у којима се разматра условна вероватноћа са чисто логичке тачке гледишта. У [18, 19] описани су разни системи (на семантичком нивоу) погодни за немонотоно закључивање по правилима која се заснивају на неким особинама условних вероватноћа. У [12] уведена је логика погодна за формално резоновање о условним вероватноћама, при чему су коришћена реално затворена поља да би се добио сагласан и потпун аксиоматски систем. У [6] опширно, али само на семантичком нивоу, разматране су условне вероватноће према идејама де Финетија. Коришћењем истог приступа у [34] уведена је једна врста фази-модалне логике у којој се, за сваки пар формула α и β, „вероватноћа од α под условом β" узима за истинитосну вредност (фази) модалног изказа $P(\alpha \mid \beta)$. Сличан приступ се може наћи у [14] где се разматрају нестандардне условне вероватноће са аспекта фази логике. Употреба неархимедских поља узрокована је тешкоћама које изазивају догађаји чија је вероватноћа једнака нули: једино немогућ догађај има вероватноћу једнаку нули, док сви остали имају позитивне, можда и бесконачно мале, вероватноће. Иста идеја са неархимедским пољима коришћена је и у [50, 51] где су разматране логике које садрже неколико типова вероватносних оператора (укључујући и оператор облика „вероватноћа од α под условим β је s"). За кодомен вероватноће узет је јединични интервал рекурзивног неархимедског поља $Q[\varepsilon]$, па је могуће увести и вероватносни оператор са значењем „вероватноће од $\alpha \wedge \beta$ и β су скоро једнаке" што је погодан формални оквир за закључивање по тзв. дифолт-правилима.

У наредна два одељка, биће представљене две вероватносне логике L^K_{CP} и L^F_{CP}, сличне логикама представљеним у [12, 13, 35, 39, 45, 46, 48]. Логика L^K_{CP} је заснована на приступу Колмогорова, док је L^F_{CP} базирана на де Финетијевом приступу условним вероватноћама. Одговарајући језици добијени су проширивањем језика класичног исказног рачуна вероватносним операторима. Тако, разматраћемо формуле облика $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ са значењем „вероватноћа од α под условом β није мања од s". Будући да су и ови вероватносни оператори слични модалним, за давање значења формулама користићемо моделе сличне Крипкеовим, осим што ћемо уместо релације достижности дефинисати вероватноћу над подскуповима скупа могућих светова. У проучавању ових логика, нагласак ћемо ставити на давање потпуних аксиоматизација у односу на поменуте класе модела и на проблеме одлучивости. Следећи [35, 45, 46, 48, 51], за сваку од логика L^K_{CP} и L^F_{CP}, даћемо бесконачну аксиоматизацију и доказати јаку потпуност у односу на уведену класу модела („Сваки непротивречан скуп формула има модел"). Нагласимо да се појмови „коначно" и „бесконачно" односе једино на метајезик, тј. објект језик је пребројив, формуле су коначни низови симбола, док су једино докази бесконачни. Потреба за бесконачношћу је последица неважења теореме компактности за вероватносне логике овог типа. Како је указано у [20, 46], непријатна последица коначне аксиоматизације (на пример, у логикама представљеним у [12, 34]) је да: постоји незадовољив скуп формула који је непротивречан у односу на претпостављену коначну аксиоматизацију. Касније ће бити дат и пример таквог скупа формула. Изгледа да је једини начин да се избегне непротивречност таквих скупова увођење бесконачних логика.

Напоменимо да, иако је логика L^K_{CP} заправо једно проширење логика приказаних у [45, 46, 48], постоје извесне разлике међу одговарајућим моделима. Релација задовољења у [45, 46, 48] је релација између модела и формула, док се код ових логика релација задовољења дефинише између светова неког модела и формула. Што се логике L^K_{CP} тиче задовољивост се може дефинисати на оба начина, међутим, наилази се на извесне тешкоће техничке природе када је у питању логика L^F_{CP}. Због једноликости у третирању задовољивости код ових логика, увешћемо у оба случаја релацију задовољења као релацију између светова модела и формула. Слична семантика разматрана је и у [17].

За сваку од логика L^K_{CP} и L^F_{CP} биће показана и одлучивост као последица чињенице да се проблем задовољивости L^K_{CP}- и L^F_{CP}-формула може свести на решавање коначног система линеарних једначина и неједначина са рационалним коефицијентима.

Интересантно је поменути да су логике L^K_{CP} и L^F_{CP} у извесном смислу неупоредиве, тј. да постоји формула која је L^K_{CP}-ваљана, али није и L^F_{CP}-ваљана, и обрнуто, да постоји L^F_{CP}-ваљана формула која није L^K_{CP}-ваљана.

Логика L^K_{CP}

Синтакса

Језик логике L^K_{CP} садржи пребројив скуп $I = \{p_1, p_2, \dots\}$ исказних слова, класичне везнике $\wedge$ и $\neg$, листе унарних $P_{\geqslant s}$ и бинарних вероватносних оператора $CP_{\geqslant s}$, за сваки рационалан број $s \in [0,1]$ и бинарни вероватносни оператор $CP_{\leqslant 0}$.

Скуп $For^C(L^K_{CP})$ класичних исказних формула је дефинисан индуктивно као најмањи скуп X који садржи исказна слова и затворен је за следећа правила: ако α и β припадају X, тада су $\neg\alpha$ и $\alpha \wedge \beta$ такође у X. Елементе скупа $For^C(L^K_{CP})$ означаваћемо малим словима грчког алфабета: $\alpha, \beta, \dots$ Скуп $For^P(L^K_{CP})$ свих вероватносних формула је најмањи скуп Y који садржи формуле облика: $P_{\geqslant s}\alpha$, $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, $CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta)$, за све $\alpha, \beta \in For^C_{L^K_{CP}}$ и сваки рационалан број s из $[0,1]$, и затворен је за следећа правила: ако A и B припадају Y, тада су и $\neg A$ и $A \wedge B$ у Y. Формуле скупа $For^P(L^K_{CP})$ означаваћемо великим словима латинице: A, B, ... Нека је $For(L^K_{CP}) = For^C(L^K_{CP}) \cup For^P(L^K_{CP})$. Формуле из $For(L^K_{CP})$ ћемо означавати са: $\Phi, \Psi, \dots$

Приметимо да није дозвољено мешање класичних исказних и вероватносних формула, нити је дозвољена итерација вероватносних оператора. На пример, $\neg P_{\geqslant 0.5}p_1 \wedge CP_{\geqslant 1}(p_1 \rightarrow p_2 \mid p_2)$ је формула логике L^K_{CP}, док $CP_{\geqslant 0.5}(p_1 \mid CP_{\geqslant 0.5}(p_1 \mid P_{\geqslant 1}p_1))$ и $p_1 \wedge P_{\geqslant 1}p_1$ то нису.

Остале исказне везнике $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ уводимо на уобичајен начин. За сваки рационалан број s из $[0,1]$ уводимо нове вероватносне операторе:

$$\begin{aligned} P_{<s}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg P_{\geqslant s}(\alpha), & P_{\leqslant s}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} P_{\geqslant 1-s}(\neg\alpha), \\ P_{>s}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg P_{\leqslant s}(\alpha), & P_{=s}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} P_{\geqslant s}(\alpha) \wedge P_{\leqslant s}(\alpha), \end{aligned}$$

а такође и:

$$\begin{aligned} CP_{<s}(\alpha \mid \beta) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta), & CP_{\leqslant s}(\alpha \mid \beta) &\stackrel{\text{def}}{=} CP_{\geqslant 1-s}(\neg\alpha \mid \beta) \text{ за } s \neq 0, \\ CP_{>s}(\alpha \mid \beta) &\stackrel{\text{def}}{=} \neg CP_{\leqslant s}(\alpha \mid \beta), & CP_{=s}(\alpha \mid \beta) &\stackrel{\text{def}}{=} CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \wedge CP_{\leqslant s}(\alpha \mid \beta). \end{aligned}$$

За $\alpha \in For^C(L^K_{CP})$ и $A \in For^P(L^K_{CP})$, и формулу $\alpha \wedge \neg\alpha$ и формулу $A \wedge \neg A$ означаваћемо са $\perp$, остављајући да контекст одреди значење, док ће $\top$ означавати $\neg\perp$.

Семантика

За давање значења формулама користићемо моделе у којима је вероватноћа дефинисана над могућим световима. Ови модели подсећају на Крипкеове моделе, али уместо релације достижности дефинисана је вероватноћа над подскуповима скупа светова.

Дефиниција 3.2.1. *L^K_{CP}-модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, где је:*

- W *нейразан скуй објекайа које називамо свейовима,*
- $\mathcal{F}$ *алгебра йодскуйова од* W,
- μ *коначно-адийивна верованйноћа,* $\mu : \mathcal{F} \to [0,1]$,
- $v : W \times I \to \{true, false\}$ *йресликавање које сваком свейу* $w \in W$ *додељује једну класичну (дво-вредносну) валуацију исказних слова; свака валуација* $v(w,\cdot)$ *се на уобичајен начин йроширује на све класичне формуле.*

Ако је $\mathbf{M}$ неки L^K_{CP}–модел и $\alpha \in For^C(L^K_{CP})$, скуп $\{w : v(w,\alpha) = true\}$ означаваћемо са $[\alpha]_{\mathbf{M}}$. Индекс $\mathbf{M}$ ћемо често изостављати и писати једноставно $[\alpha]$, кад год је из контекста јасно о ком моделу $\mathbf{M}$ је реч. За L^K_{CP}–модел $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ кажемо да је *мерљив*, ако $[\alpha]_{\mathbf{M}} \in \mathcal{F}$ за сваку формулу $\alpha \in For^C(L^K_{CP})$. Ограничићемо се само на класу мерљивих L^K_{CP}-модела, коју ћемо означавати са $\mathrm{Meas}(L^K_{CP})$.

Ако је $\mu([\beta]) > 0$, писаћемо $\mu([\alpha],[\beta])$ уместо $\dfrac{\mu([\alpha]\cap[\beta])}{\mu([\beta])}$.

Дефиниција 3.2.2. *Релација задовољења исйуњава следеће услове: за сваки* L^K_{CP}–*модел* $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ *и сваки свей* $w \in W$:

- *ако* $\alpha \in For^C(L^K_{CP})$, $\mathbf{M}, w \models \alpha$ *акко* $v(w,\alpha) = true$,
- *ако* $\alpha \in For^C(L^K_{CP})$, $\mathbf{M}, w \models P_{\geqslant s}\alpha$ *акко* $\mu([\alpha]) \geqslant s$,
- $\alpha, \beta \in For^C(L^K_{CP})$, $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ *акко или је* $\dfrac{\mu([\alpha]\cap[\beta])}{\mu([\beta])} \geqslant s$ *и* $\mu([\beta]) > 0$, *или је* $\mu([\beta]) = 0$,
- $\alpha, \beta \in For^C(L^K_{CP})$, $\mathbf{M}, w \models CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta)$ *акко* $\mu([\alpha]\cap[\beta]) = 0$ *и* $\mu([\beta]) > 0$,
- *ако* $A \in For^P(L^K_{CP})$, $\mathbf{M}, w \models \neg A$ *акко* $\mathbf{M}, w \not\models A$,
- *ако* $A, B \in For^P_{L^K_{CP}}$, $\mathbf{M}, w \models A \wedge B$ *акко* $\mathbf{M}, w \models A$ *и* $\mathbf{M}, w \models B$.

Формула $\Phi \in For(L^K_{CP})$ *је* ***задовољива*** *ако йосйоји мерљив* L^K_{CP}-*модел* $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, *и свей* $w \in W$ *йакви да* $\mathbf{M}, w \models \Phi$; Φ *је ваљана у мерљивом* L^K_{CP}-*моделу* $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ *(у ознаци* $\mathbf{M} \models \Phi$*), ако за сваки свей* $w \in W$, $\mathbf{M}, w \models \Phi$; Φ *је* ***ваљана*** *ако за сваки мерљив* L^K_{CP}-*модел* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \models \Phi$; *скуй* T *формула је задовољив ако йосйоји мерљив* L^K_{CP}-*модел* $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, *и свей* $w \in W$ *йакви да* $\mathbf{M}, w \models \Phi$ *за свако* $\Phi \in T$.

Аксиомайски сисйем

Аксиоматски систем $Ax(L^K_{CP})$ за логику L^K_{CP} садржи следеће схеме аксиома:

1. све $For^C(L^K_{CP})$-инстанце класичних исказних таутологија,
2. све $For^P(L^K_{CP})$-инстанце класичних исказних таутологија,
3. $P_{\geqslant 0}\alpha$,

4. $P_{\leqslant r}\alpha \rightarrow P_{<s}\alpha, s > r$,
5. $P_{<s}\alpha \rightarrow P_{\leqslant s}\alpha$,
6. $(P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \rightarrow P_{\geqslant \min(1,r+s)}(\alpha \vee \beta)$,
7. $(P_{\leqslant r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \rightarrow P_{<r+s}(\alpha \vee \beta), r + s \leqslant 1$,
8. $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \wedge P_{\geqslant t}\beta \rightarrow P_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta), t > 0$,
9. $(P_{=0}(\alpha \wedge \beta) \wedge P_{>0}\beta) \leftrightarrow CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta)$,

и следећа правила извођења:

1. из Φ и $\Phi \rightarrow \Psi$, закључујемо Ψ, ако $\Phi, \Psi \in For^C(L^K_{CP})$ или $\Phi, \Psi \in For^P(L^K_{CP})$,
2. из α, закључујемо $P_{\geqslant 1}\alpha$,
3. из $A \rightarrow P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha$, за сваки природан број $k \geqslant \frac{1}{s}$, закључујемо $A \rightarrow P_{\geqslant s}\alpha$.
4. из $A \rightarrow (P_{\geqslant r}\beta \rightarrow P_{\geqslant r\cdot s}(\alpha \wedge \beta))$, за сваки рационалан број r из $[0, 1]$, закључујемо $A \rightarrow CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$.

$Ax(L^K_{CP})$ представља проширење аксиоматског система вероватносних логика, без оператора за условну вероватноћу, разматраних у [46]. Нове аксиоме 8 и 9, као и правило 4 изражавају стандардну дефиницију условне вероватноће. Правило 4 повезује унарне и бинарне вероватносне операторе. Приметимо да су правила 3 и 4 бесконачна.

Дефиниција 3.2.3. *Формула Φ је* ***доказива*** *из скупа формула T ($T \vdash \Phi$) ако постоји највише пребројив низ формула $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi$, такав да је свака формула Φ_i аксиома или припада скупу T или се може добити из претходних формула низа применом неког од правила извођења.*

Формула Φ је ***теорема*** *($\vdash \Phi$) ако је доказива из празног скупа формула.*

Скуп формула T је ***непротивречан*** *ако постоји бар једна формула из $For^C(L^K_{CP})$ и бар једна формула из $For^P(L^K_{CP})$ која није доказива из T; у супротним, T је* ***противречан*** *скуп.*

Непротивречан скуп формула T је ***максимално непротивречан*** *ако важи:*

- *за сваку формулу $\alpha \in For^C(L^K_{CP})$, ако $T \vdash \alpha$, тада $\alpha \in T$ и $P_{\geqslant 1}\alpha \in T$, и*
- *за сваку формулу $A \in For^P(L^K_{CP})$, или $A \in T$ или $\neg A \in T$.*

Скуп T је ***дедуктивно затворен*** *ако за сваку формулу $\Phi \in For(L^K_{CP})$ важи: ако $T \vdash \Phi$, тада $\Phi \in T$.*

Потпуност

Сада, следећи идеје из [45, 48, 51], није тешко доказати теорему потпуности за $\mathrm{Meas}(L_{CP}^K)$.

Теорема 3.2.1. (Теорема сагласности) *Аксиоматски систем* $Ax(L_{CP}^K)$ *је сагласан са класом модела* $\mathrm{Meas}(L_{CP}^K)$.

Доказ. Сагласност нашег система произилази из теореме сагласности класичног исказног рачуна и одговарајућих особина вероватноће. Наиме, треба доказати да аксиоме важе у сваком мерљивом L_{CP}^K-моделу и да правила извођења чувају ваљаност.

Лако се види да за сваку инстанцу класичне исказне таутологије α и сваки мерљив L_{CP}^K-модел $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, и сваки свет $w \in W$, $\mathbf{M}, w \models \alpha$. Аксиоме 3-9 се односе на особине вероватноће и очигледно важе у сваком моделу. Размотримо, на пример, аксиому 7. Из $[\alpha] = ([\alpha] \cap (W \setminus [\beta])) \cup [\alpha]$, имамо да је $\mu([\alpha]) \geqslant \mu([\alpha] \cap (W \setminus [\beta]))$, за произвољне α и β. Из $[\alpha \vee \beta] = ([\alpha] \cap (W \setminus [\beta])) \cup [\beta]$, следи да је $\mu([\alpha \vee \beta]) \leqslant \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$, тј. да је аксиома 7 ваљана. Слично, из $\mu([\alpha], [\beta]) \cdot \mu([\beta]) = \mu([\alpha] \cap [\beta])$, $\mu([\beta]) > 0$, следи да су аксиоме 8 и 9 ваљане. Ваљаност осталих аксиома доказује се на потпуно сличан начин.

Да правило 1 чува ваљаност доказује се као у класичном случају. Размотримо правило 2. Нека је α таутологија. Тада, за сваки мерљив L_{CP}^K-модел $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, $[\alpha] = W$ и $\mu(W) = 1$. Дакле, $P_{\geqslant 1}\alpha$ такође важи у моделу. Правило 3 чува ваљаност због познатих својстава скупа рационалних бројева.

Размотримо најзад правило 4. Нека је $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ произвољан мерљив L_{CP}^K-модел и $w \in W$ такав да $\mathbf{M}, w \models A \to (P_{\geqslant r}\beta \to P_{\geqslant r \cdot s}(\alpha \wedge \beta))$, за сваки рационалан број $r \in [0,1]$. Нека $\mathbf{M}, w \models A$. Ако је $\mu([\beta]) = 0$, тада $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \beta)$, и $\mathbf{M}, w \models A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$. Даље, нека је $\mu([\beta]) = r_0 > 0$. Будући да скуп претпоставки важи у свету w и $\mathbf{M}, w \models P_{\geqslant r}\beta$ за сваки рационалан $r \leqslant r_0$, мора бити $\mu([\alpha] \cap [\beta]) \geqslant r \cdot s$ (за $r \leqslant r_0$). Ако би било $\mu([\alpha], [\beta]) < s$, имали бисмо да је $\mu([\alpha] \cap [\beta]) = \mu([\alpha], [\beta]) \cdot \mu([\beta]) < s \cdot r_0$, тј. $\mathbf{M}, w \not\models P_{\geqslant s \cdot r_0}(\alpha \wedge \beta)$. Дакле, $\mu([\alpha], [\beta]) \geqslant s$ и $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \beta)$. □

Теорема 3.2.2. *1.* **(Теорема дедукције)** *Ако је T скуп формула и Φ и Ψ или обе класичне или обе вероватносне формуле, тада из $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$, следи $T \vdash \Phi \to \Psi$.*

2. Нека су α и β класичне формуле. Тада важи:

(*i*) $\vdash P_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geqslant s}\alpha \to P_{\geqslant s}\beta)$,

(*ii*) $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant s}\alpha$, $r > s$,

(*iii*) *ако је $\alpha \to \beta$ класична таутологија, тада* $\vdash CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \alpha)$,

(*iv*) $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \beta) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$,

(*v*) $\vdash P_{=0}\beta \to CP_{=1}(\alpha \mid \beta)$.

Доказ. (1) Доказ ћемо извести коришћењем трансфинитне индукције по дужини доказа за Ψ из скупа $T \cup \{\Phi\}$. Ако је дужина доказа 1, имамо следећа три случаја:
1°: Ψ је аксиома. Према аксиоми 1 или 2 имамо да је $\vdash \Psi \to (\Phi \to \Psi)$ и како је $\vdash \Psi$, следи $\vdash \Phi \to \Psi$. Дакле $T \vdash \Phi \to \Psi$.

2°: $\Psi \in T$. Овај случај је потпуно сличан претходном.
3°: $\Psi = \Phi$. Према аксиоми 1 или 2 имамо $\vdash \Phi \to \Psi$; Дакле $T \vdash \Phi \to \Psi$.

Претпоставимо сада да је $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ и да теорема важи за све формуле доказиве из $T \cup \{\Phi\}$ а чија је дужина доказа мања од дужине доказа формуле Ψ из $T \cup \{\Phi\}$. Ако је Ψ аксиома или $\Psi \in T$ или $\Psi = \Phi$, показује се $T \vdash \Phi \to \Psi$ потпуно слично као у случајевима $1^\circ - 3^\circ$. Размотримо случајеве када је Ψ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом неког од правила извођења. Ако је Ψ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила 1 на формуле Θ анд $\Theta \to \Psi$, тада према индукцијској претпоставци имамо да је $T \vdash \Phi \to \Theta$ анд $T \vdash \Phi \to (\Theta \to \Psi)$. Према аксиоми 1 или 2, имамо да је $\vdash (\Phi \to (\Theta \to \Psi)) \to ((\Phi \to \Theta) \to (\Phi \to \Psi))$. Двоструком применом правила 1 добијамо $T \vdash \Phi \to \Psi$. Претпоставимо да је $\Psi = P_{\geqslant 1}\alpha$ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила 2 и да $\Phi \in For^P(L^K_{CP})$. Тада је $T, \Phi \vdash \alpha$ и $T, \Phi \vdash P_{\geqslant 1}\alpha$, према правилу 2. Како $\alpha \in For^C(L^K_{CP})$ и $\Phi \in For^P(L^K_{CP})$, Φ не утиче на доказ за α из $T \cup \{\Phi\}$, па имамо:
$T \vdash \alpha$
$T \vdash P_{\geqslant 1}\alpha$ (према правилу 2)
$T \vdash P_{\geqslant 1}\alpha \to (\Phi \to P_{\geqslant 1}\alpha)$
$T \vdash \Phi \to P_{\geqslant 1}\alpha$ (према правилу 1).

Даље, претпоставимо да је $\Psi = A \to P_{\geqslant s}\alpha$ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила 3 и $\Phi \in For^P(L^K_{CP})$. Тада:
$T, \Phi \vdash A \to P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha$, за сваки природан број $k \geqslant \frac{1}{s}$,
$T \vdash \Phi \to (A \to P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha)$, за сваки природан број $k \geqslant \frac{1}{s}$, (по индукцијској претпоставци)
$T \vdash (\Phi \land A) \to P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha$, за сваки природан број $k \geqslant \frac{1}{s}$,
$T \vdash (\Phi \land A) \to P_{\geqslant s}\alpha$ (према правилу 3)
$T \vdash \Phi \to \Psi$.

Најзад, претпоставимо да је $\Psi = A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ добијено из $T \cup \{\Phi\}$ применом правила 4 и да $\Phi \in For^P(L^K_{CP})$. Тада:
$T, \Phi \vdash A \to (P_{\geqslant r}\beta \to P_{\geqslant r\cdot s}(\alpha \land \beta))$, за сваки рационалан број r из $(0, 1)$,
$T \vdash \Phi \to (A \to (P_{\geqslant r}\beta \to P_{\geqslant r\cdot s}(\alpha \land \beta)))$, за свако r, (према индукцијској претпоставци)
$T \vdash (\Phi \land A) \to (P_{\geqslant r}\beta \to P_{\geqslant r\cdot s}(\alpha \land \beta))$, за свако r,
$T \vdash (\Phi \land A) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ (према правилу 4)
$T \vdash \Phi \to \Psi$.
(2.i) Ако је $s = 0$, тврђење очигледно важи. Нека је s рационалан број из $(0, 1]$. Приметимо најпре да је, према правилу 2:

$$\vdash P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \lor \neg\bot) \tag{1}$$

због $\vdash \neg\alpha \lor \neg\bot$. Слично, из $\vdash (\neg\alpha \land \neg\bot) \lor \neg\neg\alpha$, добијамо

$$\vdash P_{\geqslant 1}((\neg\alpha \land \neg\bot) \lor \neg\neg\alpha). \tag{2}$$

Према аксиоми 6, имамо да је

$$\vdash (P_{\geqslant s}\alpha \land P_{\geqslant 0}\neg\bot \land P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \lor \neg\bot)) \to P_{\geqslant s}(\alpha \lor \bot).$$

Пошто је $\vdash P_{\geqslant 0}\neg\bot$, према аксиоми 3, из (1) следи

$$\vdash P_{\geqslant s}\alpha \to P_{\geqslant s}(\alpha \lor \bot). \tag{3}$$

Формуле $P_{\geqslant s}(\alpha \vee \bot)$ и $\neg P_{\geqslant s}(\neg\neg\alpha)$ можемо заменити са $P_{\leqslant 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot)$ и $P_{<s}(\neg\neg\alpha)$, редом. Према аксиоми 7, имамо

$$\vdash (P_{\leqslant 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\alpha) \rightarrow P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha).$$

Из (2) добијамо да је

$$\vdash (P_{\leqslant 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\alpha) \rightarrow (P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha) \wedge \neg P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha).$$

Дакле, $\vdash P_{\leqslant 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \rightarrow \neg P_{<s}(\neg\neg\alpha)$, тј.

(4) $$\vdash P_{\geqslant s}(\alpha \vee \bot) \rightarrow P_{\geqslant s}\neg\neg\alpha.$$

Из (3) и (4) добијамо

(5) $$\vdash P_{\geqslant s}\alpha \rightarrow P_{\geqslant s}\neg\neg\alpha.$$

Негација формуле $P_{\geqslant 1}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (P_{\geqslant s}\alpha \rightarrow P_{\geqslant s}\beta)$ еквивалентна је са

$$P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\geqslant s}\alpha \wedge P_{<s}\beta.$$

Према (5), из последње формуле добијамо $P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\geqslant s}\neg\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta$, што можемо записати и у следећем облику $P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\leqslant 1-s}\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta$. Према аксиоми 7 је

$$\vdash P_{\leqslant 1-s}\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta \rightarrow P_{<1}(\neg\alpha \vee \beta),$$

па имамо:

$$\vdash \neg(P_{\geqslant 1}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (P_{\geqslant s}\alpha \rightarrow P_{\geqslant s}\beta)) \rightarrow P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \beta),$$

што је контрадикција. Дакле, $\vdash P_{\geqslant 1}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (P_{\geqslant s}\alpha \rightarrow P_{\geqslant s}\beta)$.

(2.*ii*) Према аксиомама 4 и 5, имамо да је $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \rightarrow P_{>s}\alpha$, за $r > s$, и $\vdash P_{>s}\alpha \rightarrow P_{\geqslant s}\alpha$. Дакле, $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \rightarrow P_{\geqslant s}\alpha$, за $r > s$.

(2.*iii*) Нека је $\alpha \rightarrow \beta$ класична таутологија. Тада је $\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$, па, према правилу 2, имамо $\vdash P_{\geqslant 1}(\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$. Из (2.*i*) следи $\vdash P_{\geqslant r}\alpha \rightarrow P_{\geqslant r\cdot 1}(\alpha \wedge \beta)$, за сваки рационалан број r. Према правилу 4 ($s = 1$), добијамо $\vdash CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \alpha)$.

(2.*iv*) Према аксиоми 8 имамо $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \beta) \rightarrow (P_{\geqslant t}\beta \rightarrow P_{\geqslant t}(\alpha \wedge \beta))$, за сваки рационалан $t > 0$. Према (2.*ii*) имамо да је $\vdash P_{\geqslant t}(\alpha \wedge \beta) \rightarrow P_{\geqslant t\cdot s}(\alpha \wedge \beta)$. Дакле, $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \beta) \rightarrow (P_{\geqslant t}\beta \rightarrow P_{\geqslant t\cdot s}(\alpha \wedge \beta))$, за сваки $t \geqslant 0$. Применом правила 4 добијамо $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \beta) \rightarrow CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$.

(2.*v*) Није тешко показати (видети [46]) да из аксиома 1 - 7 и правила 1 - 2 следи:
$\vdash P_{=0}\beta \rightarrow P_{=0}(\alpha \wedge \beta)$ и
$\vdash P_{=0}\beta \rightarrow \neg P_{\geqslant r}\beta$ за сваки рационалан $r \in (0, 1]$.
Тако, за $s = 1$ и сваки $r \in [0, 1]$ имамо:
$\vdash P_{=0}\beta \rightarrow (P_{\geqslant r}\beta \rightarrow P_{\geqslant r}(\alpha \wedge \beta))$
$\vdash P_{=0}\beta \rightarrow CP_{=1}(\alpha \mid \beta)$, према правилу 4. □

Важан корак до доказа теореме потпуности је конструкција максимално непротивречног проширења неког непротивречног скупа.

Теорема 3.2.3. *Сваки непротивречан скуп формула може се проширити до максимално непротивречног скупа.*

Доказ. Нека је T непротивречан скуп формула, $Con^C(T)$ скуп свих класичних последица скупа T, а $A_0, A_1, \ldots$, једно набрајање свих вероватносних формула из $For^P(L^K_{CP})$. Дефинишимо низ скупова T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, тако да је:

1. $T_0 = T \cup Con^C(T) \cup \{P_{\geqslant 1}\alpha : \alpha \in Con^C(T)\}$,
2. за сваки $i \geqslant 0$, ако је $T_i \cup \{A_i\}$ непротивречан скуп, тада је $T_{i+1} = T_i \cup \{A_i\}$, иначе је $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i\}$,
3. ако је $A_i = B \to P_{\geqslant s}\alpha$, а $T_i \cup \{A_i\}$ је противречан скуп, тада за неки природан број n, скупу T_{i+1} додајемо формулу $B \to \neg P_{\geqslant s-\frac{1}{n}}\alpha$ тако да је T_{i+1} непротивречан,
4. ако је $A_i = B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, а $T_i \cup \{A_i\}$ противречан скуп, тада за неки рационалан број r' из $(0,1)$, формулу $B \to \neg(P_{\geqslant r'}\beta \to P_{\geqslant r'\cdot s}(\alpha \wedge \beta))$ додајемо скупу T_{i+1}, тако да он буде непротивречан.

Скупови добијени у корацима 1 и 2 су очигледно непротивречни. Ако је $T_i, A_i \vdash \bot$, према теореми дедукције имамо да $T_i \vdash \neg A_i$, а пошто је T_i непротивречан скуп, то је и скуп $T_i \cup \{\neg A_i\}$. Размотримо корак 3. Може се показати да, ако је $T_i \cup \{B \to P_{\geqslant s}\alpha\}$ противречан скуп, тада се скуп T_i може непротивречно проширити како је описано у 3. Заиста, ако то не би било могуће, имали бисмо:
$T_i, \neg(B \to P_{\geqslant s}\alpha), B \to \neg P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha \vdash \bot$, за сваки природан $k > \frac{1}{s}$ (према претпоставци)
$T_i, \neg(B \to P_{\geqslant s}\alpha) \vdash \neg(B \to \neg P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha)$, за сваки $k > \frac{1}{s}$ (према теореми дедукције)
$T_i, \neg(B \to P_{\geqslant s}\alpha) \vdash B \to P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha$, за сваки $k > \frac{1}{s}$ (према $\vdash \neg(p \to q) \to (p \to \neg q)$)
$T_i, \neg(B \to P_{\geqslant s}\alpha) \vdash B \to P_{\geqslant s}\alpha$ (према правилу 3)
$T_i \vdash \neg(B \to P_{\geqslant s}\alpha) \to B \to P_{\geqslant s}\alpha$ (према теореми дедукције)
$T_i \vdash B \to P_{\geqslant s}\alpha$.
Сада, пошто је $T_i \cup \{B \to P_{\geqslant s}\alpha\}$ противречан скуп, из $T_i \vdash B \to P_{\geqslant s}\alpha$ следи да је T_i такође противречан скуп, што је контрадикција. Дакле, у кораку 3 добијамо непротивречне скупове. Најзад, размотримо корак 4. Ако је скуп $T_i \cup \{\neg(B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta))\}$ противречан, тада се T_i може непротивречно проширити како је описано у овом кораку. Ако претоставимо да то није могуће, слично као у претходном случају добијамо:
$T_i, \neg(B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)), B \to \neg(P_{\geqslant r}\beta \to P_{\geqslant r\cdot s}(\alpha \wedge \beta)) \vdash \bot$, за све r
$T_i, \neg(B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)) \vdash (B \to \neg(P_{\geqslant r}\beta \to P_{\geqslant r\cdot s}(\alpha \wedge \beta))) \to \bot$, за све r
$T_i, \neg(B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)) \vdash \neg(B \to \neg(P_{\geqslant r}\beta \to P_{\geqslant r\cdot s}(\alpha \wedge \beta)))$, за све r
$T_i, \neg(B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)) \vdash B \to (P_{\geqslant r}\beta \to P_{\geqslant r\cdot s}(\alpha \wedge \beta))$, за све r
$T_i, \neg(B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)) \vdash B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ (према правилу 4).
Дакле, и у кораку 4 добијамо непротивречне скупове.

Нека је $\overline{T} = \cup_i T_i$. Показаћемо да је $\overline{T}$ дедуктивно затворен скуп који не садржи све формуле, тј. $\overline{T}$ је непротивречан. Ако $\alpha \in For^C(L^K_{CP})$, према дефиницији скупа T_0, α и $\neg\alpha$ не могу истовремено припадати скупу T_0. Такође, ако $A \in For^P(L^K_{CP})$, скуп $\overline{T}$ не садржи обе формуле $A = A_i$ и $\neg A = A_j$, јер је $T_{\max\{i,j\}+1}$ непротивречан скуп.

Приметимо да за сваку формулу $\Phi \in For^C(L^K_{CP})$, ако $T_i \vdash \Phi$, тада $\Phi \in \overline{T}$. Заиста, ако за класичну формулу Φ важи $T_i \vdash \Phi$, тада је и $T \vdash \Phi$, па $\Phi \in T_0$. Ако је Φ вероватносна формула, $\Phi = A_k$, $T_i \vdash \Phi$ и $\Phi \notin \overline{T}$, тада $T_{\max\{i,k\}+1} \vdash \Phi$ и $T_{\max\{i,k\}+1} \vdash \neg\Phi$, што је контрадикција.

Претпоставимо $\overline{T} \vdash \Phi$. Ако $\Phi \in For^C(L^K_{CP})$, тада $T_0 \vdash \Phi$, па резонујући као горе, закључујемо да $\Phi \in \overline{T}$. Нека је $\Phi \in For^P(L^K_{CP})$. Претпоставимо да је низ формула $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi$ доказ формуле Φ из $\overline{T}$ и да је пребројиво бесконачан (иначе би постојао неки k такав да $T_k \vdash \Phi$ одакле директно следи да $\Phi \in \overline{T}$). Показаћемо да за сваки i, ако је Φ_i добијено помоћу неког од правила извођења и све претпоставке припадају $\overline{T}$, тада $\Phi_i \in \overline{T}$. Претпоставимо да је Φ_i добијено применом правила 1 и да његове претпоставке Φ_i^1 и Φ_i^2 припадају $\overline{T}$. Тада постоји k такав да $\Phi_i^1, \Phi_i^2 \in T_k$. Пошто $T_k \vdash \Phi_i$, имамо да $\Phi_i \in \overline{T}$. Ако је Φ_i добијено применом правила 2, тада претпоставка припада T_0, па исто важи и за Φ_i. Нека је $\Phi_i = B \to P_{\geqslant s}\alpha$ добијено применом бесконачног правила 3 на претпоставке $\Phi_i^1 = B \to P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha, \Phi_i^2 = B \to P_{\geqslant s-\frac{1}{k+1}}\alpha, \ldots$ које све припадају скупу $\overline{T}$. Ако $\Phi_i \notin \overline{T}$, према кораку 3 конструкције скупа $\overline{T}$, постоји $j > \frac{1}{s}$, такав да $B \to \neg P_{\geqslant s-\frac{1}{j}}\alpha \in \overline{T}$. Такође, постоји m такав да $B \to P_{\geqslant s-\frac{1}{j}}\alpha \in T_m$ и $B \to \neg P_{\geqslant s-\frac{1}{j}}\alpha \in T_m$. Дакле, $T_m \cup \{B\}$ је противречан скуп, па $T_m \vdash B \to C$, за сваку формулу $C \in For^P(L_{CP}^K)$. Сада имамо да $T_m \vdash B \to P_{\geqslant s}\alpha$ и $B \to P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}$, што је контрадикција. Најзад, претпоставимо да је $\Phi_i = B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ добијено применом бесконачног правила 4 на претпоставке $\Phi_i^j = B \to (P_{\geqslant r_j}\beta \to P_{\geqslant r_j \cdot s}(\alpha \wedge \beta)), j = 1, 2, \ldots$ које све припадају скупу $\overline{T}$ ($r_1, r_2, \ldots$ је једно набрајање свих рационалних бројева из $(0,1)$). Ако $B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \notin \overline{T}$, према конструкцији скупа $\overline{T}$, постоји рационалан број r_j, такав да $B \to \neg(P_{\geqslant r_j}\beta \to P_{\geqslant r_j \cdot s}(\alpha \wedge \beta)) \in \overline{T}$. Дакле, постоји T_m који садржи обе формуле: $B \to (P_{\geqslant r_j}\beta \to P_{\geqslant r_j \cdot s}(\alpha \wedge \beta))$ и $B \to \neg(P_{\geqslant r_j}\beta \to P_{\geqslant r_j \cdot s}(\alpha \wedge \beta))$. Резонујући као у претходном случају, закључујемо да $B \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$, што је контрадикција.

Дакле, из $\overline{T} \vdash \Phi$, следи $\Phi \in \overline{T}$, тј. скуп $\overline{T}$ је дедуктивно затворен. Пошто не садржи све формуле, $\overline{T}$ је и непротивречан скуп, док је према конструкцији максималан. □

У следећој теореми садржана су нека очигледна својства максимално непротивречних скупова формула.

Теорема 3.2.4. *Нека је $\overline{T}$ максимално непротивречан скуп формула. Нека су Φ и Ψ или обе класичне или обе вероватносне формуле и нека је α класична формула. Тада важи:*

1. *Ако $\Phi \in \overline{T}$, тада $\neg\Phi \notin \overline{T}$.*
2. *$\Phi \wedge \Psi \in \overline{T}$ акко $\Phi \in \overline{T}$ и $\Psi \in \overline{T}$.*
3. *Ако $\overline{T} \vdash \Phi$, тада $\Phi \in \overline{T}$, тј. $\overline{T}$ је дедуктивно затворен.*
4. *Ако $\Phi \in \overline{T}$ и $\Phi \to \Psi \in \overline{T}$, тада $\Psi \in \overline{T}$.*
5. *Ако $P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}$, и $s \geqslant r$, тада $P_{\geqslant r}\alpha \in \overline{T}$.*
6. *Ако је r рационалан број и $r = \sup\{s : P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}\}$, тада $P_{\geqslant r}\alpha \in \overline{T}$.*

Доказ. Илустрације ради, доказаћемо само 6. Нека је $r = \sup\{s : P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}\}$. Према правилу 3, $\overline{T} \vdash P_{\geqslant r}\alpha$, па, пошто је $\overline{T}$ дедуктивно затворен скуп, $P_{\geqslant r}\alpha \in \overline{T}$. Остала својства слично се доказују. □

Теорема 3.2.5. (Теорема потпуности) *Сваки непротивречан скуп формула T има мерљив L_{CP}^K-модел.*

Доказ. Ако је $\overline{T}$ максимално непротивречно проширење скупа T, дефинишимо структуру $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, на следећи начин:

- W је скуп свих класичних исказних интерпретација скупа I исказних слова,
- за сваку формулу $\alpha \in For^C(L_{CP}^K)$, нека је $[\alpha] = \{w \in W \mid w \models \alpha\}$ и $\mathcal{F} = \{[\alpha] \mid \alpha \in For^C(L_{CP}^K)\}$,
- нека је $\mu : \mathcal{F} \to [0,1]$ дато са $\mu([\alpha]) = \sup\{s : P_{\geqslant s}(\alpha) \in \overline{T}\}$,
- $v : W \times I \to \{true, false\}$ је пресликавање такво да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in I$ важи: $v(w,p) = true$ акко $w \models p$.

Приметимо да, пошто је свет w класична исказна интерпретација, у дефиницији структуре $\mathbf{M}$ са $w \models \alpha$ смо означили чињеницу да w задовољава α у смислу класичне исказне логике.

Најпре, треба да докажемо да је $\mathbf{M}$ један мерљив L_{CP}^K-модел. $\mathcal{F}$ је једна алгебра подскупова од W. Заиста, за сваку класичну формулу α, $W = [\alpha \vee \neg\alpha] \in \mathcal{F}$. Такође, ако $[\alpha] \in \mathcal{F}$, тада је комплемент од $[\alpha]$ скуп $[\neg\alpha]$ који припада $\mathcal{F}$. Најзад, ако $[\alpha_1], \ldots [\alpha_n] \in \mathcal{F}$, тада $[\alpha_1] \cup \ldots \cup [\alpha_n] \in \mathcal{F}$, јер $[\alpha_1] \cup \ldots \cup [\alpha_n] = [\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n]$. Дакле, $\mathcal{F}$ је алгебра подскупова од W. Даље, показаћемо да за све $\alpha, \beta \in For^C(L_{CP}^K)$ важи:

1. Ако је $[\alpha] = [\beta]$, тада је $\mu([\alpha]) = \mu([\beta])$,
2. $\mu([\alpha]) \geqslant 0$,
3. $\mu([\alpha]) = 1 - \mu([\neg\alpha])$,
4. $\mu([\alpha] \cup [\beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$, за све формуле α и β такве да је $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$,

тј. μ је коначно-адитивна вероватноћа на $\mathcal{F}$.

1. Довољно је доказати да из $[\alpha] \subset [\beta]$, следи $\mu([\alpha]) \leqslant \mu([\beta])$. Из $[\alpha] \subset [\beta]$, следи $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ и $\vdash P_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta)$. Ако је $P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}$, тада према теореми 3.2.2 (2.i), имамо $P_{\geqslant s}\beta \in \overline{T}$, одакле закључујемо да је $\mu([\alpha]) \leqslant \mu([\beta])$.

2. Пошто је $P_{\geqslant 0}\alpha$ аксиома, $\mu([\alpha]) \geqslant 0$.

3. Нека је $r = \mu([\alpha]) = \sup\{s : P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}\}$. Претопставимо да је $r = 1$. Тада, према теореми 3.2.4.(6) имамо $P_{\geqslant 1}\alpha = P_{\leqslant 0}\neg\alpha = \neg P_{>0}\neg\alpha$ и $\neg P_{>0}\neg\alpha \in \overline{T}$. Ако је за неко $s > 0$, $P_{\geqslant s}\neg\alpha \in \overline{T}$, према аксиоми 5, је $P_{>0}\neg\alpha \in w$, што је контрадикција. Дакле, $\mu([\neg\alpha]) = 1$. Претпоставимо да је $r < 1$. Тада, за сваки рационалан број $r' \in (r, 1]$, $\neg P_{\geqslant r'}\alpha = P_{<r'}\alpha$ и $P_{<r'}\alpha \in \overline{T}$. Према аксиоми 4, $P_{\leqslant r'}\alpha$ и $P_{\geqslant 1-r'}(\neg\alpha)$ припадају $\overline{T}$. Са друге стране, ако постоји рационалан број $r'' \in [0, r)$ такав да $P_{\geqslant 1-r''}(\neg\alpha) \in \overline{T}$, тада $\neg P_{>r''}\alpha \in \overline{T}$, што је контрадикција. Дакле, $\sup\{s : P_{\geqslant s}(\neg\alpha) \in \overline{T}\} = 1 - \sup\{s : P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}\}$.

4. Нека је $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$, $\mu([\alpha]) = r$ и $\mu([\beta]) = s$. Како је $[\beta] \subset [\neg\alpha]$, према управо доказаном својству 3, имамо да је $r + s \leqslant r + (1 - r) = 1$. Претпоставимо да је $r > 0$ и $s > 0$. Према познатом својству супремума и монотоности (теорема 3.2.2 (2.i)), за сваки рационалан број $r' \in [0, r)$ и сваки рационалан $s' \in [0, s)$, имамо $P_{\geqslant r'}\alpha, P_{\geqslant s'}\beta \in \overline{T}$. Према аксиоми 6, следи $P_{\geqslant r'+s'}(\alpha \vee \beta) \in \overline{T}$. Дакле, $r + s \leqslant \sup\{t : P_{\geqslant t}(\alpha \vee \beta) \in \overline{T}\}$. Ако је $r + s = 1$, тада тврђење тривијално следи. Претпоставимо да је $r + s < 1$. Ако $r + s < t_0 = \sup\{t : P_{\geqslant t}(\alpha \vee \beta) \in \overline{T}\}$, тада, за сваки рационалан број $t' \in (r + s, t_0)$, имамо $P_{\geqslant t'}(\alpha \vee \beta) \in \overline{T}$. Изаберимо рационалне бројеве $r'' > r$ и $s'' > s$ такве да важи: $\neg P_{\geqslant r''}\alpha, P_{<r''}\alpha \in \overline{T}, \neg P_{\geqslant s''}\beta, P_{<s''}(\beta) \in \overline{T}$ и $r'' + s'' = t' \leqslant 1$. Према аксиоми 5, $P_{\leqslant r''}\alpha \in \overline{T}$. Коришћењем аксиоме 7 имамо $P_{<r''+s''}(\alpha \vee \beta), \neg P_{\geqslant r''+s''}(\alpha \vee \beta)$ и $\neg P_{\geqslant t'}(\alpha \vee \beta) \in \overline{T}$, што је контрадикција. Дакле, $\mu([\alpha] \cup [\beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$. Најзад, ако претпоставимо да је $r = 0$ или $s = 0$, можемо резоновати слично као у претходном случају.

Дакле, M је један мерљив L^K_{CP}-модел. Доказаћемо да постоји свет w модела M такав да свака формула из $\overline{T}$ важи у w, тј. да је T задовољив скуп формула.

Позабавимо се најпре класичним формулама. Како је $Con^C(T)$ непротивречан скуп, он је задовољив на основу теореме потпуности за класичан исказни рачун, па постоји свет w, такав да $\mathbf{M}, w \models \alpha$, за сваку класичну формулу α која припада $\overline{T}$.

Показаћемо да за сваку формулу $A \in For^P(L^K_{CP})$, $\mathbf{M}, w \models A$ акко $A \in \overline{T}$.

Нека је $A = P_{\geqslant s}\alpha$. Ако $A \in \overline{T}$, $\sup\{r : P_{\geqslant r}\alpha \in \overline{T}\} = \mu([\alpha]) \geqslant s$, тада $\mathbf{M}, w \models P_{\geqslant s}\alpha$. Са друге стране, претпоставимо да $\mathbf{M}, w \models P_{\geqslant s}\alpha$, тј. да $\sup\{r : P_{\geqslant r}\alpha \in \overline{T}\} \geqslant s$. Ако је $\mu([\alpha]) > s$, тада, према познатом својству супремума и монотоности функције μ, $P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}$. Ако је $\mu([\alpha]) = s$, тада према теореми 3.2.4.(6), $P_{\geqslant s}\alpha \in \overline{T}$.

Нека је $A = CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta)$. Ако $A \in \overline{T}$, тада, према аксиоми 9, $P_{=0}(\alpha \wedge \beta), P_{>0}\beta \in \overline{T}$, тј. $\mu([\alpha] \cap [\beta]) = 0$ и $\mu([\beta]) > 0$. Дакле, $\frac{\mu([\alpha]\cap[\beta])}{\mu([\beta])} = 0$, па $\mathbf{M}, w \models CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta)$. Са друге стране, ако $\mathbf{M}, w \models CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta)$, тј. $\frac{\mu([\alpha]\cap[\beta])}{\mu([\beta])} \leqslant 0$, тада, према аксиоми 9, имамо да је $\mu([\beta]) > 0$ и $\mu([\alpha] \cap [\beta]) = 0$. Приметимо да постоји $t_0 \in (0, 1]$ такав да је $t_0 = \sup\{t : P_{\geqslant t}\beta \in \overline{T}\}$, као и да постоји рационалан број $t' > 0$ такав да $P_{\geqslant t'}\beta \in \overline{T}$. Дакле, $P_{>0}\beta \in \overline{T}$. Такође, слично претходном, $P_{=0}(\alpha \wedge \beta) \in \overline{T}$, одакле следи да $CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$.

Најзад, нека је $A = CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$. Претпоставимо да $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$. Тада или $P_{=0}\beta \in \overline{T}$ или $P_{=0}\beta \notin \overline{T}$. Ако $P_{=0}\beta \in \overline{T}$, тада $\mu([\beta]) = 0$, па $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, за све s. Ако $P_{=0}\beta \notin \overline{T}$, тада: $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ акко $\frac{\mu([\alpha]\cap[\beta])}{\mu([\beta])} \geqslant s$ акко $\mu([\alpha] \cap [\beta]) \geqslant s \cdot \mu([\beta])$. Нека је $t_0 = \mu([\beta]) > 0$. За свако $t < t_0$ имамо $P_{\geqslant t}\beta \in \overline{T}$ и $P_{\geqslant t\cdot s}(\alpha \wedge \beta) \in \overline{T}$ (према аксиоми 8 и $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$). Дакле, $\frac{\mu([\alpha]\cap[\beta])}{\mu([\beta])} \geqslant s$ и $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$. Нека је сада $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$. Ако $\mathbf{M}, w \models P_{=0}\beta$, тада $P_{=0}\beta \in \overline{T}$, па (према теореми 3.2.2. 2.v) $CP_{=1}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$. Како је $CP_{=1}(\alpha \mid \beta) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ за сваки s, $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$. Ако $\mathbf{M}, w \not\models P_{=0}\beta$, тада $\mu([\beta]) = t_0 > 0$. Нека је $\mu([\alpha] \cap [\beta]) = r$. Тада, имамо $\frac{r}{t_0} \geqslant s$, тј. $r \geqslant t_0 \cdot s$ (јер је $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, односно $\frac{\mu([\alpha]\cap[\beta])}{\mu([\beta])} \geqslant s$). За све рационалне бројеве $t' \leqslant t_0$ и $r' \leqslant r$, имамо $P_{\geqslant t'}\beta, P_{\geqslant r'}(\alpha \wedge \beta) \in \overline{T}$. Такође, за сваки $t' > t_0$, $\neg P_{\geqslant t'}\beta \in \overline{T}$. Дакле, за сваки $t' \leqslant t_0$, $P_{\geqslant t'}\beta \to P_{\geqslant t'\cdot s}(\alpha \wedge \beta) \in \overline{T}$ ($t' \cdot s \leqslant t \cdot s \leqslant r$), и за сваки $t' > t$, $P_{\geqslant t'}\beta \to P_{\geqslant t'\cdot s}(\alpha \wedge \beta) \in \overline{T}$ (јер $\neg P_{\geqslant t'}\beta \in \overline{T}$). Сада, према правилу 4, добијамо $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$. □

Одлучивост

Како је класичан исказни рачун одлучив, испитаћемо да ли је проблем задовољивости вероватносних формула одлучив. Биће коришћене неке методе линеарног програмирања.

Нека је $A \in For^P_{L^K_{CP}}$ вероватносна формула и нека су $p_1, \ldots, p_n$ сва исказна слова која учествују у грађењу формуле A. Атомом од A назваћемо сваку од формула облика $\pm p_1 \wedge \ldots \pm p_n$, где је $\pm p_i$ или p_i или $\neg p_i$. Ако су a_i и a_j различити атоми, тада је $\vdash a_i \to \neg a_j$. Дакле, у сваком мерљивом L^K_{CP}-моделу важи $\mu(a_i \vee a_j) = \mu(a_i) + \mu(a_j)$. Може се доказати, потпуно слично као за класичне исказне формуле, уз коришћење чињенице да из $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, следи $\vdash P_{\geqslant s}\alpha \leftrightarrow P_{\geqslant s}\beta$, да је (било која) вероватносна формула A еквивалентна формули:

$$DNF(A) = \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k_i} X_{i,j}(p_1, \ldots, p_n)$$

коју називамо *дисјунктивна нормална форма* од A, при чему је : $X_{i,j}$ неки вероватносни оператор из скупа $\{P_{\geqslant s_{i,j}}, P_{<s_{i,j}}, CP_{\geqslant s_{i,j}}, CP_{<s_{i,j}}, CP_{\leqslant 0}, \neg CP_{\leqslant 0}\}$ ($s_{i,j}$ је рационалан број из $[0,1]$), а $X_{i,j}(p_1,\dots,p_n)$ означава да је класична формула која је под дејством оператора $X_{i,j}$ записана у облику дисјунктивне нормалне форме, тј. да је представљена као дисјункција неких атома од A и да су сва исказна слова која учествују у грађењу те класичне формуле нека од $p_1,\dots,p_n$.

Теорема 3.2.6. *Логика L_{CP}^K је одлучива.*

Доказ. Нека је $DNF(A) = \bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^{k_i} X_{i,j}(p_1,\dots,p_n)$ дисјунктивна нормална форма вероватносне формуле A. Формула A је задовољива ако и само ако је бар један дисјункт у $DNF(A)$ задовољив. Нека је $\pm P_{\geqslant r_1}\alpha_1, \dots, \pm P_{\geqslant r_a}\alpha_a, \pm CP_{\geqslant s_1}(\beta_1 \mid \gamma_1), \dots, \pm CP_{s_b}(\beta_b \mid \gamma_b), \pm CP_{\leqslant 0}(\delta_1 \mid \eta_1), \dots, \pm CP_{\leqslant 0}(\delta_c \mid \eta_c)$, $a+b+c=k_i$, набрајање свих вероватносних формула које се, као коњункти, појављују у неком дисјункту $D_i = \bigwedge_{j=1}^k X_{i,j}(p_1,\dots,p_n)$ од $DNF(A)$, при чему $\pm P_{\geqslant r} \in \{P_{\geqslant r}, P_{<r}\}$, $\pm CP_{\geqslant r} \in \{CP_{\geqslant r}, CP_{<r}\}$ и $\pm CP_{\leqslant 0} \in \{CP_{\leqslant 0}, \neg CP_{\leqslant 0}\}$.

Меру (вероватноћу) атома a_i означимо са x_i. Писаћемо $a_i \in \alpha$ да би означили појављивање атома a_i у дисјунктивној нормалној форми класичне формуле α. Дисјункт D_i је задовољив ако и само ако је задовољив бар један од следећих (има их коначно много) система линеарних једначина и неједначина:

$$\sum_{i=1}^{2^n} x_i = 1,\ \ x_i \geqslant 0, (i=1,\dots,2^n)$$

$$\sum_{a_i\in\alpha_k} x_i \geqslant r_k, \text{ако } \pm P_{\geqslant r_k} = P_{\geqslant r_k}, (k=1,\dots,a)$$

$$\sum_{a_i\in\alpha_k} x_i < r_k, \text{ако } \pm P_{\geqslant r_k} = P_{<r_k}, (k=1,\dots,a)$$

$$\sum_{a_i\in\gamma_k} x_i > 0 \text{ и } \sum_{a_i\in\beta_k\wedge\gamma_k} x_i \geqslant s_k \sum_{a_i\in\gamma_k} x_i, \text{или } \sum_{a_i\in\gamma_k} x_i = 0, \text{ако } \pm CP_{\geqslant s_k} = CP_{\geqslant s_k}, (k=1,\dots,b)$$

$$\sum_{a_i\in\gamma_k} x_i > 0 \text{ и } \sum_{a_i\in\beta_k\wedge\gamma_k} x_i < s_k \sum_{a_i\in\gamma_k} x_i, \text{ако } \pm CP_{\geqslant s_k} = CP_{<s_k}, (k=1,\dots,b)$$

$$\sum_{a_i\in\eta_k} x_i > 0 \text{ и } \sum_{a_i\in\delta_k\wedge\eta_k} x_i = 0, \text{ако } \pm CP_{\leqslant 0} = CP_{\leqslant 0}, (k=1,\dots,c)$$

$$\sum_{a_i\in\eta_k} x_i > 0 \text{ и } \sum_{a_i\in\delta_k\wedge\eta_k} x_i > 0, \text{или } \sum_{a_i\in\eta_k} x_i = 0, \text{ако } \pm CP_{\leqslant 0} = \neg CP_{\leqslant 0}, (k=1,\dots,c)$$

Као је проблем задовољивости формуле A сведен на решавање система линеарних једначина и неједначина, закључујемо да је логика L_{CP}^K одлучива. □

Логика L_{CP}^F

У овом пододељку приказаћемо логику L_{CP}^F засновану на де Финетијевом приступу условној вероватноћи. Дефиниције многих појмова које смо увели за логику L_{CP}^K остају исте и у овом случају, тако да ћемо углавном наглашавати само разлике.

Синтакса

Језик логике L_{CP}^F је проширење језика класичног исказног рачуна листом бинарних вероватносних оператора $CP_{\geqslant s}$, за сваки рационалан број s из $[0,1]$. Означимо са $For^C(L_{CP}^F)$ скуп свих класичних формула. Ако $\alpha, \beta \in For^C(L_{CP}^F)$, β није контрадикција (што се веома лако може проверити) и s је неки рационалан број из $[0,1]$, тада је $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ основна вероватносна формула. Скуп свих вероватносних формула је најмањи скуп $For^P(L^F_{CP})$ који садржи све основне вероватносне формуле и затворен је за следећа правила: ако A, $B \in For^P(L^F_{CP})$, тада $\neg A$, $A \wedge B \in For^P(L^F_{CP})$. Нека је $For(L^F_{CP}) = For^C(L^F_{CP}) \cup For^P(L^F_{CP})$. Остале исказне везнике $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ уводимо на уобичајен начин, а такође и (ако β није исказна контрадикција) операторе:

$CP_{<s}(\alpha \mid \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \neg CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, $\quad CP_{\leqslant s}(\alpha \mid \beta) \stackrel{\text{def}}{=} CP_{\geqslant 1-s}(\neg\alpha \mid \beta)$,

$CP_{>s}(\alpha \mid \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \neg CP_{\leqslant s}(\alpha \mid \beta)$, $\quad CP_{=s}(\alpha \mid \beta) \stackrel{\text{def}}{=} CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \wedge CP_{\leqslant s}(\alpha \mid \beta)$.

Приметимо да оператор $CP_{\leqslant 0}(\cdot \mid \cdot)$ није посебно уведен за разлику од L^K_{CP}.

Семантика

И у овом случају користимо моделе, налик Крипкеовим, само са условном вероватноћом у де Финетијевом смислу , дефинисаном на подскуповима скупа могућих светова.

Дефиниција 3.2.4. *L^F_{CP}-модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, где је (имајући на уму објашњења дата у пододељку 3.1.2):*

- *W непразан скуп објеката које називамо световима,*
- *$\mathcal{F}$ алгебра подскупова од W,*
- *$\mu : \mathcal{F} \times \mathcal{F}^0 \rightarrow [0,1]$ условна вероватноћа:*
  - *$\mu(A, A) = 1$, за сваки $A \in \mathcal{F}^0$,*
  - *$\mu(\cdot, A)$ је коначно-адитивна вероватноћа на $\mathcal{F}$, за сваки $A \in \mathcal{F}^0$,*
  - *$\mu(C \cap B, A) = \mu(B, A) \cdot \mu(C, B \cap A)$, за све $C \in \mathcal{F}$ и A, B, $A \cap B \in \mathcal{F}^0$.*
- *$v : W \times I \rightarrow \{true, false\}$ је пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује једну класичну валуацију $v(w, \cdot)$ исказних слова.*

*L^F_{CP}-модел $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ је **мерљив** ако и само ако $[\alpha]_{\mathbf{M}} \in \mathcal{F}$ за сваку класичну формулу α. Класу свих мерљивих L^F_{CP}-модела означаваћемо са $\mathrm{Meas}(L^F_{CP})$.*

Приметимо да је условна вероватноћа μ дефинисана за парове скупова светова, при чему друга координата пара мора бити непразан скуп. Будући да је могуће да нека класична формула, иако није контрадикција, не важи ни у једном свету неког модела, релацију задовољивости мораћемо да дефинишемо као парцијалну релацију. Али, пре тога, уведимо следећу дефиницију.

Дефиниција 3.2.5. *Вероватносна формула је **допустива** у мерљивом L^F_{CP}-моделу $\mathbf{M}$, ако не садржи ниједну подформулу облика $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, тако да је $[\beta]_M = \emptyset$.*

Имајући на уму допустивост вероватносне формуле у датом мерљивом L^F_{CP}-моделу, релација задовољивости неће бити дефинисана за моделе, односно његове светове, ако вероватносна формула није допустива у том моделу, иначе је дефинишемо потпуно аналогно као за логику L^K_{CP}. На пример:

- $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ акко $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ је допустива у $\mathbf{M}$ и $\mu([\alpha], [\beta]) \geqslant s$.

Приметимо и то да, сходно Де Финетијевом схватању условне вероватноће, не разматрамо случај када је вероватноћа формуле β једнака 0.

Аксиоматски систем

Аксиоматски систем $Ax(L^F_{CP})$ за логику L^F_{CP} садржи следеће схеме аксиома:

1. све $For^C(L^K_{CP})$-инстанце класичних исказних таутологија,
2. све $For^P(L^K_{CP})$-инстанце класичних исказних таутологија,
3. $CP_{\geqslant 0}(\alpha \mid \beta)$,
4. $CP_{\leqslant r}(\alpha \mid \beta) \to CP_{<s}(\alpha \mid \beta)$, $s > r$,
5. $CP_{<s}(\alpha \mid \beta) \to CP_{\leqslant s}(\alpha \mid \beta)$,
6. $(CP_{\geqslant r}(\alpha \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant s}(\beta \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta \mid \gamma)) \to CP_{\geqslant \min\{1, r+s\}}(\alpha \vee \beta \mid \gamma)$,
7. $(CP_{\leqslant r}(\alpha \mid \gamma) \wedge CP_{<s}(\beta \mid \gamma)) \to CP_{<r+s}(\alpha \vee \beta \mid \gamma)$, $r + s < 1$,
8. $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant r}(\beta \mid \alpha \wedge \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot r}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma)$,
9. $CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant s}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)$,

и следећа правила извођења:

1. из Φ и $\Phi \to \Psi$, закључујемо Ψ, $\Phi, \Psi \in For^C(L^F_{CP})$ или $\Phi, \Psi \in For^P(L^F_{CP})$,
2. из $\alpha \to \beta$, закључујемо $CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \alpha)$,
3. из $A \to (CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, за сваки рационалан број t из $(0, 1)$, закључујемо $A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma \wedge \beta)$.

И у овом случају, дефиницијом 3.2.3 уводимо све одговарајуће појмове: *доказивост*, *непротивречност*, ...

Потпуност

Теорема 3.2.7. (Теорема сагласности) *Аксиоматски систем $Ax(L^F_{CP})$ је сагласан са класом модела* $\mathrm{Meas}(L^F_{CP})$.

Доказ. Сагласност овог аксиоматског система следи из сагласности класичног исказног рачуна и особина условне вероватноће. Доказ је потпуно сличан доказу теореме 3.2.1.

Илустрације ради, докажимо да правило 3 чува ваљаност. Нека је $\mathbf{M}$ мерљив L^F_{CP}-модел и w свет овог модела у коме важе све претпоставке правила 3, при чему је $\mathbf{M}, w \models A$ и $\mu([\beta], [\gamma]) = t_0$. Ако би било $\mu([\alpha], [\beta] \cap [\gamma]) < s$, тада бисмо имали, према дефиницији мерљивог L^F_{CP}-модела, $\mu([\alpha] \cap [\beta], [\gamma]) = \mu([\beta], [\gamma]) \cdot \mu([\alpha], [\beta] \cap [\gamma]) < s \cdot t_0$, односно $\mathbf{M}, w \not\models A \to (CP_{\geqslant t_0}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t_0}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, што је контрадикција. □

Теорему потпуности ћемо доказати потпуно слично као за L^K_{CP}.

Теорема 3.2.8. *1.* **(Теорема дедукције)** *Ако је T скуп формула и Φ и Ψ или обе класичне или обе вероватносне формуле, тада из $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$, следи $T \vdash \Phi \to \Psi$.*

2. Нека су α, β, γ класичне формуле, при чему γ није контрадикција. Тада важи:

(i) $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta \mid \gamma) \to (CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s}(\beta \mid \gamma))$,

(ii) $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta \mid \gamma) \to (CP_{<s}(\beta \mid \gamma) \to CP_{<s}(\alpha \mid \gamma))$,

(iii) $\vdash CP_{\geqslant r}(\alpha \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma)$, $r > s$,

(iv) $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \to (CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \gamma))$,

(v) $\vdash (CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \gamma)) \to CP_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma)$,

(vi) $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \leftrightarrow (CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \gamma))$,

(vii) $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \leftrightarrow \beta \mid \gamma) \to (CP_{\diamond s}(\alpha \mid \gamma) \leftrightarrow CP_{\diamond s}(\beta \mid \gamma))$, $\diamond \in \{\leqslant, \geqslant, <, >, =\}$,

$(viii)$ $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma) \leftrightarrow CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma \wedge \neg\bot)$,

(ix) $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma) \to (CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, *ако $\beta \wedge \gamma$ није контрадикција,*

(x) $\vdash CP_{\geqslant 1}(\beta \leftrightarrow \gamma \mid \neg\bot) \to (CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \leftrightarrow CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma))$.

Доказ. (1) Доказ се спроводи трансфинитном индукцијом по дужини доказа за Ψ из $T \cup \{\Phi\}$. Класични случајеви доказују се стандардно. Претпоставимо да $\Phi, \Psi \in For^P(L^F_{CP})$, и да је $\Psi = A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)$ изведено из скупа $T \cup \{\Phi\}$ применом правила 3. Тада је:
$T \cup \{\Phi\} \vdash A \to (CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, за свако t,
$T \vdash \Phi \to (A \to (CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma)))$, за свако t, (према индукцијској претпоставци)
$T \vdash (\Phi \wedge A) \to (CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, за свако t,
$T \vdash (\Phi \wedge A) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)$, (према правилу 3)
$T \vdash \Phi \to \Psi$.

(2) Докази појединих тврђења потпуно су слични доказима одговарајућих тврђења теореме 3.2.2.2. На пример, ако, у доказу тврђења 3.2.2.2.i, сваку вероватносну формулу облика $P_{\diamond s} \cdots$, $\diamond \in \{\leqslant, \geqslant\}$ заменимо формулом $CP_{\diamond s}(\cdots \mid \gamma)$, добићемо доказ за тврђење (2.i) ове теореме.

(2.iv) Доказ је:
$\vdash \gamma \to ((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)$
$\vdash \gamma \to ((\alpha \wedge \beta) \to \beta)$
$\vdash CP_{\geqslant 1}((\alpha \wedge \beta) \to \alpha \mid \gamma)$
$\vdash CP_{\geqslant 1}((\alpha \wedge \beta) \to \beta \mid \gamma)$
$\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \gamma)$
$\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \gamma)$
$\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \to (CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \gamma))$.

(2.v) Доказ је:
$\vdash \gamma \to (\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$
$\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \mid \gamma)$
$\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \gamma) \to CP_{\geqslant 1}(\beta \to (\alpha \wedge \beta) \mid \gamma)$
$\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \gamma) \to (CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$
$\vdash (CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant 1}(\beta \mid \gamma)) \to CP_{\geqslant 1}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma)$.

(2.*viii*) Како је $\vdash \gamma \to \neg\bot$, применом правила 2, добијамо $\vdash CP_{\geqslant 1}(\neg\bot \mid \gamma)$. Према претходном тврђењу (2.*vii*) имамо $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma) \leftrightarrow CP_{\geqslant s}(\alpha \wedge \neg\bot \mid \gamma)$. Најзад, из аксиома 8 и 9 добијамо $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma) \leftrightarrow CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma \wedge \neg\bot)$.

(2.*ix*) Ова формула је еквивалентна аксиоми 8.

(2.*x*) Ако је $\vdash CP_{\geqslant 1}(\beta \leftrightarrow \gamma \mid \neg\bot)$, тада је $\vdash CP_{\geqslant r}(\beta \mid \neg\bot) \leftrightarrow CP_{\geqslant r}(\gamma \mid \neg\bot)$ као и $\vdash CP_{\geqslant r}(\alpha \wedge \beta \mid \neg\bot) \leftrightarrow CP_{\geqslant r}(\alpha \wedge \gamma \mid \neg\bot)$, за сваки r. Ако је $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, тада је $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \neg\bot)$, а према (2.*ix*) и

$$\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \to (CP_{\geqslant t}(\beta \mid \neg\bot) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \neg\bot)),$$

за све t. Дакле, $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \to (CP_{\geqslant t}(\gamma \mid \neg\bot) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \gamma \mid \neg\bot))$, за све t. Најзад, применом правила 3, добијамо $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma \wedge \neg\bot)$. Дакле, према (2.*viii*), $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma)$. Потпуно слично се показује да важи и $\vdash CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$. □

Теорема 3.2.9. *Сваки непротивречан скуп формула се може проширити до максимално непротивречног скупа.*

Доказ. Нека је T непротивречан скуп, $Con^C(T)$ скуп свих класичних последица од T и $A_0, A_1, \ldots$, набрајање свих вероватносних формула из $For^P(L^F_{CP})$. Дефинишимо низ T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, на следећи начин:

1. $T_0 = T \cup Con^C(T) \cup \{CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \beta) : \beta \to \alpha \in Con^C(T), \beta$ није контрадикција$\}$,
2. за свако $i \geqslant 0$, ако је $T_i \cup \{A_i\}$ непротивречан скуп, тада је $T_{i+1} = T_i \cup \{A_i\}$, иначе је $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg A_i\}$.
3. ако је скуп T_{i+1} добијен додавањем формуле облика $\neg(A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma))$, тада за неки рационалан број $t \in (0,1)$, скупу T_{i+1} такође додајемо и формулу $A \to \neg(CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, тако да је T_{i+1} непротивречан.

Докажимо да је сваки од скупова T_i непротивречан. Скупови добијени корацима 1-2 очигледно су непротивречни. Размотримо корак 3. Ако је $T_i \cup \{A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)\}$ противречан скуп, тада се скуп T_i може непротивречно проширити на начин описан у овом кораку. Наиме, ако претпоставимо да је то немогуће, имаћемо контрадикцију:
$T_i, \neg(A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)), A \to \neg(CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma)) \vdash \bot$, за све t
$T_i, \neg(A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)) \vdash \neg(A \to \neg(CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, за све t (према теореми дедукције)
$T_i, \neg(A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)) \vdash A \to (CP_{\geqslant t}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, за све t, (према $\vdash \neg(p \to q) \to (p \to \neg q)$)
$T_i, \neg(A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)) \vdash A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)$ (према правилу 3).
Доказ непротивречности скупа $\overline{T} = \cup_i T_i$ је скоро идентичан одговарајућем доказ у оквиру теореме 3.2.3. Примера ради, размотримо случај када је $A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)$ добијено применом бесконачног правила извођења 3 на претпоставке облика $A \to (CP_{\geqslant t_j}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t_j}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$ које припадају скупу $\overline{T}$ ($t_1, t_2, \ldots$ је набрајање свих рационалних бројева из $[0,1]$). Ако $A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma) \notin \overline{T}$, према дефиницији скупа $\overline{T}$, постоји индекс m, такав да $A \to \neg(CP_{\geqslant t_m}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t_m}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma)) \in \overline{T}$. Такође, може се наћи и скуп T_k који садржи и формулу $A \to (CP_{\geqslant t_m}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t_m}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$

и $A \to \neg(CP_{\geqslant t_m}(\beta \mid \gamma) \to CP_{\geqslant s\cdot t_m}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma))$, одакле следи да $T_k \vdash A \to \bot$, што значи $A \to \bot \in \overline{T}$. Дакле, $A \to CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma) \in \overline{T}$. Описана конструкција обезбеђује да за сваку формулу Φ, Φ и $\neg\Phi$ не могу истовремено припадати скупу $\overline{T}$. Слично, за сваку вероватносну формулу A, испуњено је или $A \in \overline{T}$ или $\neg A \in \overline{T}$. Дакле, $\overline{T}$ је максимално непротивречан скуп. □

Теорема 3.2.10. *Нека је $\overline{T}$ максимално непротивречан скуп формула. Нека су Φ и Ψ или обе класичне или обе вероватносне формуле и нека су α и β класичне формуле. Тада важи:*

1. *Ако $\Phi \in \overline{T}$, тада $\neg\Phi \notin \overline{T}$.*
2. *$\Phi \wedge \Psi \in \overline{T}$ акко $\Phi \in \overline{T}$ анд $\Psi \in \overline{T}$.*
3. *Ако $\overline{T} \vdash \Phi$, тада $\Phi \in \overline{T}$, тј. $\overline{T}$ је дедуктивно затворен скуп.*
4. *Ако $\Phi \in \overline{T}$ и $\Phi \to \Psi \in \overline{T}$, тада $\Psi \in \overline{T}$.*
5. *Ако $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$, и $s \geqslant r$, тада $CP_{\geqslant r}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$.*
6. *Ако је r рационалан број и $r = \sup\{s : CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}\}$, тада $CP_{\geqslant r}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$.*

Доказ. Доказаћемо само 6. Нека је $r = \sup\{s : CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}\}$. Ако би било $CP_{\geqslant r}(\alpha \mid \beta) \notin \overline{T}$, тада бисмо имали и да $CP_{\geqslant r}(\alpha \mid \beta \wedge \neg\bot) \notin \overline{T}$. Корак 3 конструкције представљене у доказу претходне теореме обезбеђује егзистенцију рационаланог броја $t_0 \in (0,1)$, таквог да $\neg(CP_{\geqslant t_0}(\neg\bot \mid \beta) \to CP_{\geqslant r\cdot t_0}(\alpha \wedge \neg\bot \mid \beta)) \in \overline{T}$, односно таквог да $CP_{<r\cdot t_0}(\alpha \wedge \neg\bot \mid \beta) \wedge CP_{\geqslant t_0}(\neg\bot \mid \beta) \in \overline{T}$. Дакле, имамо $CP_{<r\cdot t_0}(\alpha \wedge \neg\bot \mid \beta) \in \overline{T}$ (и $CP_{\geqslant t_0}(\neg\bot \mid \beta) \in \overline{T}$), тј. $CP_{<r\cdot t_0}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$, што је контрадикција. □

Теорема 3.2.11. (Теорема потпуности) *Сваки непротивречан скуп формула T има мерљив L^F_{CP}-модел.*

Доказ. Према теореми 3.2.9 постоји максимално непротивречно проширење $\overline{T}$ скупа T. Дефинишимо структуру $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, на следећи начин:

- W је скуп свих класичних исказних интерпретација скупа I исказних слова,
- $\mathcal{F} = \{[\alpha] \mid \alpha \in For^C(L^F_{CP})\}$, при чему је $[\alpha] = \{w \in W : w \models \alpha\}$, за сваку класичну формулу α,
- $\mu : \mathcal{F} \times \mathcal{F}^0 \to [0,1]$ је дато са $\mu([\alpha],[\beta]) = \sup\{s : CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}\}$,
- $v : W \times I \to \{true, false\}$ је пресликавање такво да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in I$ важи: $v(w,p) = true$ акко $w \models p$.

Докажимо, најпре, да је $\mathbf{M}$ један мерљив L^F_{CP}-модел. Према теоремама 3.2.8 и 3.2.10, ако је $[\alpha] = [\beta]$ и $[\gamma] = [\delta]$, тада је $\mu([\alpha],[\beta]) = \mu([\gamma],[\delta])$, па је μ добро дефинисано. Како је $\vdash \alpha \to \alpha$, према правилу 2, имамо да је $\vdash CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \alpha)$, па $CP_{\geqslant 1}(\alpha \mid \alpha) \in \overline{T}$. Дакле, $\mu([\alpha],[\alpha]) = 1$. Будући да W садржи све класичне интерпретације, лако се види да за свако $\beta \in For^C(L^F_{CP})$ важи: $[\beta] = \emptyset$ акко је β контрадикција. Доказ да је за сваку класичну формулу β, која није контрадикција, $\mu(\cdot,[\beta])$ коначно-адитивна вероватноћа на $\mathcal{F}$, тј. да за све класичне формуле α и γ важи:

1. $\mu([\alpha],[\beta]) \geqslant 0$,
2. $\mu([\alpha],[\beta]) = 1 - \mu([\neg\alpha],[\beta])$,
3. $\mu([\alpha] \cup [\gamma],[\beta]) = \mu([\alpha],[\beta]) + \mu([\gamma],[\beta])$, за све α и γ такве да је $[\alpha] \cap [\gamma] = \emptyset$.

потпуно је аналоган одговарајућем делу доказа теореме 3.2.5. Докажимо да μ задовољава и следећи услов: за све класичне формуле α, β, γ ($[\gamma]$,$[\beta \wedge \gamma] \neq \emptyset$) важи једнакост

$$\mu([\alpha] \cap [\beta],[\gamma]) = \mu([\beta],[\gamma]) \cdot \mu([\alpha],[\beta] \cap [\gamma]).$$

Нека је $\mu([\beta],[\gamma]) = s$, $\mu([\alpha],[\beta] \cap [\gamma]) = \mu([\alpha],[\beta \wedge \gamma]) = t$, $s > 0$ и $t > 0$. Ако је $s' \in [0,s)$ и $t' \in [0,t)$, тада $CP_{\geqslant s'}(\beta \mid \gamma) \in \overline{T}$ и $CP_{\geqslant t'}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma) \in \overline{T}$, па, према аксиоми 8, $CP_{\geqslant s' \cdot t'}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \in \overline{T}$. Дакле, $s \cdot t \leqslant \sup\{r : r \in CP_{\geqslant r}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \in \overline{T}\} = r_0$. Ако је $s \cdot t < r_0$, тада постоји s' такав да је $s < s' < \frac{r_0}{t}$ и $CP_{<s'}(\alpha \mid \beta \wedge \gamma)$. Према правилу 3, постоји t_0 такав да $CP_{<s' \cdot t_0}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma) \wedge CP_{\geqslant t_0}(\beta \mid \gamma)$. Из $CP_{\geqslant t_0}(\beta \mid \gamma)$, добијамо да је $t_0 \leqslant t$ и $s < s' < \frac{r_0}{t} \leqslant \frac{r_0}{t_0}$, тј. $s' \cdot t_0 < r_0$. Сада имамо да $CP_{\geqslant s' \cdot t_0}(\alpha \wedge \beta \mid \gamma)$, што је контрадикција.

Дакле, M је мерљив L^F_{CP}-модел.

Најзад, докажимо да је T задовољива теорија. Како је $Con^C(T)$ непротивречан скуп, он је задовољив на основу теореме потпуности за класичан исказни рачун, па постоји свет w, такав да $\mathbf{M}, w \models \alpha$, за сваку класичну формулу α из $\overline{T}$. Показаћемо да за сваку вероватносну формулу A важи: $\mathbf{M}, w \models A$ акко $A \in \overline{T}$. Нека је $A = CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$. Претпоставимо да $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$. Ако $A \in \overline{T}$, тада $\sup\{r : CP_{\geqslant r}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}\} = \mu([\alpha],[\beta]) \geqslant s$, па $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$. С друге стране, претпоставимо да $\mathbf{M}, w \models CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, тј. да $\sup\{r : CP_{\geqslant r}(\alpha \mid \beta)) \in \overline{T}\} \geqslant s$. Ако је $\mu([\alpha],[\beta]) > s$, тада (због особина супремума и монотоности функције $\mu(\cdot,[\beta])$) $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$. Ако је $\mu([\alpha],[\beta]) = s$, тада, према теореми 3.2.10.(6), $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta) \in \overline{T}$. □

Одлучивост

Одлучивост логике L^F_{CP} доказујемо на потпуно аналоган начин као за L^K_{CP}. Тако и у овом случају користимо чињеницу да је свака вероватносна формула A еквивалентна формули облика

$$DNF(A) = \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{k_i} \pm CP_{\geq r_{i,j}}(\alpha_{i,j} \mid \beta_{i,j}),$$

тзв. дисјунктивној нормалној форми од A. Формула A је задовољива ако и само ако је задовољив бар један дисјункт из $DNF(A)$. Како је проблем задовољивости конјункција неких вероватносних формула облика $\pm CP_{\geq r}(\alpha \mid \beta)$ еквивалентан провери кохерентности одговарајућег додељивања условних вероватноћа, према теореми 3.1.4, следи наредно тврђење.

Теорема 3.2.12. *Логика L^F_{CP} је одлучива.*

Однос између L^K_{CP} и L^F_{CP}

Језици логика L^K_{CP} и L^F_{CP} нису исти, $For(L^F_{CP}) \subsetneq For(L^K_{CP})$, јер оператори облика $P_{\geqslant s}$ не припадају језику логике L^F_{CP}. Ипак, свака формула облика $P_{\geqslant s}\alpha$ може бити написана у облику $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \top)$. Са друге стране, оператор $CP_{\leqslant 0}$ је посебно уведен у језик логике L^K_{CP}, док је дефинабилан у L^F_{CP}. Све су то последице различитих претпоставки на којима су засноване логике, тј. различитих схватања условне вероватноће (према Колмогорову, односно Де Финетију).

Логике L^K_{CP} и L^F_{CP} су, у извесном смислу, неупоредиве, што се може видети из наредних примера.

Пример 1. Формула $A = CP_{=0}(\alpha \mid \beta) \to CP_{>0}(\beta \mid \top)$ је последица L^K_{CP}-аксиоме 9, па је L^K_{CP}-ваљана. Међутим, формула A није L^F_{CP}-ваљана. Посматрајмо следећи (мерљив) L^F_{CP}-модел $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$:

- $W = \{w_1, w_2\}$,
- $\mathcal{F} = 2^W$,
- $\mu(\{w_1\}, W) = 0$, $\mu(\{w_2\}, W) = 1$,
  $\mu(\{w_1\}, \{w_1\}) = 1$, $\mu(\{w_2\}, \{w_1\}) = 0$,
  $\mu(\{w_1\}, \{w_2\}) = 0$, $\mu(\{w_2\}, \{w_2\}) = 1$,
- $v(w_1, p) = v(w_2, p) = v(w_1, q) = true$, $v(w_2, q) = false$.

У овом моделу је: $\mu([p],[q]) = \mu(\{w_1, w_2\}, \{w_1\}) = 1$, $\mu([\neg p],[q]) = \mu(\emptyset, \{w_1\}) = 0$ и $\mu([q],[\top]) = \mu(\{w_1\}, W) = 0$. Дакле, $\mathbf{M} \models CP_{=0}(\neg p \mid q) \wedge CP_{=0}(q \mid \top)$, па A није L^F_{CP}-ваљана. □

Пример 2. Формула $CP_{=0}(\beta \mid \top) \wedge CP_{\geqslant \frac{1}{2}}(\alpha \mid \beta) \to CP_{\leqslant \frac{1}{2}}(\neg\alpha \mid \beta)$ је L^F_{CP}-ваљана, јер је $\mu([\cdot], [\beta])$ коначно-адитивна вероватноћа. Међутим, према теореми 3.2.2(2.v), у логици L^K_{CP} важи $\vdash P_{=0}\beta \to CP_{=1}(\alpha \mid \beta)$, одакле следи да ова формула није L^K_{CP}–ваљана. □

Претходни примери показују да се логике L^K_{CP} и L^F_{CP} понашају различито када је реч о условним вероватноћама где је вероватноћа услова (друге координате условног догађаја) једнака нули. Наредни пример (узет из [6]) показује да је одбацивање разматрања условних вероватноћа, када је вероватноћа услова једнака нули, велики ограничавајући фактор.

Пример 3. Новчић се баца два пута и региструју се следећи исходи, $k = 1, 2$:

$$p_k = \text{ експеримент није успео у } k-\text{ том бацању},$$

и, слично, означимо са q_k и r_k – појављивање „писма“ и „грба“, редом. Приметимо најпре да исходи p_k нису немогући[8] ни логички ни практично. „Природно“ додељивање вероватноће је: $P_{=0}p_k$, $P_{=\frac{1}{2}}q_k$ и $P_{=\frac{1}{2}}r_k$. Даље, „природно“ додељивање условних вероватноћа исхода другог бацања под условом p_1 је: $CP_{=\frac{1}{2}}(q_2 \mid p_1)$, $CP_{=\frac{1}{2}}(r_2 \mid p_1)$, $CP_{=0}(p_2 \mid p_1)$. L^K_{CP}–формула

$$(1) \qquad P_{=0}p_1 \wedge CP_{=\frac{1}{2}}(q_2 \mid p_1) \wedge CP_{=\frac{1}{2}}(r_2 \mid p_1) \wedge CP_{=0}(p_2 \mid p_1)$$

и L^F_{CP}–формула

$$(2) \qquad CP_{=0}(p_1 \mid \top) \wedge CP_{=\frac{1}{2}}(q_2 \mid p_1) \wedge CP_{=\frac{1}{2}}(r_2 \mid p_1) \wedge CP_{=0}(p_2 \mid p_1)$$

[8]нпр. новчић стоји усправно наслоњен на зид

одговарају поменутом додељивању вероватноћа.

Према L^K_{CP}-теореми 3.2.2(2.v), формула (1) није L^K_{CP}–задовољива. Проверимо задовољивост формуле (2). Одредимо најпре атоме: $a_1 = q_2 \wedge p_1$, $a_2 = r_2 \wedge p_1$, $a_3 = p_2 \wedge p_1$, $a_4 = q_2 \wedge \neg p_1$, $a_5 = r_2 \wedge \neg p_1$ и $a_6 = p_2 \wedge \neg p_1$. Систем

$$(S_0)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\ x_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_3 = 0(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ x_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, 6 \end{cases}$$

има решење $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = 0$, $x_4 = x_5 = \frac{1}{2}$. Преласком на други систем (S_1) добијамо:

$$(S_1)\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) \\ y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) \\ y_3 = 0(y_1 + y_2 + y_3) \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Решење последњег система је: $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 0$. Дакле, формула (2) је L^F_{CP}-задовољива. □

Логика L^F_{CP} може бити схваћена као својеврсни „препис“ логике приказане у [34], где је вероватноћа условног догађаја „φ под условом ψ“ заправо истинитосна вредност фази-модалног исказа $P(\varphi \mid \psi)$, који читамо: „$\varphi \mid \psi$ је вероватно“. Одговарајућа фази логика изграђена је као комбинација добро познатих L-[9] и П-[10]фази логика (укратко описаних у пододељку 1.2.1). Наиме, уведени су П-импликација $\to_\Pi$, П-конјункција $\wedge_\Pi$ и L-импликација $\to_L$. У таквом језику могуће је изразити тврђења типа „условна вероватноћа је једнака s (мања од s, није већа од s, позитивна је,...)“, као и „условни догађај $\alpha_1 \mid \beta_1$ је вероватан бар колико и условни догађај $\alpha_2 \mid \beta_2$“. Прво тврђење се може лако изразити и у логици L^F_{CP}, док се друго може описати увођењем новог оператора $\rhd(\alpha_1 \mid \beta_1, \alpha_2 \mid \beta_2)$ који је дефинабилан у језику ове логике следећим бесконачним скупом аксиома :

$$\rhd(\alpha_1 \mid \beta_1, \alpha_2 \mid \beta_2) \to (CP_{\geqslant s}(\alpha_2 \mid \beta_2) \to CP_{\geqslant s}(\alpha_1 \mid \beta_1)), \text{ за сваки } s,$$

и једним правилом извођења:

$$\text{из } \{CP_{\geqslant s}(\alpha_2 \mid \beta_2) \to CP_{\geqslant s}(\alpha_1 \mid \beta_1)\}, \text{ за свако } s, \text{ закључујемо } \rhd(\alpha_1 \mid \beta_1, \alpha_2 \mid \beta_2).$$

Као што је већ поменуто, теорема компактности не важи за L^K_{CP} и L^F_{CP} (као што не важи ни за једну од логика приказаних у [12, 34]). Заиста, постоји незадовољив скуп формула чији је сваки коначан подскуп задовољив; на пример, $T = \{CP_{>0}(\alpha \mid \beta)\} \cup \{CP_{<1/n}(\alpha \mid \beta) : n \text{ је природан број}\}$. Приметимо да, пошто имамо бесконачну аксиоматизацију, T је противречан скуп формула у односу и на L^K_{CP}- и на L^F_{CP}-аксиоматски систем.

[9] Лукасијевичева

[10] Производ

Судећи на основу примера 3. изгледа да предност треба дати логици L^F_{CP}, јер ова логика нуди много флексибилнији третман условних вероватноћа него логика L^K_{CP}. Такође, постоје и ситуације у којима није сасвим јасно за коју се од ових логика определити. У сваком случају, обе формализације могу бити веома корисни оквири за разумевање и разматрање многих практичних проблема, рецимо на пољу немонотоног резоновања, где их је могуће применити у развијању општих поступака закључивања по дифолт правилима.

Итерације условних вероватноћа–Логика $L^K_{\overline{CP}}$

Допуштање формула у којима је дозвољена итерација оператора за условну вероватноћу доводи до извесних тешкоћа у формирању логика у којима је условна вероватноћа схваћена у де Финетијевом смислу, будући да контрадикција несме бити услов, тј. друга координата условног догађаја. С друге стране без икаквих тешкоћа се може извршити одговарајуће проширење логике L^K_{CP}. Иначе, допуштање итерација вероватносних оператора је од великог значаја за формализацију „неизвесности вероватноће“.

Језик логике $L^K_{\overline{CP}}$ је исти као језик за L^K_{CP}, с тим што су при грађењу скупа формула $For(L^K_{\overline{CP}})$ дозвољене итерације вероватносних оператора и мешање исказних и вероватносних формула. Тако, скуп формула $For(L^K_{\overline{CP}})$ је најмањи скуп коначних низова симбола који садржи исказна слова и затворен је за следећа правила: ако су α и β формуле, тада су и $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $P_{\geqslant s}\alpha$, $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$ и $CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta)$ формуле. Пример формуле је $CP_{\geqslant 0.2}(p_1 \to p_2 \mid P_{\geqslant 0.12}P_{\geqslant 0.1}p_1)$. Остале исказне везнике и остале вероватносне операторе уводимо као код L^K_{CP}.

Дефиниција 3.2.6. *$L^K_{\overline{CP}}$–модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, v, Prob\rangle$, где је:*

- *W непразан скуп светова,*
- *$v : W \times I \to \{true, false\}$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује класичну валуацију исказних слова,*
- *$Prob$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује један простор вероватноћа $\langle W(w), \mathcal{F}(w), \mu(w)\rangle$, тако да је $W(w)$ непразан подскуп од W, $\mathcal{F}(w)$ алгебра подскупова над $W(w)$ и $\mu(w) : \mathcal{F}(w) \to [0,1]$ коначно-адитивна вероватноћа.*

За сваки $L^K_{\overline{CP}}$-модел $\mathbf{M}$, релација задовољења испуњава следеће услове:

- *ако је φ исказно слово, тада: $\mathbf{M}, w \models \varphi$ акко $v(w,\varphi) = true$,*
- *ако је φ формула $P_{\geqslant s}\alpha$, тада: $\mathbf{M}, w \models \varphi$ акко $\mu(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \alpha\}) \geqslant s$,*
- *ако је φ формула $CP_{\geqslant s}(\alpha \mid \beta)$, тада: $\mathbf{M}, w \models \varphi$ акко или је*

$$\mu(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \beta\}) = 0$$

или је

$$\mu(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \beta\}) > 0$$

и

$$\frac{\mu(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \alpha\} \cap \{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \beta\})}{\mu(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \beta\})} \geqslant s,$$

- *ако је* $\varphi = CP_{\leqslant 0}(\alpha \mid \beta)$, *тада:* $\mathbf{M}, w \models \varphi$ *акко*

$$\mu(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \alpha\} \cap \{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \beta\}) = 0$$

и

$$\mu(w)(\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \beta\}) > 0,$$

- *ако је* φ *формула* $\alpha \wedge \beta$, *тада* $\mathbf{M}, w \models \varphi$ *акко* $\mathbf{M}, w \models \alpha$ *и* $\mathbf{M}, w \models \beta$,
- *ако је* φ *формула* $\neg\alpha$, *тада* $\mathbf{M}, w \models \varphi$ *акко није* $\mathbf{M}, w \models \alpha$.

Формула φ *је **задовољива** у* $L^{K}_{\overline{CP}}$*-моделу* $\mathbf{M}$ *ако постоји свет* w *такав да* $\mathbf{M}, w \models \varphi$.

Формула φ *је **ваљана**, ако за сваки* $L^{K}_{\overline{CP}}$*–модел* $\mathbf{M}$ *и сваки његов свет* w, $\mathbf{M}, w \models \varphi$.

$L^{K}_{\overline{CP}}$-модел $\mathbf{M}$ је *мерљив*, ако за сваку формулу φ и сваки свет w из $\mathbf{M}$, $\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \varphi\} \in \mathcal{F}(w)$. Класу свих мерљивих модела означићемо са $\text{Meas}(L^{K}_{\overline{CP}})$. Са $[\varphi]_{\mathbf{M},w}$ означавамо скуп $\{w' \in W(w) : \mathbf{M}, w' \models \varphi\}$, при чему ћемо индексе $\mathbf{M}, w$ изостављати кад год нам то контекст дозвољава.

Аксиоматски систем $Ax(L^{K}_{\overline{CP}})$ је потпуно аналоган систему $Ax(L^{K}_{CP})$ осим што у овом случају не морамо водити рачуна да ли су формуле класичне или вероватносне, тј. уместо аксиома 1. и 2. система $Ax(L^{K}_{CP})$ узимамо све $For(L^{K}_{\overline{CP}})$-инстанце класичних таутологија и слично за правило (MP). Појмови који се односе на доказе у оквиру ове логике дефинишу се исто као у L^{K}_{CP}, са јединим разликом да се правило извођења $\dfrac{\alpha}{P_{\geqslant 1}\alpha}$ може применити само на теореме. За непротивречан скуп формула T кажемо да је *максимално непротивречан* ако за сваку формулу α, или $\alpha \in T$ или $\neg\alpha \in T$.

Теореме сагласности и потпуности овог аксиоматског система у односу на класу модела $\text{Meas}(L^{K}_{\overline{CP}})$ доказују се на сасвим сличан начин као у L^{K}_{CP}. Тако, може се доказати да важи теорема дедукције, као и одговарајуће последице система $Ax(L^{K}_{\overline{CP}})$ (теорема 3.2.2). Такође, може се показати да се сваки непротивречан скуп $L^{K}_{\overline{CP}}$-формула може проширити до максимално непротивречног скупа. Коришћењем максимално непротивречних проширења неког непротивречног скупа формула T конструшемо тзв. *канонски модел* $\mathbf{M} = (W, v, Prob)$ у коме важе све формуле скупа T:

- W је скуп свих максимално непротивречних скупова
- $v : W \times I \to \{true, false\}$ је пресликавање такво да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in I$ важи: $v(w, p) = true$ акко $p \in w$,
- $Prob(w) = (W(w), \mathcal{F}(w), \mu(w))$ је коначно-адитивни простор вероватноћа, где је:
  - $W(w) = W$,
  - $\mathcal{F}(w)$ скуп свих $[\varphi] = \{w \in W : \varphi \in w\}$, за сваку формулу φ,
  - $\mu(w)([\varphi]) = \sup\{s : P_{\geqslant s}\varphi \in w\}$.

Теорема 3.2.13. *Сваки непротивречан скуп* $L^{K}_{\overline{CP}}$*-формула* T *има мерљив* $L^{K}_{\overline{CP}}$*-модел.*

У доказу одлучивости проблема задовољивости и ваљаности за разматрану класу модела користићемо се поступцима филтрације којим се разматрање произвољних модела у испитивању задовољивости своди на испитивање коначних модела и трансформисањем вероватносних формула у системе линеарних једначина и неједначина.

Теорема 3.2.14. *Формула α има мерљив $L^K_{\overline{CP}}$-модел ако и само ако је задовољива у неком коначном мерљивом $L^K_{\overline{CP}}$-моделу.*

Доказ. Нека је $\mathbf{M} = \langle W, v, Prob\rangle$ један мерљив $L^K_{\overline{CP}}$-модел у чијем свету w важи формула α. Поступком филтрације трансформисаћемо модел $\mathbf{M}$ у коначан модел у чијем једном свету такође важи формула α.

Нека је $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ скуп свих потформула од α. Дефинишимо релацију еквиваленције $\approx$ на скупу светова W, тако да

$$w \approx u \quad \text{акко} \quad \text{за свако } \theta \in Subfor(\alpha):\ \mathbf{M}, w \models \theta \text{ акко } \mathbf{M}, u \models \theta.$$

Пошто је скуп $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ коначан, скуп светова W је релацијом $\approx$ подељен на коначан број класа еквиваленције. Са C_u означимо класу еквиваленције којој припада свет u. Филтрација модела $\mathbf{M} = \langle W, v, Prob\rangle$ скупом $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ је модел $\mathbf{M}^* = \langle W^*, v^*, Prob^*\rangle$, такав да важи

- W^* садржи тачно по један свет из сваке од класа еквиваленције количничког скупа $W/\approx$; нека је $W^* = \{w_1, \ldots, w_n\}$;
- $v^*(w_i, p) = v(w_i, p)$;
- $Prob^*$ је пресликавање дефинисано тако да је:
  - $W^*(w_i) = \{w : (\exists u \in C_w) u \in W(w_i)\}$,
  - $\mathcal{F}^*(w_i) = \mathcal{P}(W^*(w_i))$,
  - за сваки $u \in W^*$, $\mu^*(w_i)(u) = \mu(w_i)(C_u \cap W(w_i))$ и за сваки $D \in \mathcal{F}^*(w_i)$, $\mu^*(w_i)(D) = \sum\limits_{u\in D} \mu(w_i)(C_u \cap W(w_i))$.

Како је

$$\mu^*(w_i)(W^*(w_i)) = \sum_{u\in W^*(w_i)} \mu(w_i)(C_u \cap W(w_i)) = \sum_{C_u \in W/\approx} \mu(w_i)(C_u \cap W(w_i)) = 1,$$

$\mu^*(w_i)$ је вероватноћа. Лако се види да је M^* један мерљив $L^K_{\overline{CP}}$-модел. Индукцијом по сложености формула скупа $\mathrm{Subfor}(\alpha)$ показује се за сваки свет $w \in W^*$ и сваку формулу $\theta \in \mathrm{Subfor}(\alpha)$ важи: $\mathbf{M}, w \models \theta$ ако и само ако $\mathbf{M}^*, w \models \theta$. Ако је θ исказно слово и $\mathbf{M}, w \models \theta$, тада $\mathbf{M}, w_i \models \theta$ за сваки $w_i \in C_w$. Очигледно је да: $\mathbf{M}, w_i \models \theta$ ако и само ако $\mathbf{M}^*, w_i \models \theta$. Ако је $\theta = \theta_1 \wedge \theta_2$, $\mathbf{M}, w \models \theta$ и $w_i \in C_w$, тада:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}, w_i \models \theta \quad & \text{акко} \quad \mathbf{M}, w_i \models \theta_1 \text{ и } \mathbf{M}, w_i \models \theta_2 \\ & \text{акко} \quad \mathbf{M}^*, w_i \models \theta_1 \text{ и } \mathbf{M}^*, w_i \models \theta_2 \\ & \text{акко} \quad \mathbf{M}^*, w_i \models \theta. \end{aligned}$$

Случај $\theta = \neg\varphi$ се слично доказује. Ако је $\theta = P_{\geqslant s}\beta$ и $\mathbf{M}, w \models \theta$, тада $\mathbf{M}, w_i \models \theta$ важи за сваки $w_i \in C_w$, и

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}, w_i \models \theta \\
\Leftrightarrow\ & \mu(w_i)(\{u \in W(w_i) : \mathbf{M}, u \models \beta\}) \geqslant r \\
\Leftrightarrow\ & \mu(w_i)\left(\bigcup_{\mathbf{M},u\models\beta} C_u \cap W(w_i)\right) \geqslant r \\
\Leftrightarrow\ & \mu(w_i)\left(\bigcup_{\mathbf{M},w_j\models\beta} C_{w_j} \cap W(w_i)\right) \geqslant r \\
\Leftrightarrow\ & \mu(w_i)\left(\bigcup_{\mathbf{M}^*,w_j\models\beta} C_{w_j} \cap W(w_i)\right) \geqslant r \\
\Leftrightarrow\ & \mu^*(w_i)\left(\{w_j \in W(w_i) : \mathbf{M}^*, w_j \models \beta\}\right) \geqslant r \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{M}^*, w_i \models \theta.
\end{aligned}$$

Случајеви $\theta = CP_{\geqslant s}(\beta \mid \gamma)$ и $\theta = CP_{\leq 0}(\beta \mid \gamma)$ се показују аналогно.

Приметимо да модел $\mathbf{M}^*$ нема више од 2^n светова, где је n број подформула формуле α. □

Приметимо да поступак филтрације није довољан за доказивање одлучивости, будући да је, због вероватносне компоненте у мерљивим $L_{\overline{CP}}^{K}$-моделима, број модела са коначним бројем светова бесконачан. Зато ћемо формуле „превести" у системе линеарних једначина и неједначина.

Теорема 3.2.15. *Логика $L_{\overline{CP}}^{K}$ је одлучива.*

Доказ. Нека је $\mathbf{M} = (W, v, Prob)$ један мерљив $L_{\overline{CP}}^{K}$-модел у чијем свету w важи формула α и нека је $\mathrm{Subfor}(\alpha) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ скуп свих потформула од α. У сваком свету w важи тачно једна формула облика $\pm\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \pm\varphi_k$; назовимо ту формулу карактеристична формула света w. Поступком филтарције обезбеђено је да постоји мерљив $L_{\overline{CP}}^{K}$-модел са највише 2^k светова, тако да формула α важи у бар једном свету тог модела. За сваки природан број $l \leqslant 2^k$ размотрићемо моделе са l светова. У сваком од тих светова важиће тачно једна карактеристична формула. Дакле, за сваки l размотрићемо све скупове од l карактеристичних формула које су исказно неконтрадиктарне и од којих бар једна формула садржи полазну формулу α. За сваки такав избор и сваки свет w_i (тј. одговарајућу карактеристичну формулу α_i), нека је $X_{r_1}\beta_1, \ldots, X_{r_p}\beta_p$, $Y_{s_1}(\gamma_1 \mid \delta_1), \ldots, Y_{s_q}(\gamma_q \mid \delta_q)$, $CP_{\leqslant 0}(\eta_1 \mid \theta_1), \ldots, CP_{\leqslant 0}(\eta_t \mid \theta_t)$, $p + q + t \leq k$, једно набрајање свих формула које се појављују као конјункти у α_i, при чему је X_r један од оператора $P_{\geqslant r}, P_{<r}$, а Y_s један од $CP_{\geqslant s}, CP_{<s}$. Посматраћемо следећи скуп линеарних једначина и неједначина по непознатим $x_j^i (= \mu(w_i)(w_j))$, $i = 0, 1, \ldots, l$, $j = 1, 2, \ldots, l$, при чему ознака $\varphi \in \alpha_i$ значи „φ се

појављује као конјункт у α_i“:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{l} x^i_j = 1,\ x^i_j \geqslant 0\,(i = 1,\dots,l),\\
&\sum_{j:\beta\in\alpha_j} x^i_j \geqslant r_k,\ \text{ако } P_{\geqslant r_k}\beta \in \alpha_i,\\
&\sum_{j:\beta\in\alpha_j} x^i_j < r_k,\ \text{ако } P_{<r_k}\beta \in \alpha_i,\\
&\sum_{j:\gamma\wedge\delta\in\alpha_j} x^i_j \geqslant s \sum_{j:\gamma\in\alpha_j} x^i_j \text{ и } \sum_{j:\gamma\in\alpha_j} x^i_j > 0,\ \text{или } \sum_{j:\gamma\in\alpha_j} x^i_j = 0,\ \text{ако } CP_{\geqslant s}(\gamma \mid \delta) \in \alpha_i,\\
&\sum_{j:\gamma\wedge\delta\in\alpha_j} x^i_j < s \sum_{j:\gamma\in\alpha_j} x^i_j \text{ и } \sum_{j:\gamma\in\alpha_j} x^i_j > 0,\ \text{ако } CP_{<s}(\gamma \mid \delta) \in \alpha_i,\\
&\sum_{j:\eta\wedge\theta\in\alpha_j} x^i_j = 0,\ \sum_{j:\theta\in\alpha_j} x^i_j > 0,\ \text{ако } CP_{\leqslant 0}(\eta \mid \theta) \in \alpha_i.
\end{aligned}$$

Пошто се описаним поступком разматра само коначно много система линеарних једначина и неједначина, проблем задовољивости је одлучив. Како је нека формула α ваљана ако и само ако $\neg\alpha$ није задовољива, одлучив је и проблем ваљаности. □

3.2.2 Логике мере L_{PG}

Нека је $\mathbb{G} = (G, \leqslant, +, 0)$ уређен комутативан моноид. Елемент a из G је *ненегативан* ако је $a \geqslant 0$. Нека је $G^+ = \{x \in G : x \geqslant 0\}$ скуп свих ненегативних елемената. Приметимо да *за све x, y из G^+, из $x + y = 0$ следи да је $x = 0$ и $y = 0$.* Заиста, ако $x, y \in G^+$ и $x + y = 0$, тада је $0 = x + y \geqslant x + 0 = x$, па због $x \geqslant 0$ имамо да је $x = 0$; потпуно аналогно се добија и да је $y = 0$.

Дефиниција 3.2.7. *Нека је G^+ скуп ненегативних елеманата неког уређеног комутативног моноида и $\mathcal{F}$ алгебра подскупова од Ω. Пресликавање $\mu : \mathcal{F} \to G^+$ је G^+-мера ако и само ако важе следећи услови:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. *ако су A и B дисјунктни, тада је* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Размотримо логику мере при чему је мера схваћена у смислу претходне дефиниције. Разни специјални случајеви ове логике могу бити од интереса у различитим ситуацијама. Једноставности ради, ограничићемо се само на исказну логику мере у којој нису дозвољене итерације мера нити мешање исказних формула и формула мере. Синтаксу класичног исказног рачуна обогатићемо операторима мере облика $M_{=a}$, $a \in G^+$, индексираним ненегативним елементима неког пребројивог уређеног комутативног моноида $\mathbb{G} = (G, \leqslant, +, 0)$.

Означимо са $For^C(L_{P\mathbb{G}^+})$ скуп свих класичних исказних формула. Елементе скупа $For^C(L_{P\mathbb{G}^+})$ означаваћемо малим грчким словима: $\alpha, \beta, \dots$ Ако $\alpha \in For^C(L_{P\mathbb{G}^+})$ и $a \in G^+$, тада је $M_{=a}\alpha$ основна формула мере. Скуп свих формула мере је најмањи скуп $For^M(L_{P\mathbb{G}^+})$ који садржи све основне вероватносне формуле и затворен је за следећа правила: ако A, $B \in For^M(L_{PG^+})$, тада $\neg A$, $A \wedge B \in For^M(L_{PG^+})$. Формуле скупа $For^M(L^K_{CP})$ означаваћемо великим словима латинице: A, B, ... Нека је $For(L_{PG^+}) = For^C(L_{PG^+}) \cup For^M(L_{PG^+})$. Формуле из $For(L_{PG^+})$ ћемо означавати са: $\Phi, \Psi, \ldots$ Исказне везнике $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ уводимо на уобичајен начин. Такође уводимо и нови оператор: $M_{\neq a}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg M_{=a}\alpha$.

За $\alpha \in For^C(L_{PG^+})$ и $A \in For^M(L_{PG^+})$, и формулу $\alpha \wedge \neg\alpha$ и формулу $A \wedge \neg A$ означаваћемо са $\perp$, остављајући да контекст одреди значење, док ће $\top$ означавати $\neg\perp$.

За давање значења формулама користићемо моделе у којима је одговарајућа мера дефинисана над могућим световима. Ови модели подсећају на Крипкеове моделе, али уместо релације достижности дефинисана је G^+-мера над подскуповима скупа светова.

Дефиниција 3.2.8. *L_{PG^+}-модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, где је:*

- *W непразан скуп објеката које називамо световима,*
- *$\mathcal{F}$ алгебра подскупова од W,*
- *μ је G^+-мера, $\mu : \mathcal{F} \rightarrow G^+$,*
- *$v : W \times I \rightarrow \{true, false\}$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује једну класичну (дво-вредносну) валуацију исказних слова; свака валуација $v(w, \cdot)$ се на уобичајен начин проширује на све класичне формуле.*

L_{PG^+}-модел $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ је мерљив ако и само ако

$$[\alpha]_{\mathbf{M}} = \{w \in W : v(w, \alpha) = true\} \in \mathcal{F}$$

за сваку класичну формулу α. Класу свих мерљивих L_{PG^+}-модела означаваћемо са $\mathrm{Meas}(L_{PG^+})$.

Релација задовољења $\models \subset \mathrm{Meas}(L_{PG^+}) \times For(L_{PG^+})$ дефинисана је на уобичајен начин.

Аксиоматски систем $Ax(L_{PG^+})$ за логику L_{PG^+} садржи следеће схеме аксиома:

1. све $For^C(L_{PG^+})$-инстанце класичних исказних таутологија,
2. све $For^M(L_{PG^+})$-инстанце класичних исказних таутологија,
3. $M_{=0}\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (M_{=a}\alpha \rightarrow M_{=a}\beta)$,
4. $(M_{=a}\alpha \wedge M_{=b}\beta \wedge M_{=0}(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow M_{=a+b}(\alpha \vee \beta)$

и следећа правила извођења:

1. из Φ и $\Phi \rightarrow \Psi$, закључујемо Ψ, ако је $\Phi, \Psi \in For^C(L^F_{CP})$ или $\Phi, \Psi \in For^M(L^F_{CP})$,
2. из α, закључујемо $M_{=0}\neg\alpha$,
3. из $A \rightarrow M_{\neq a}\alpha$, за сваки a из G^+, закључујемо $\neg A$.

Приметимо да (бесконачним) правилом извођења 3 синтаксно потпуно одређујемо ранг мере. Појмове: *доказ*, *теорема*, ... дефинишемо на уобичајен начин.

Теорема 3.2.16. (Теорема сагласности) *Аксиоматски систем* $Ax(L_{PG^+})$ *је сагласан са класом модела* $\mathrm{Meas}(L_{PG^+})$.

Доказ. Сагласност овог аксиоматског система следи из сагласности класичног исказног рачуна и особина мере.

Нека је $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ мерљив L_{PG^+}-модел. Размотримо, на пример, аксиому 3. Ако, $\mathbf{M} \models M_{=0}\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$ и $\mathbf{M} \models M_{=a}\alpha$, тада је $\mu[\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)] = 0$ и $\mu[\alpha] = a$. Како је $[\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)] = ([\neg\alpha] \cap [\beta]) \cup ([\alpha] \cap [\neg\beta])$ и $([\neg\alpha] \cap [\beta]) \cap ([\alpha] \cap [\neg\beta]) = \emptyset$ имамо да је

$$0 = \mu[\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)] = \mu([\neg\alpha] \cap [\beta]) + \mu([\alpha] \cap [\neg\beta])$$

па је $\mu([\neg\alpha] \cap [\beta]) = 0$ и $\mu([\alpha] \cap [\neg\beta]) = 0$. Сада је,

$$\mu[\beta] = \mu([\alpha] \cap [\beta]) + \mu([\neg\alpha] \cup [\beta]) = \mu([\alpha] \cap [\beta])$$

и

$$\mu[\alpha] = \mu([\alpha] \cap [\beta]) + \mu([\alpha] \cup [\neg\beta]) = \mu([\alpha] \cap [\beta]).$$

Дакле, $\mu[\beta] = \mu[\alpha] = a$, па $\mathbf{M} \models M_{=a}\beta$.

Докажимо и да правило 3 чува ваљаност. Нека у моделу $\mathbf{M}$ важе све претпоставке овог правила, тј. $\mathbf{M} \models A \to M_{\neq a}\alpha$, за свако $a \in G^+$. Ако би било $\mathbf{M} \not\models \neg A$, имали бисмо $\mathbf{M} \models A$, а тиме и $\mathbf{M} \models M_{\neq a}\alpha$, за свако $a \in G^+$, односно $\mu[\alpha] \neq a$, за свако $a \in G^+$. Контрадикција. □

Није тешко доказати да је ваљано и следеће правило извођења:

- *из* $\alpha \leftrightarrow \beta$, *закључујемо* $M_{=a}\alpha \leftrightarrow M_{=a}\beta$, *за сваки* $a \in G^+$.

Теорема 3.2.17. (Теорема дедукције) *Ако је* T *скуп формула, а* Φ *и* Ψ *или обе класичне или обе вероватносне формуле, тада из* $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$, *следи* $T \vdash \Phi \to \Psi$.

Доказ. Доказ се спроводи трансфинитном индукцијом по дужини доказа за Ψ из $T \cup \{\Phi\}$. Класични случајеви доказаују се стандардно. Претпоставимо да $\Phi, \Psi \in For^M(L_{PG^+})$, и да је $\Psi = \neg A$ изведено из скупа $T \cup \{\Phi\}$ применом правила 3. Тада је, за неку класичну формулу α:
$T \cup \{\Phi\} \vdash A \to M_{\neq a}\alpha$, за свако $a \in G^+$,
$T \vdash \Phi \to (A \to M_{\neq a}\alpha)$, за свако $a \in G^+$, (према индукцијској претпоставци)
$T \vdash (\Phi \wedge A) \to M_{\neq a}\alpha$, за свако $a \in G^+$,
$T \vdash \neg(\Phi \wedge A)$, (према правилу 3)
$T \vdash \Phi \to \neg A$
$T \vdash \Phi \to \Psi$. □

Скуп формула T је *максимално непротивречан* ако важи:

- за сваку класичну формулу α, ако је $T \vdash \alpha$, тада $\alpha \in T$ и $M_{=0}\neg\alpha \in T$, и
- за сваку вероватносну формулу A, или $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Теорема 3.2.18. *Сваки непротивречан скуп T се може проширити до максимално непротивречног.*

Доказ. Нека је T непротивречан скуп, $Con^C(T)$ скуп свих класичних последица од T, $A_0, A_1, \ldots$, набрајање свих формула мере и $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ набрајање свих класичних формула. Дефинишимо низ T_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, на следећи начин:

1. $T_0 = T \cup Con^C(T) \cup \{M_{=0}\neg\alpha : \alpha \in Con^C(T)\}$,

2. за свако $i \geqslant 0$, ако је $T_{2i} \cup \{A_i\}$ непротивречан скуп, онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{A_i\}$; иначе је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg A_i\}$,

3. за свако $i \geqslant 0$, $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{M_{=a}\alpha_i\}$, за неко $a \in G^+$, тако да је T_{2i+2} непротивречан.

Сваки од скупова T_i, $i \geqslant 0$, је непротивречан. Лако се види да су скупови добијени корацима 1. и 2. конструкције непротивречни. Размотримо корак 3. Ако је T_{2i+1} непротивречан, и ако би за свако $a \in G^+$ било $T_{2i+1} \cup \{M_{=a}\alpha\} \vdash \bot$, имали бисмо:
$T_{2i+1} \vdash M_{=a}\alpha \to \bot$, $a \in G^+$ (према теореми дедукције)
$T_{2i+1} \vdash \top \to M_{\neq a}\alpha$, $a \in G^+$
$T_{2i+1} \vdash \neg\top$ (према правилу 3)
тј. T_{2i+1} је противречан, што је у контрадикцији са претпоставком. Дакле, непротивречно проширење дато у кораку 3. је увек могуће.

Нека је $\overline{T} = \bigcup_{i \geqslant 0} T_i$.

(I) *За сваку вероватносну формулу A, $A \in \overline{T}$ или $\neg A \in \overline{T}$.*

(II) *За свако $i \geqslant 0$, скуп T_i је непротивречан.*

(III) *За сваку формулу Φ, ако је $T_i \vdash \Phi$, за неко $i \geqslant 0$, тада $\Phi \in \overline{T}$.*
Ако је Φ класична формула, тада $\Phi \in T_0$, па тврђење важи. Нека је $\Phi = A_k$ формула мере таква да је $T_i \vdash A_k$, за неко $i \geqslant 0$. Ако $A_k \notin \overline{T}$, тада бисмо имали, према (I), да $\neg A_k \in \overline{T}$, па би скуп $T_{\max\{i,2k+1\}+1}$ био противречан, што је немогуће према (II).

(IV) *Скуп $\overline{T}$ је дедуктивно затворен, тј. ако је $\overline{T} \vdash \Phi$, тада $\Phi \in \overline{T}$.*
Претпоставимо $\overline{T} \vdash \Phi$. Тврђење очигледно важи ако је Φ било која класична формула. Размотримо случај када је Φ формула мере. Ако је доказ формуле Φ из $\overline{T}$ коначан лако се доказује да $\Phi \in \overline{T}$. Претпоставимо да је низ формула $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi$ бесконачан доказ формуле Φ из $\overline{T}$. Показаћемо да за сваки k, ако је Φ_k добијено помоћу неког од правила извођења и све претпоставке припадају $\overline{T}$, тада $\Phi_k \in \overline{T}$. Претпоставимо да је Φ_k добијено применом правила 1 и да његове претпоставке Φ_k^1 и Φ_k^2 припадају $\overline{T}$. Тада постоји i такав да $\Phi_k^1, \Phi_k^2 \in T_i$. Пошто $T_i \vdash \Phi_k$, имамо да $\Phi_k \in \overline{T}$. Ако је Φ_k добијено применом правила 2, тада претпоставка припада T_0, па исто важи и за Φ_k. Нека је $\Phi_k = \neg A$ добијено применом бесконачног правила 3 на формуле $\Phi_k^a = A \to M_{\neq a}\alpha$, $a \in G^+$, при чему за све $a \in G^+$, $\Phi_k^a \in \overline{T}$. Претпоставимо да $\Phi_k \notin \overline{T}$. Тада $A \in \overline{T}$, па постоји $i \geqslant 0$ тако да $A \in T_i$. С друге стране, ако је $\alpha = \alpha_j$, тада, према кораку 3. конструкције, за неки $a_j \in G^+$, $M_{=a_j}\alpha_j \in T_{2j+2}$. Такође, из $\Phi_k^{a_j} \in \overline{T}$, следи да постоји $m \geqslant 0$, такав да $\Phi_k^{a_j} = A \to M_{\neq a_j}\alpha \in T_m$. Дакле, $A, M_{=a_j}\alpha_j, A \to M_{\neq a_j}\alpha_j \in T_{\max\{i,2j+2,m\}+1}$, одакле следи да је $T_{\max\{i,2j+2,m\}+1}$ противречан скуп, супротно тврђењу (II).

(V) *Скуп $\overline{T}$ је максимално непротивречан.* □

Теорема 3.2.19. *Сваки непротивречан скуп формула T има мерљив L_{PG^+}-модел.*

Доказ. Према теореми 3.2.18 постоји максимално непротивречно проширење $\overline{T}$ скупа T. Дефинишимо структуру $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ на следећи начин:

- W је скуп свих класичних исказних валуација које задовољавају скуп свих класичних последица од T, тј. $W = \{w : w \models Con^C(T)\}$,
- $\mathcal{F} = \{[\alpha] : \alpha \in For^C(L_{PG^+})\}$, при чему је $[\alpha] = \{w \in W : w \models \alpha\}$, за сваку класичну формулу α,
- $\mu : \mathcal{F} \to G^+$ је дато са: $\mu([\alpha]) = a$ акко $M_{=a}\alpha \in \overline{T}$,
- $v : W \times I \to \{true, false\}$ је пресликавање такво да за сваки свет $w \in W$ и свако исказно слово $p \in I$ важи: $v(w,p) = true$ акко $w \models p$.

Докажимо, најпре, да је $\mathbf{M}$ један мерљив L_{PG^+}-модел. На основу теореме потпуности класичног исказног рачуна скуп W је непразан. Лако се доказује да је $\mathcal{F}$ једна алгебра подскупова од W. Докажимо да је μ G^+-мера на $\mathcal{F}$. Најпре, проверимо да ли је μ добро дефинисано пресликавање. Ако је $[\alpha] = [\beta]$, тада је, према теореми потпуности исказног рачуна $Con^C(T) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, па је и $\overline{T} \vdash M_{=0}\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$, према правилу 2, те добра дефинисаност следи из аксиоме 3. Нека је даље, $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$, $M_{=a}\alpha \in \overline{T}$ и $M_{=b}\beta \in \overline{T}$. Ако се поново позовемо на теорему потпуности исказног рачуна, лако закључујемо да $\overline{T} \vdash M_{=0}(\alpha \wedge \beta)$, па према аксиоми 4 следи да $M_{=a+b}(\alpha \vee \beta) \in \overline{T}$, тј. $\mu([\alpha] \cup [\beta]) = a + b$.

Остало је још да се докаже да за сваку формулу Φ важи: $\mathbf{M} \models \Phi$ ако и само ако $\Phi \in \overline{T}$. Ако је Φ класична формула, тврђење очигледно важи. Нека је Φ облика $M_{=a}\alpha$. Ако је $\mathbf{M} \models M_{=a}\alpha$, тада је $\mu([\alpha]) = a$, па $M_{=a}\alpha \in \overline{T}$. Слично се доказује и друга страна тврђења, као и да тврђење важи за мормуле мере које су веће сложености. □

На потпуно аналоган начин могла би се проширити интуиционистичка логика. Један од разлога је и тај што се G^+-мера може дефинисати на прстену $\mathcal{D}$ подскупова од Ω:

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$,
2. ако $A, B \in \mathcal{D}$, тада $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{D}$,
3. ако $A, B \in \mathcal{D}$, тада $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

Посебно интересантна може бити логика која одговара некој G^+-мери, при чему је $\mathbf{G} = (G, \leqslant, +, 0)$ *линеарно* уређен комутативан моноид. У овом случају за сваку G^+-меру μ дефинисану на прстену $\mathcal{D}$ подскупова од Ω могу да наступе следећа два случаја:

- скуп $\{\mu(A) : A \in \mathcal{D}\}$ је ограничен у $(G, \leqslant)$;
- скуп $\{\mu(A) : A \in \mathcal{D}\}$ није ограничен у $(G, \leqslant)$.

У првом случају, ранг екстензије G^+-мере на поље подскупова $\mathcal{F}$ генерисано са $\mathcal{D}$ биће неки сегмент $[0, 1] \subseteq G^+$, док смо, у другом случају, приморани да скупу G^+ додамо нови елемент ∞, $\mu(\Omega) = \infty$, при чему је:

$$x < \infty, \text{ за свако } x \in G^+,$$

и

$$\infty + \infty = \infty, \ x + \infty = \infty = \infty + x, \text{ за свако } x \in G^+.$$

Значајно је да, у случају линеарног уређења, можемо увести слабије операторе мере: $M_{\geqslant a}$ и $M_{\leqslant a}$, при чему је оператор $M_{=a}$ дефинабилан преко њих: $M_{=0}\alpha \stackrel{\text{def}}{=} M_{\geqslant a}\alpha \wedge M_{\leqslant a}\alpha$.

Логике које „покривају" $[0,1]_{G^+}$-мере су познате вероватносне логике детаљно проучене у [12, 13, 35, 39, 45, 46, 48].

У наставку ћемо описати логику која одговара једној $G^+ \cup \{\infty\} = [0,\infty]$-мери. Скуп формула $For(L_{P[0,\infty]})$ једне овакве логике изграђујемо на потпуно сличан начин као скуп $For(L_{PG^+})$, осим што су основне формуле мере $M_{\leqslant a}\alpha$ и $M_{\geqslant a}\alpha$, где је α класична формула исказног рачуна и $a \in [0,\infty]$.

За давање значења формулама користићемо моделе који подсећају на Крипкеове моделе, али је уместо релације достижности дефинисана $[0,\infty]$-мера над подскуповима скупа светова.

Дефиниција 3.2.9. *$L_{P[0,\infty]}$-модел је структура $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$, где је:*

- *W непразан скуп објеката које називамо световима,*
- *$\mathcal{F}$ алгебра подскупова од W,*
- *μ је $[0,\infty]$-мера на $\mathcal{F}$:*
  - $\mu(\Omega) = \infty$,
  - $\mu(\emptyset) = 0$,
  - *ако су A и B дисјунктни, тада је $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
- *$v : W \times I \to \{true, false\}$ пресликавање које сваком свету $w \in W$ додељује једну класичну (дво-вредносну) валуацију исказних слова; свака валуација $v(w,\cdot)$ се на уобичајен начин проширује на све класичне формуле.*

$L_{P[0,\infty]}$-модел $\mathbf{M} = \langle W, \mathcal{F}, \mu, v\rangle$ је мерљив ако и само ако

$$[\alpha]_{\mathbf{M}} = \{w \in W : v(w,\alpha) = true\} \in \mathcal{F}$$

за сваку класичну формулу α. Класу свих мерљивих $L_{P[0,\infty]}$-модела означаваћемо са $\mathrm{Meas}(L_{P[0,\infty]})$.

Релација задовољења $\models \subset \mathrm{Meas}(L_{P[0,\infty]}) \times For(L_{P[0,\infty]})$ дефинисана је на уобичајен начин.

Аксиоматски систем $Ax(L_{P[0,\infty]})$ за логику $L_{P[0,\infty]}$ садржи следеће схеме аксиома:

1. све $For^C(L_{P[0,\infty]})$-инстанце класичних исказних таутологија,
2. све $For^M(L_{P[0,\infty]})$-инстанце класичних исказних таутологија,
3. $M_{\geqslant 0}\alpha$,
4. $M_{<a}\alpha \to M_{\leqslant a}\alpha$,
5. $M_{\leqslant a}\alpha \to M_{<b}\alpha,\ b > a$,

6. $M_{\leqslant 0}\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (M_{=a}\alpha \to M_{=a}\beta)$,

7. $(M_{=a}\alpha \wedge M_{=b}\beta \wedge M_{\leqslant 0}(\alpha \wedge \beta)) \to M_{=a+b}(\alpha \vee \beta)$

8. $M_{<\infty}\alpha \to M_{\geqslant\infty}\neg\alpha$

и следећа правила извођења:

1. из Φ и $\Phi \to \Psi$, закључујемо Ψ, ако је $\Phi, \Psi \in For^C(L^F_{CP})$ или $\Phi, \Psi \in For^P(L^F_{CP})$,

2. из α, закључујемо $M_{\leqslant 0}\neg\alpha$,

3. из $A \to M_{\neq a}\alpha$, за сваки a из $[0,\infty]$, закључујемо $\neg A$.

4. из $A \to M_{\geqslant n}\alpha$, за сваки n из неког неограниченог подскупа $N \subseteq P$, закључујемо $A \to M_{\geqslant\infty}\alpha$.

Теореме сагласности и дедукције доказују се потпуно аналогно теоремама 3.2.16 и 3.2.17. Није тешко доказати да су, у овом случају, ваљана и следећа правила извођења:

- *из* α, *закључујемо* $M_{\geqslant\infty}\alpha$;
- *из* $\alpha \leftrightarrow \beta$, *закључујемо* $M_{=a}\alpha \leftrightarrow M_{=a}\beta$, *за сваки* $a \in [0,\infty]$.

Такође, сваки непротивречан скуп формула T може се проширити до максимално непротивречног на начин који потпуно одговара проширивању описаном у доказу теореме 3.2.18:

1. $T_0 = T \cup Con^C(T) \cup \{M_{=0}\neg\alpha : \alpha \in Con^C(T)\}$,

2. за свако $i \geqslant 0$, ако је $T_{2i} \cup \{A_i\}$ непротивречан скуп, онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{A_i\}$; иначе је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg A_i\}$,

3. за свако $i \geqslant 0$, $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{M_{=a}\alpha_i\}$, за неко $a \in G^+$, тако да је T_{2i+2} непротивречан,

$\overline{T} = \bigcup_{i\geqslant 0} T_i$. Тада важе следећа тврђања:
(I) *За сваку вероватносну формулу* A, $A \in \overline{T}$ *или* $\neg A \in \overline{T}$.
(II) *За свако* $i \geqslant 0$, *скуп* T_i *је непротивречан.*
(III) *За сваку формулу* Φ, *ако је* $T_i \vdash \Phi$, *за неко* $i \geqslant 0$, *тада* $\Phi \in \overline{T}$.
(IV) *Скуп* $\overline{T}$ *је дедуктивно затворен, тј. ако је* $\overline{T} \vdash \Phi$, *тада* $\Phi \in \overline{T}$.
Практично једина новина (у односу на поменути доказ) коју овде треба доказати је: ако је $\Phi_k = A \to M_{\geqslant\infty}\alpha$ добијено применом бесконачног правила 4 на формуле $\Phi^n_k = A \to M_{\geqslant n}\alpha$, $n \in N$, при чему је N неки неограничен подскуп од $[0,\infty]$ и $\Phi^n_k \in \overline{T}$, $n \in N$, тада $\Phi_k \in \overline{T}$. Претпоставимо да $\Phi_k \notin \overline{T}$. Тада $\neg\Phi_k = A \wedge \neg M_{\geqslant\infty}\alpha \in \overline{T}$, па постоји $i \geqslant 0$ тако да $A, \neg M_{\geqslant\infty}\alpha \in T_i$. С друге стране, ако је $\alpha = \alpha_j$, тада, према кораку 3. конструкције, за неки $a_j \in [0,\infty]$, $M_{=a_j}\alpha \in T_{2j+2}$; није тешко видети да је $a_j \neq \infty$. Пошто је N неограничен скуп, постоји $n' \in N$ такав да је $n' > a_j$, па постоји и $m \geqslant 0$, такав да $\Phi^{n'}_k = A \to M_{\geqslant n}\alpha \in T_m$. Дакле, $A, M_{=a_j}\alpha_j, A \to M_{\geqslant n}\alpha \in T_{\max\{i,2j+2,m\}+1}$, одакле следи да је $T_{\max\{i,2j+2,m\}+1}$ противречан скуп, супротно тврђењу (II).
(V) *Скуп* $\overline{T}$ *је максимално непротивречан.*

Коришћењем максимално непротивречног проширења ма које непротивречне теорије лако конструишемо њен канонски модел.

Литература

[1] K. P. S. Bhaskara Rao, M. Bhaskara Rao, *Theory of Charges*, Academic Press, INC, London, 1983.

[2] G. Boole, *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, Walton and Maberley, London, 1854.

[3] J. Barwise, *Admissible sets and Structure*, Springer-Verlag, 1975.

[4] J. Barwise and S. Feferman (Editors), *Model-Theoretic Logics*, Springer-Verlang, 1985.

[5] V. Biazzo, A. Gilio, T. Lukasiewicz, G. Sanfilippo, *Probabilistic logic under coherence, model-theoretic probabilistic logic, and defolt reasoning in System P*, JANCL-12/2002, ECSQARU'01, 189–213, 2002.

[6] S. Coletti, R. Scozzafava, *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 2002.

[7] D. Ćirić and Ž. Mijajlović, *Topologies on classes*, Math. Balcanica (1990).

[8] D. Ćirić and Ž. Mijajlović, *Class spaces*, Math. Balcanica (1993).

[9] R. Djordjević, M. Rašković, Z. Ognjanović, *Completeness theorem for propositional probabilistic models whose measures have only finite ranges*, Arch. Math. Logic (2004) 43, 557-563.

[10] H. -D. Ebbinghaus , J. Flum , Thomas W., *Mathematical Logic*, Springer-Verlang, 1994.

[11] B. de Finetti, *Theory of probability*, Volume 1, John Wiley and Sons, 1974.

[12] R. Fagin, J. Halpern, N. Megiddo, *A logic for reasoning about probabilities*, Information and Computation, vol. 87, no. 1/2, 78 – 128, 1990.

[13] R. Fagin, J. Halpern, *Reasoning about knowledge and probability*, Journal of the ACM, vol. 41, no. 2, 340 – 367, 1994.

[14] T. Flaminio, F. Montagna, *A logical and algebraic treatment of conditional probability*, in Proceedings of IPMU '04, (Edts. L.A. Zadeh), Perugia, Italy, July, 4-9, 2004, 493–500, 2004.

[15] J. Flum, M. Ziegler, *Topological Model Theory*, Springer-Verlang, 1980.

[16] A. Gilio, *Probabilistic reasoning under coherence in System P^**, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 34: 5-34, 2002.

[17] J. Y. Halpern, *An analysis of first-order logics of probability*, Artificial Intelligence, 46, 311 – 350, 1990.

[18] J. Hawthorne, *On the logic of nonmonotonic conditionals and conditional probabilities*, Journal of Philosophical Logic, v. 25, no. 1, 185–218, 1996.

[19] J. Hawthorne, *On the logic of nonmonotonic conditionals and conditional probabilities: Predicate logic*, Journal of Philosophical Logic, v. 27, no. 1, 1–34, 1998.

[20] W. van der Hoek: *Some Considerations on the Logic PFD*, Journal of Applied Non-Classical Logics 7(3), 287–307, 1997.

[21] D. N. Hoover, *Probability logic*, Annals of mathematical logic 14, 287 – 313, 1978.

[22] N. Ikodinović, *Kregova interpolaciona teorema u verovatnosnim logikama*, Magistarska teza, Kragujevac, 2000.

[23] N. Ikodinović, Z. Ognjanović, *A logic with coherent conditional probabilities*, Proceedings of the 8th European Conference Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty ECSQARU-2005, Barcelona, Spain, July 6-9, 2005 editor Luis Godo, Lecture Notes in Computer Science Vol. 3571 726–736, 2005.

[24] Z. Ivković, *Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[25] J. E. Keisler, *Logic with the Quantifier "There exist uncountably many"*, Annals of Mathematical Logic **1**, 1970.

[26] H.J. Keisler, *Hyperfinite model theory*, in: Logic Colloquium '76, North-Holland, Amsterdam, 5 – 110, 1977.

[27] H.J. Keisler, *Probability quantifiers*, in: Model-theoretic logics. etds. J. Barwise, S. Feferman, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag. Berlin, 509 – 556, 1985.

[28] M. R. Koen , E. Najgel , *Uvod u logiku i naučni metod*, Jasen, Beograd, 2004.

[29] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, Ergebnisse Der Mathematik, 1933; translated as Foundations of Probability, Chelsea Publishing Company, 1950.

[30] A. Kron, *Metodologija i filozofija nauke, Odabrani radovi, Knjige I i II*, Institut za filozofiju Filozofskog fakulteta u Beogradu, Beograd, 2004.

[31] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

[32] E. Dž. Lemon, *Upoznavanje sa logikom*, Jasen, Nikšić, 2002.

[33] T. Lukasiewicz, *Probabilistic Default Reasoning with Conditional Constraints*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 34, 35-88, 2002.

[34] E. Marchioni, L. Godo, *A Logic for Reasoning about Coherent Conditional Probability: A Modal Fuzzy Logic Approach*, JELIA 2004: 213-225.

[35] Z. Marković, Z. Ognjanović, M. Rašković, *A Probabilistic Extension of Intuitionistic Logic*, Mathematical Logic Quarterly, vol 49, no 5, 415–424, 2003.

[36] Ž. Mijajlović, *An Introduction to Model Theory*, University of Novi Sad, Faculty of Science, Novi Sad, 1987.

[37] J. D. Monk, *Mathematical Logic*, Springer-Verlang, 1976.

[38] Petr Hájek, *Matamathematics of fuzzy logic*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[39] N. Nilsson, *Probabilistic logic*, Artificial inteligence, no. 28, 71–87, 1986.

[40] N. Nilsson, *Probabilistic logic revised*, Artificial inteligence, no. 59, 1993, 39–42.

[41] Z. Ognjanović, *Neke verovatnosne logike i njihove primene u računarstvu*, Doktorska disertacija, Kragujevac, 1999.

[42] Z. Ognjanović, N. Ikodinović, Z. Marković, *A logic with Kolmogorov style conditional probabilities*, Proceedings of the 5th Panhellenic logic symposium, Athens, Greece, July 25-28, 2005, 111–116, 2005.

[43] Z. Ognjanović, N. Krdžavac, *Uvod u teorijsko računarstvo*, Beograd-Kragujevac, 2004.

[44] Z. Ognjanović, M. Rašković, *A logic with higher order probabilities*, Publications de L'Institute Matematique (Beograd), 60 (74) (1996), pp 1-4.

[45] Z. Ognjanović, M. Rašković, *Some probability logics with new types of probability operators*, Journal of logic and Computation, Volume 9, Issue 2, 181–195, 1999.

[46] Z. Ognjanović, M. Rašković, *Some first order probability logics*, Theoretical Computer Science, Vol. 247, No. 1-2, 191 – 212, 2000.

[47] M. Rašković, *Completeness theorem for biprobability models*, Jornal of Symboloc Logic **51**, 586–590, 1986.

[48] M. Rašković, *Classical logic with some probability operators*, Publication de l'Institut Math. (NS) vol 53 (67), 1993, 1-3.

[49] M. Rašković, R. Djordjević, *Probability quantifiers and operators*, Vesta, Beograd, 1996.

[50] M. Rašković, Z. Ognjanović, Z. Marković, *A probabilistic Approach to Default Reasoning*, 10th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning NMR2004, Westin Whistler, Canada, June 6-8, 335–341, 2004.

[51] M. Rašković, Z. Ognjanović, Z. Marković, *A Logic with Conditional Probabilities*, 9th Euroean conference JELIA'04 Logics in Artificial Inteligence, Lecture notes in artificial inteligence (LNCS/LNAI) 3229, 226-238, 2004.

[52] J. Sgro, *Completeness theorem for topological models*, Annals of Math. Logic **11**, 1977, 173-193.