УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Невена З. Петровић

НЕСТАНДАРДНЕ АНТИ-ГАУСОВЕ КВАДРАТУРНЕ ФОРМУЛЕ

Докторска дисертација

Крагујевац, 2024

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF SCIENCE

Nevena Z. Petrović

NON-STANDARD ANTI-GAUSSIAN QUADRATURE RULES

Doctoral Dissertation

Kragujevac, 2024

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Аутор
Име и презиме: Невена Петровић
Датум и место рођења: 14.03.1986, Крагујевац
Садашње запослење: Асистент
Докторска дисертација
Наслов: Нестандардне анти-Гаусове квадратурне формуле
Број страница: 92
Број слика и табела: 1 слика, 9 табела
Број библиографских података: 75
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу, Крагујевац
Научна област (УДК): Математика (Нумеричка анализа, УДК 51)
Ментор: др Марија Станић, редовни професор на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу
Број и датум одлуке Већа универзитета о прихватању теме докторске дисертације: IV-01-655/13, 14.09.2022.

Захвалница

Овом приликом желим да се захвалим свом ментору проф. др Марији Станић на великој подршци, усмерењу и стручној помоћи у научном раду, на преношењу својих искустава и знања на млађе колеге и оспособљавању за самостални научно-истраживачки рад. Захвалност, такође, дугујем колегиници проф. др Татјани Томовић Младеновић, која је учествовала у свим истраживањима, као и колеги проф. др Мирославу Пранићу на несебичној сарадњи.

Апстракт

Ова дисертација се бави генерализацијом анти-Gauss-ових квадратурних формула које су уведене 1996. године на простору алгебарских полинома.

Прва генерализација која је урађена односи се на проширење ових формула на простор тригонометријских полинома, при чему је посебна пажња посвећена парним тежинским функцијама на интервалу $[-\pi, \pi)$. Главне особине ових квадратурних формула су доказане и представљен је ефикасан нумерички метод за њихово конструисање. Тај метод је базиран на везама између чворова и тежинских коефицијената квадратурне формуле за тригонометријске полиноме и одговарајуће квадратурне формуле за алгебарске полиноме.

Друга врста генерализације која је представљена у овој дисертацији односи се на вишеструку ортогоналност. Наиме, уведени су појмови скупа анти-Gauss-ових и скупа усредњених квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу, као и одговарајућа класа вишеструко ортогоналних полинома. Доказане су основне особине ових квадратурних формула и вишеструко ортогоналних полинома и представљени су нумерички методи за њихово конструисање.

Оба уопштења пропраћена су нумеричким примерима, док је проширење на простор тригонометријских полинома употпуњено поређењем са другим постојећим методима.

Кључне речи: анти-Gauss-ове квадратурне формуле, рекурентна релација, тежинске функције, усредњена Gauss-ова квадратурна формула, оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу, вишеструко ортогонални полиноми

Abstract

In this thesis we are considering the generalization of anti-Gaussian quadrature rules, introduced for algebraic polynomials in 1996.

The first generalization refers to the extension of these formulas to the space of trigonometric polynomials, with a special attention paid to an even weight function on $[-\pi, \pi)$. The main properties of such quadrature rules have been proved, and an effective numerical method for their construction has been presented. That method is based on relations between nodes and weights of the quadrature rule for trigonometric polynomials, and the corresponding quadrature rule for algebraic polynomials.

The second type of generalization presented in this dissertation is related to multiple orthogonality. Namely, the notions of a set of anti-Gaussian and a set of averaged quadrature rules for the optimal set of quadrature rules in Borges' sense were introduced, as well as the corresponding class of multiple orthogonal polynomials. The main properties of such quadrature rules and multiple orthogonal polynomials have been proved, and numerical methods for their constructions have been presented.

Both generalizations include some numerical examples, and the extension to the space of trigonometric polynomials is completed by a comparison with other available methods.

Key words: anti-Gaussian quadrature rules, recurrence relation, weight functions, averaged Gaussian quadrature rule, optimal set of quadrature rules in Borges' sense, multiple orthogonal polynomials

Предговор

Ова дисертација представља резултат вишегодишњег студијског и истраживачког рада под менторством проф. др Марије Станић, редовног професора на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу. Главна област истраживања докторске дисертације су нестандардне анти-Gauss-ове квадратурне формуле, које припадају важном делу Нумеричке анализе - области названој Нумеричка интеграција. Како се конструкција ових квадратурних формула базира на ортогоналним полиномима, то је велики део истраживања посвећен и области Теорије ортогоналних система, која је део Теорије апроксимација.

Познате Gauss-ове квадратурне формуле, уведене 1814. године, постижу максимални алгебарски степен тачности. Од тада су ове квадратурне формуле разматране од стране многих научника и генерализоване у више праваца. Конструисане су формуле Gauss-овог типа на другим линеарним просторима, као што су простор тригонометријских полинома, простор рационалних функција итд. Први радови у области квадратурних формула Gauss-овог типа за тригонометријске полиноме публиковани су од стране руских математичара Turetzkii-ог и Mysovskikh-ог, а у последње две деценије су се овом облашћу бавили и професори Г. В. Миловановић, М. П. Станић, А. С. Цветковић и Т. В. Томовић Младеновић. Њихова пажња била је усмерена на проучавање тригонометријских полинома полу-целобројног степена, њихову примену на конструисање квадратурних формула, као и оцене њихових остатака. Поред проширења примене квадратурних формула на друге просторе, једно од интересантних уопштења Gauss-ових квадратурних формула односи се на формирање оптималних скупова квадратурних формула, које је уско повезано са вишеструком ортогоналношћу. Појам оптималног скупа квадратурних формула први пут се појављује у раду Borges-а, а потом и у радовима Миловановића, Станићеве и Томовић Младеновићке, који су ове формуле проширили на простор тригонометријских полинома. Главна основа оригиналних резултата аутора ове дисертације је идеја о формирању анти-Gauss-ових квадратурних формула за алгебарске полиноме, настала од стране математичара Dirk Laurie-а, који је помоћу њих увео и појам усредњених квадратурних формула. Анти-Gauss-ове квадратурне формуле имају особину да дају грешку једнаке величине али супротног знака у односу на одговарајућу Gauss-ову квадратурну формулу.

Дисертација је подељена у четири главе. Прве две представљају теоријску основу истраживања у оквиру ове дисертације, док су у трећој и четвртој глави дати оригинални резултати који су публиковани или су у припреми за публиковање.

У првој глави је дат преглед основних резултата теорије ортогоналних полинома на реалној правој, као и тригонометријских ортогоналних полинома целобројног и полу-целобројног степена. Тиме су обухваћени услови за егзистенцију и јединственост ових полинома, као и докази рекурентних релација које они задовољавају.

Друга глава посвећена је Gauss-овим квадратурним формулама за алгебарске и тригонометријске полиноме, при чему су на простору тригонометријских полинома посебно разматране квадратурне формуле са парним и непарним бројем чворова. Наведени су начини формирања ових квадратурних формула.

У трећој глави уведени су појмови анти-Gauss-ових и усредњених Gauss-ових квадратурних формула. Посебна пажња посвећена је начину нумеричког конструисања анти-Gauss-ових квадратурних формула на класи тригонометријских полинома, који се базира на везама између њихових чворова и тежинских коефицијената са наведеним параметрима у одговарајућим квадратурним формулама Gauss-овог типа за алгебарске полиноме. Као у глави 2, одвојено су посматране квадратурне формуле са парним и непарним бројем чворова, са посебним освртом на парне тежинске функције. Битну улогу у овом конструисању играју тригонометријски полиноми који су ортогонални у односу на билинеарне форме $(f,g)_w = (2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1})(fg)$, где је $\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}$ Gauss-ова квадратурна формула, па су у поглављу 3.2 разматране њихове особине и показани једноставни начини за њихово формирање. На крају главе дати су нумерички примери у којима су приказани резултати примене новодобијених формула, као и поређење наших метода са другим постојећим методама, где се јасно види допринос ових резултата у области Нумеричке интеграције.

Последња, четврта, глава посвећена је вишеструко ортогоналним полиномима и оптималним скуповима квадратурних формула у Borges-овом смислу. Уведени су појмови скупа анти-Gauss-ових и скупа усредњених квадратурних формула за посматрани оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу. У поступку конструисања поменутих квадратурних формула коришћени су вишеструко ортогонални полиноми у односу на билинеарне форме $(f,g)_k = \left(2I_k - G_n^{(k)}\right)(fg)$, $k = 1,\ldots,r$, где је $\left\{G_n^{(k)}, k = 1,\ldots,r\right\}$ оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу. Њихове особине, као и рекурентне релације које ови полиноми задовољавају, показане су у поглављу 4.1. У последњем поглављу 4.3 дати су нумерички примери, у којима су приказане вредности параметара скупа анти-Gauss-ових квадратурних формула за одређене тежинске функције, као и грешке које настају применом свих поменутих скупова квадратурних формула, а које јасно показују побољшање апроксимације посматраних интеграла.

Листа слика

Листа табела

Садржај

Увод

Један од најзначајнијих објеката математичке анализе јесте одређени интеграл. Његова примена огледа се у разним областима, а неки од примера су у израчунавањима многих физичких величина, као што су површина, запремина, дужина одређеног пута, момент инерције и тако даље.

Нумеричка интеграција је област нумеричке математике која се бави приближним израчунавањем вредности одређених интеграла, користећи вредности подинтегралне функције на неком скупу тачака. Формуле за апроксимацију вредности једноструких интеграла називамо квадратурним формулама или квадратурама, формуле за апроксимацију вредности двоструких интеграла кубатурним формулама итд. У овом раду ће наша пажња бити усмерена на Gauss-ове и анти-Gauss-ове квадратурне формуле, при чему ћемо раздвојено посматрати случајеве квадратура за алгебарске и квадратура за тригонометријске полиноме, као и на оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу.

Потреба за приближним израчунавањем вредности одређених интеграла јавља се у великом броју случајева, када Newton-Leibniz-ова формула

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

није применљива, при чему F представља примитивну функцију функције f. Наведимо неке од тих случајева.

- Примитивна функција F не може бити представљена помоћу коначног броја елементарних функција (на пример када је $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$).
- Покушај примене Newton-Leibniz-ове формуле доводи до потребе за рачунањем веома сложених израза.
- Вредности подинтегралне функције су познате само на дискретном скупу тачака.

За почетак, уведимо ознаке које ћемо користити у даљем раду. Са $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$ ћемо означавати простор свих алгебарских, односно тригонометријских полинома, док ће $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ и $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}$, $n \in \mathbb{N}_0$, представљати линеарни простор свих алгебарских и тригонометријских полинома степена не већег од n, редом.

Нека је G_n одговарајућа Gauss-ова квадратура са $n \in \mathbb{N}$ чворова

$$G_n f = \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k), \tag{1}$$

алгебарског степена тачности $2n-1$, за интеграл

$$If = \int_a^b f(x)u(x)\mathrm{d}x, \tag{2}$$

где је $u(x)$ дата тежинска функција на посматраном интервалу $[a, b)$. Формула G_n задовољава једнакост $G_n p = Ip$, за све $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Дакле, користећи *апроксимацију* G_n, интеграл I се може представити у облику

$$If = G_n f + R_n f, \tag{3}$$

где је $R_n f$ одговарајући *остатак*, односно грешка која настаје применом ове апроксимације. Тачке x_k називамо *чворовима*, а коефицијенте ω_k *тежинским коефицијентима* квадратурне формуле. Овај чувени метод нумеричке интеграције увео је GAUSS 1814. године (видети [20]). Током наредних више од 200 година ова формула је разматрана од стране многих математичара и генерализована у више различитих праваца. Неки од радова у којима се може наћи више детаља о GAUSS-овим квадратурним формулама конструисаним на простору алгебарских полинома су [7], [9], [14], [17], [23], [24], [35].

За произвољну функцију f, одређивање оцене грешке $If - G_n f$ може бити јако компликовано. Користећи квадратурну формулу A са најмање $n+1$ чвором и алгебарским степеном тачности већим од $2n-1$, ова грешка би се могла описати разликом $Af - G_n f$. У циљу повећања тачности апроксимације посматраног интеграла, LAURIE у раду [32] уводи анти-GAUSS-ове квадратуре, са алгебарским степеном тачности $2n+1$, које дају грешку једнаке величине али супротног знака у односу на одговарајућу GAUSS-ову квадратурну формулу. Слична идеја, конструисања два нумеричка метода са овом особином, коришћена је у нумеричком решавању обичних диференцијалних једначина (видети [16], [56], [58]).

Друга врста генерализације GAUSS-ових квадратурних формула настала је од стране Миловановића, Цветковића и Станићеве, који су дефинисали начин конструисања квадратурних формула GAUSS-овог типа за тригонометријске полиноме, са посебним освртом на парне тежинске функције (видети [42], [13]).

Такође, уопштење које је за наш рад интересантно, односи се на повећање броја посматраних тежинских функција. Наиме, BORGES је у раду [4] дефинисао оптимални скуп квадратурних формула које истовремено дају апроксимацију више различитих интеграла који су повезани истим интервалом интеграције и истим интеграндом, али се разликују по тежинским функцијама.

Како ћемо у наставку често користити појам скаларног производа, подсетимо се дефиниције и неких основних особина.

ДЕФИНИЦИЈА 0.1. *Нека је X линеаран векторски простор функција над пољем скалара $\mathbb{K}, \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Пресликавање $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ се назива скаларни производ уколико су задовољене следеће особине:*

1) $(x,x) \geqslant 0, (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$;

3) $(cx,y) = c(x,y)$;

4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

за све $x, y, x_1, x_2 \in X$ и свако $c \in \mathbb{K}$. Простор снабдевен скаларним производом назива се унитарним.

Једна од најзначајнијих особина скаларног производа је неједнакост CAUCHY-SCHWARZ-BUNYAKOVSKY-**ог** (видети [46], [34]):

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \quad x, y \in X, \tag{4}$$

при чему је норма дата са $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

За скуп $A \subset X$ кажемо да је *ортогонални систем* ако је $(x,y) = 0$, за све $x, y \in A$. Уколико уз то важи $(x,x) = 1$, за свако $x \in A$, онда је A *ортонормиран*.

1 Ортогонални полиноми

Једну од најзначајнијих улога у нумеричкој интеграцији играју ортогонални полиноми. Њихова главна примена лежи у процесу конструисања квадратурних формула, о чему ће бити више речи у трећој глави.

1.1 Алгебарски ортогонални полиноми

Означимо са μ неопадајућу ограничену функцију на реалној правој $\mathbb{R}$, за коју је индукована позитивна мера $\mathrm{d}\mu$ таква да има све моменте

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}\mu(x), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

коначне и $\mu_0 > 0$. Поред тога, претпоставимо да дистрибуција μ има бесконачно много тачака раста, односно да скуп

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mu(x+\varepsilon) - \mu(x-\varepsilon) > 0 \text{ за све } \varepsilon > 0\}$$

садржи бесконачно много елемената. Овај скуп називамо *носачем* мере $\mathrm{d}\mu$ и означавамо га са $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$.

У примени је често дистрибуција μ апсолутно непрекидна функција, па се уводи појам *тежинске функције* $u(x) = \mu'(x)$. Тада се мера $\mathrm{d}\mu$ може представити у облику $\mathrm{d}\mu(x) = u(x)\mathrm{d}x$, при чему је тежинска функција ненегативна, мерљива у Lebesgue-овом смислу на простору $\mathbb{R}$, сви моменти $\mu_k, k \in \mathbb{N}_0$, постоје и важи $\mu_0 > 0$.

Уведимо скаларни производ у односу на тежинску функцију u са

$$\langle f, g \rangle_u = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)u(x)\mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{P}. \tag{6}$$

Дефиниција 1.1. *Систем полинома* $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, *облика* $P_n(x) = \gamma_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $\gamma_n > 0$, *а за које важи*

$$\langle P_n, P_k \rangle_u = \delta_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k, \end{cases} \qquad n, k \geqslant 0, \tag{7}$$

назива се систем ортонормираних полинома у односу на тежинску функцију u, *а број* γ_n *водећи коефицијент полинома* P_n.

Често се уместо полинома $P_n(x)$ користе *монични ортогонални полиноми* $p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\gamma_n} = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$, за које важи $\langle p_n, p_n \rangle_u = \left\langle \frac{P_n}{\gamma_n}, \frac{P_n}{\gamma_n} \right\rangle_u = \frac{1}{\gamma_n^2} > 0$. Јединственост ових полинома следи из позитивне дефинитности скаларног производа (6) (видети [23]). Један од начина конструисања моничних ортогоналних полинома јесте примена Gram-Schmidt-овог поступка ортогонализације на скуп $U = \{1, x, x^2, \ldots\}$. Одговарајућа Gram-ова матрица се може представити помоћу момената датих са (5) на следећи начин

$$\mathcal{G}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Како је систем U линеарно независан, то је детерминанта GRAM-ове матрице позитивна за свако $n \in \mathbb{N}$.

Једну од најзначајнијих улога за лакше конструисање ортогоналних полинома игра трочлана рекурентна релација коју ови полиноми задовољавају и коју наводимо у следећим теоремама. Њихови докази се могу наћи у [34], [8], [23], [33] и многим другим књигама везаним за ортогоналне полиноме.

ТЕОРЕМА 1.1. *Ортонормирани полиноми $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, чија се ортогоналност посматра у односу на тежинску функцију u, задовољавају трочлану рекурентну релацију*

$$d_{k+1}P_{k+1}(x) = (x - c_k)P_k(x) - d_kP_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{9}$$

при чему је $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, а коефицијенти c_k и d_k су дати изразима

$$c_k = \int_{\mathbb{R}} xP_k(x)^2u(x)\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad d_k = \int_{\mathbb{R}} xP_{k-1}(x)P_k(x)u(x)\mathrm{d}x = \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_k}.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Монични ортогонални полиноми $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, који су ортогонални у односу на тежинску функцију u, задовољавају трочлану рекурентну релацију*

$$p_{k+1}(x) = (x - a_k)p_k(x) - b_kp_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{10}$$

при чему је $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1$, $a_k = c_k$ и $b_k = d_k^2 > 0$.

Из услова ортогоналности посматраних полинома добијамо следеће формуле за коефицијенте a_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ и b_k $(k \in \mathbb{N})$:

$$a_k = \frac{\langle xp_k, p_k\rangle_u}{\langle p_k, p_k\rangle_u}, \quad b_k = \frac{\langle p_k, p_k\rangle_u}{\langle p_{k-1}, p_{k-1}\rangle_u}, \tag{11}$$

док се почетни коефицијент b_0 може изабрати произвољно, а најчешће се у пракси узима $b_0 = \mu_0 = \int_{\mathbb{R}} u(x)\mathrm{d}x$.

Мењајући $k = 0, 1, \ldots, n-1$ у рекурентној релацији (9), добијамо следећи систем једначина

$$x\mathbf{P}_n(x) = J_n\mathbf{P}_n(x) + d_nP_n(x)\mathbf{e}_n, \tag{12}$$

где су

$$J_n = \begin{bmatrix} c_0 & d_1 & & & 0 \\ d_1 & c_1 & d_2 & & \\ & d_2 & c_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & d_{n-1} \\ 0 & & & d_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_n(x) = \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тродијагонална матрица J_n назива се JACOBI-*јева матрица*. Из система (12) видимо да је $P_n(x) = 0$ ако и само ако је $x\mathbf{P}_n(x) = J_n\mathbf{P}_n(x)$, одакле закључујемо да су нуле x_k, $k = 1, \ldots, n$, полинома P_n заправо сопствене вредности JACOBI-јеве матрице J_n. Сопствени вектори, који одговарају сопственим вредностима x_k, дати су са $\mathbf{P}_n(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Тиме смо доказали следећу лему.

ЛЕМА 1.1. *Нуле x_k, $k = 1, \ldots, n$, полинома P_n су сопствене вредности* JACOBI-*јеве матрице J_n, реда n, док су одговарајући сопствени вектори дати са $\mathbf{P}_n(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$.*

1.2 Тригонометријски ортогонални полиноми

Добро је познато да је за конструисање квадратурних формула са максималним алгебарским степеном тачности потребно разматрати ортогоналност у простору алгебарских полинома. У складу с тим, потреба за израчунавањем ортогоналних система тригонометријских полинома јавила се приликом конструисања квадратурних формула са максималним тригонометријским степеном тачности. У наставку ћемо одвојено посматрати систем тригонометријских полинома целобројног степена

$$\mathcal{T} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$$

од система тригонометријских полинома полу-целобројног степена

$$\mathcal{T}^{1/2} = \left\{\cos \frac{1}{2}x, \sin \frac{1}{2}x, \ldots, \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x, \ldots\right\}.$$

Тригонометријске функције облика

$$t_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \cos kx + d_k \sin kx\right), \quad c_k, d_k \in \mathbb{R}, \quad |c_n| + |d_n| \neq 0 \tag{13}$$

називају се *тригонометријски полиноми целобројног степена* n. Као што је на почетку речено, са $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, означавамо скуп свих тригонометријских полинома степена мањег или једнаког n, односно линеал $\mathcal{L}\{\cos kx, \sin kx \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$.

Слично, тригонометријске функције облика

$$t_{n+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(c_k \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + d_k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right), \tag{14}$$

за које је $c_k, d_k \in \mathbb{R}$, $|c_n| + |d_n| \neq 0$, називају се *тригонометријски полиноми полу-целобројног степена* $n+1/2$. Скуп свих тригонометријских полинома полу-целобројног степена мањег или једнаког $n+1/2$ означаваћемо са $\mathcal{T}_n^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, односно $\mathcal{T}_n^{1/2} = \mathcal{L}\left\{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x, \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x \mid k = 0, 1, \ldots, n\right\}$.

У наставку ћемо посматрати тригонометријске полиноме целобројног и полу-целобројног степена на интервалима $[-\pi, \pi)$ и $[0, 2\pi)$.

1.2.1 Ортогонални тригонометријски полиноми целобројног степена

Тригонометријски полином (13) може се записати у облику

$$A_n(x) = A \prod_{k=0}^{2n-1} \sin \frac{x - \tau_k}{2}, \quad A \neq 0, \tag{15}$$

где су са $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{2n-1}$ означене нуле тригонометријске функције (13), које леже у траци $-\pi \leqslant \mathrm{Re}\,\tau < \pi$ (видети [10], [33]). Очигледно је степен овог тригонометријског полинома једнак n. С друге стране, сваки тригонометријски полином облика (13) степена n може се представити помоћу алгебарског полинома q, степена $2n$, у облику $t_n(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} q\left(e^{\mathrm{i}x}\right)$ (видети [43]).

Како бисмо дефинисали ортогоналне тригонометријске полиноме целобројног степена, потребно је најпре увести скаларни производ тригонометријских полинома f и g, на простору $\mathcal{T}$, са

$$\langle f, g\rangle_w = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x, \tag{16}$$

где је $w(x)$ тежинска функција на интервалу $[-\pi, \pi)$.

Дефиниција 1.2. *Систем* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *тригонометријских полинома целобројног степена,* $A_n \in \mathcal{T}_n$, *ортогоналан је у односу на тежинску функцију* w *на интервалу* $[-\pi, \pi)$ *ако и само ако је* $\langle A_n, A_k\rangle_w = 0$ *за све* $k < n$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$.

На основу претходне дефиниције можемо закључити да је A_n ортогонални тригонометријски полином степена n уколико је ортогоналан на сваком елементу простора $\mathcal{T}_{n-1}$, тј. ако важи

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_n(x)A_k(x)w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leqslant k < n. \tag{17}$$

Како је димензија простора $\mathcal{T}_{n-1}$ једнака $2n-1$, а број непознатих коефицијената тригонометријског полинома A_n једнак $2n+1$, то се за јединственост тригонометријског полинома A_n морају поставити додатни услови које наводимо у следећој теореми.

Теорема 1.3. *Тригонометријски полином степена* n *облика*

$$A_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \cos kx + d_k \sin kx\right), \tag{18}$$

који је ортогоналан на свим тригонометријским полиномима простора $\mathcal{T}_{n-1}$, *на интервалу* $[-\pi, \pi)$, *у односу на тежинску функцију* w, *једнозначно је одређен уколико су унапред задате вредности водећих коефицијената* c_n *и* d_n.

Специјално, ако водећим коефицијентима доделимо вредности $c_n = 1$ и $d_n = 0$, односно $c_n = 0$ и $d_n = 1$, добијамо тригонометријске полиноме

$$A_n^C(x) = \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} \left(c_k^{(n)} \cos kx + d_k^{(n)} \sin kx\right) + c_0^{(n)}, \tag{19}$$

$$A_n^S(x) = \sin nx + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f_k^{(n)} \cos kx + g_k^{(n)} \sin kx\right) + f_0^{(n)}, \tag{20}$$

респективно.

За нуле тригонометријског полинома важи следећа теорема.

Теорема 1.4. *Тригонометријски полином* A_n *целобројног степена* n, *који је ортогоналан у односу на скаларни производ* (16), *има тачно* $2n$ *различитих простих нула у интервалу* $[-\pi, \pi)$.

Докази теорема 1.3 и 1.4 могу се наћи у раду [70].

Рекурентне релације. Као што смо у поглављу 1.1 видели, алгебарски ортогонални полиноми задовољавају трочлане рекурентне релације које играју битну улогу у њиховом конструисању. За разлику од алгебарских, ортогонални тригонометријски полиноми задовољавају петочлане рекурентне релације.

Уведимо најпре следеће ознаке, за $k,l\in\mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} I_k^C &= \left\langle A_k^C, A_k^C\right\rangle_w, & J_{k,l}^C &= \left\langle 2\cos x A_k^C, A_l^C\right\rangle_w, \\ I_k^S &= \left\langle A_k^S, A_k^S\right\rangle_w, & J_{k,l}^S &= \left\langle 2\cos x A_k^S, A_l^S\right\rangle_w, \\ I_k &= \left\langle A_k^C, A_k^S\right\rangle_w, & J_{k,l} &= \left\langle 2\cos x A_k^C, A_l^S\right\rangle_w. \end{aligned}$$

Наредна теорема даје везу између узастопних чланова система ортогоналних тригонометријских полинома целобројног степена (видети [69]).

Теорема 1.5. *Тригонометријски полиноми $A_k^C(x)$ и $A_k^S(x)$, $k\geqslant 1$, који су ортогонални у односу на скаларни производ* (16)*, задовољавају рекурентне релације*

$$A_k^C(x) = \left(2\cos x-\alpha_k^{(1)}\right)A_{k-1}^C(x)-\beta_k^{(1)}A_{k-1}^S(x)-\alpha_k^{(2)}A_{k-2}^C(x)-\beta_k^{(2)}A_{k-2}^S(x), \tag{21}$$

$$A_k^S(x) = \left(2\cos x-\delta_k^{(1)}\right)A_{k-1}^S(x)-\gamma_k^{(1)}A_{k-1}^C(x)-\delta_k^{(2)}A_{k-2}^S(x)-\gamma_k^{(2)}A_{k-2}^C(x), \tag{22}$$

чији коефицијенти $\alpha_k^{(j)}$, $\beta_k^{(j)}$, $\gamma_k^{(j)}$, $\delta_k^{(j)}$, $k\geqslant 1$, $j=1,2$, представљају решења система линеарних једначина

$$\begin{aligned} J_{k-1,k-j}^C &= \alpha_k^{(j)}I_{k-j}^C+\beta_k^{(j)}I_{k-j}, & J_{k-1,k-j} &= \alpha_k^{(j)}I_{k-j}+\beta_k^{(j)}I_{k-j}^S, \\ J_{k-j,k-1} &= \gamma_k^{(j)}I_{k-j}^C+\delta_k^{(j)}I_{k-j}, & J_{k-1,k-j}^S &= \gamma_k^{(j)}I_{k-j}+\delta_k^{(j)}I_{k-j}^S, \end{aligned}$$

при чему важи $\alpha_1^{(2)}=\beta_1^{(2)}=\gamma_1^{(2)}=\delta_1^{(2)}=0$.

Доказ. Полиноми $A_i^C(x)$ и $A_i^S(x)$, $i=0,1,\ldots,k$, су линеарно независни, па се израз $2\cos xA_{k-1}^C(x)$ може представити у облику

$$2\cos x A_{k-1}^C(x) = A_k^C(x)+\sum_{i=0}^{k-1}\left(\alpha_k^{(k-i)}A_i^C(x)+\beta_k^{(k-i)}A_i^S(x)\right). \tag{23}$$

Користећи услове ортогоналности, множењем обе стране претходне једнакости са $w(x)A_i^C(x)$ и $w(x)A_i^S(x)$, редом, а затим интеграљењем на $[-\pi,\pi)$ добијамо хомогене системе линеарних једначина

$$\alpha_k^{(k-i)}I_i^C+\beta_k^{(k-i)}I_i=0,\quad \alpha_k^{(k-i)}I_i+\beta_k^{(k-i)}I_i^S=0,$$

са непознатим коефицијентима $\alpha_k^{(k-i)},\beta_k^{(k-i)}$, $i=0,1,\ldots,k-3$. Потребно је показати да су њихове детерминанте

$$D_i=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(A_i^C(x)\right)^2w(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(A_i^S(x)\right)^2w(x)\mathrm{d}x\right)-\left(\int_{-\pi}^{\pi}A_i^C(x)A_i^S(x)w(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

различите од нуле, за свако $i=0,1,\ldots,k-3$. Ова особина директно следи из интегралне неједнакости Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ог (видети [46]):

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right),\quad f,g\in L^2[a,b],$$

при чему знак једнакости важи ако и само ако су f и g линеарно зависне функције.

Како је $D_i \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-3$, то претходни системи имају само тривијална решења $\alpha_k^{(k-i)} = \beta_k^{(k-i)} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k-3$, па се израз (23) своди на

$$2\cos x A_{k-1}^C(x) = A_k^C(x) + \alpha_k^{(1)} A_{k-1}^C(x) + \beta_k^{(1)} A_{k-1}^S(x) + \alpha_k^{(2)} A_{k-2}^C(x) + \beta_k^{(2)} A_{k-2}^S(x),$$

чиме смо показали да важи рекурентна релација (21).

Сада обе стране последње једнакости помножимо са $w(x)A_{k-j}^C(x)$ и $w(x)A_{k-j}^S(x)$, $j = 1, 2$, а потом интегралимо на $[-\pi, \pi)$. Тиме добијамо следеће системе линеарних једначина, за $j = 1, 2$:

$$J_{k-1,k-j}^C = \alpha_k^{(j)} I_{k-j}^C + \beta_k^{(j)} I_{k-j}, \quad J_{k-1,k-j} = \alpha_k^{(j)} I_{k-j} + \beta_k^{(j)} I_{k-j}^S$$

са непознатим коефицијентима $\alpha_k^{(j)}, \beta_k^{(j)}$. Јединственост решења ових система се показује на исти начин као код претходних.

Рекурентна релација (22) за $A_k^S(x)$ се аналогно може доказати. □

Парне тежине. Сада ћемо посматрати шта се дешава са претходним релацијама када је тежинска функција $w(x)$ парна на интервалу $(-\pi, \pi)$. Резултати које овде наводимо могу се наћи у [69].

Лема 1.2. *Ако је тежинска функција $w(x)$ парна на $(-\pi, \pi)$, онда за коефицијенте у рекурентним релацијама* (21) *и* (22) *важи $\beta_k^{(j)} = 0$, $\gamma_k^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$, односно у изразима* (19) *и* (20) *је $d_k^{(n)} = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, и $f_k^{(n)} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Доказ. Кренимо од базе простора $\mathcal{T}_n$: $\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$. Примењујући на њу Gram-Schmidt-ов поступак ортогонализације у односу на скаларни производ (16) и користећи једнакост

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin jx \, w(x) \mathrm{d}x = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N},$$

закључујемо да се добијени систем ортогоналних функција може раздвојити на два низа: f_k, $k \in \mathbb{N}_0$, које зависе само од косинусних функција, и g_j, $j \in \mathbb{N}$, које зависе само од синусних функција. Због јединствености ортогоналних система, долазимо до закључка да добијене функције заправо представљају полиноме A_k^C, $k \in \mathbb{N}_0$ и A_j^S, $j \in \mathbb{N}$. Одавде директно следе једнакости $d_k^{(i)} = 0$, $k = 1, \ldots, i-1$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, односно $f_j^{(i)} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, i-1$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, што доводи до свођења петочланих релација (21) и (22) на трочлане рекурентне релације. □

Претходна лема нам даје следеће облике полинома A_n^C и A_n^S, у случају парне тежинске функције на $(-\pi, \pi)$:

$$A_n^C(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} \cos kx, \quad c_n^{(n)} = 1, \tag{24}$$

$$A_n^S(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k^{(n)} \sin kx, \quad g_n^{(n)} = 1. \tag{25}$$

Ови полиноми задовољавају трочлане рекурентне релације

$$A_n^C(x) = \left(2\cos x - \alpha_n^{(1)}\right) A_{n-1}^C(x) - \alpha_n^{(2)} A_{n-2}^C(x),$$
$$A_n^S(x) = \left(2\cos x - \delta_n^{(1)}\right) A_{n-1}^S(x) - \delta_n^{(2)} A_{n-2}^S(x),$$

при чему су коефицијенти $\alpha_n^{(j)}$, $\delta_n^{(j)}$, $n \geqslant 1$, $j = 1, 2$, решења једначина

$$J_{n-1,n-j}^C = \alpha_n^{(j)} I_{n-j}^C, \quad J_{n-1,n-j}^S = \delta_n^{(j)} I_{n-j}^S$$

и $\alpha_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0$.

1.2.2 Ортогонални тригонометријски полиноми полу-целобројног степена

У овом одељку дајемо преглед особина ортогоналних тригонометријских полинома полу-целобројног степена. Већина њих је доказана у радовима [42], [72] и [13]. На почетку је ортогоналност ових тригонометријских полинома посматрана на интервалу $[0, 2\pi)$, а потом је у раду [42] показано да се ортогонални тригонометријски полиноми полу-целобројног степена могу посматрати на било ком интервалу дужине 2π, тј. интервалу облика $[L, L + 2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$. Како смо наше истраживање спроводили на интервалу $[-\pi, \pi)$, то ћемо и постојеће резултате овде наводити на истом интервалу. Слично тригонометријским полиномима целобројног степена, сваки тригонометријски полином полу-целобројног степена се може представити у облику

$$A_{n+1/2}(x) = A \prod_{k=0}^{2n} \sin\frac{x - \tau_k}{2}, \quad A \neq 0, \tag{26}$$

где су са $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{2n}$ означене нуле тригонометријске функције (14), које леже у траци $-\pi \leqslant \operatorname{Re}\tau < \pi$ (видети [72]).

У следећој леми наводимо везу тригонометријског полинома полу-целобројног степена $A_{n+1/2}$ са алгебарским полиномом степена $2n + 1$ (видети [42]).

Лема 1.3. *Нека је*

$$A_{n+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(c_k \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x + d_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) x \right) \tag{27}$$

тригонометријски полином полу-целобројног степена $n+1/2$ *и нека је* $a_k = c_k - \mathrm{i} d_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. *Тада се* $A_{n+1/2}(x)$ *може представити у следећем облику*

$$A_{n+1/2}(x) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x} Q_{2n+1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right),$$

где је $Q_{2n+1}(z)$ *алгебарски полином степена* $2n + 1$ *облика*

$$Q_{2n+1}(z) = \overline{a}_n + \overline{a}_{n-1} z + \cdots + \overline{a}_1 z^{n-1} + \overline{a}_0 z^n + a_0 z^{n+1} + \cdots + a_{n-1} z^{2n} + a_n z^{2n+1}.$$

Да бисмо дефинисали ортогонални систем тригонометријских полинома полу-целобројног степена, неопходно је да уведемо скаларни производ у односу на који ћемо посматрати ортогоналност.

Претпоставимо да је w тежинска функција, која је интеграбилна и ненегативна на интервалу $[-\pi, \pi)$ и таква да има вредност нула само на скупу мере нула. Уведимо скаларни производ за посматрану тежинску функцију w на следећи начин:

$$\langle f, g \rangle_w = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{T}^{1/2}. \tag{28}$$

Дефиниција 1.3. *Низ полинома* $\{A_{k+1/2}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $A_{k+1/2} \in \mathcal{T}_k^{1/2}$, *представља систем ортогоналних тригонометријских полинома полу-целобројног степена, са ортогоналношћу у односу на скаларни производ* (28), *ако и само ако је* $\langle A_{k+1/2}, A_{j+1/2} \rangle_w = 0$ *за све* $0 \leqslant j < k$, $k \in \mathbb{N}$.

На основу дефиниције видимо да је $A_{n+1/2}$ ортогонални тригонометријски полином полу-целобројног степена $n + 1/2$ ако је ортогоналан на свим полиномима простора $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ у односу на тежинску функцију w на $[-\pi, \pi)$, односно ако важи

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_{n+1/2}(x)t(x)w(x)\mathrm{d}x = 0, \quad t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}.$$

Како је димензија простора $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ једнака $2n$, а број непознатих коефицијената тригонометријског полинома $A_{n+1/2}$ једнак $2n+2$, то се два коефицијента могу произвољно изабрати. Као и у случају тригонометријских полинома целобројног степена, изабраћемо да то буду коефицијенти c_n и d_n, које ћемо на даље звати *водећим коефицијентима* тригонометријског полинома полу-целобројног степена $A_{n+1/2}$. Ово нас доводи до следеће теореме, чији се доказ може наћи у [72].

Теорема 1.6. *Тригонометријски полином полу-целобројног степена* $A_{n+1/2}$, *ортогоналан на свим тригонометријским полиномима простора* $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ *у односу на тежинску функцију* w *на интервалу* $[-\pi, \pi)$, *јединствено је одређен уколико су унапред задате вредности водећих коефицијената* c_n *и* d_n.

Избором вредности 1 и 0, односно 0 и 1, за водеће коефицијенте c_n и d_n, редом, добијамо тригонометријске полиноме полу-целобројног степена који ће нам бити од велике користи у даљем раду, па ћемо за њих увести одговарајуће ознаке $A_{n+1/2}^C$, односно $A_{n+1/2}^S$.

Теорема 1.7. *Тригонометријски полином полу-целобројног степена* $A_{n+1/2}$, *који је ортогоналан у односу на скаларни производ* (28), *има тачно* $2n+1$ *различиту просту нулу у интервалу* $[-\pi, \pi)$.

Доказ. Најпре, из услова ортогоналности

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_{n+1/2}(x) \sin\frac{x}{2}\, w(x)\mathrm{d}x = 0$$

можемо приметити да тригонометријски полином $A_{n+1/2}(x)$ на интервалу $[-\pi, \pi)$ мора имати бар једну нулу непарног степена јер, у супротном, интегранд не би мењао знак на посматраном интервалу.

Претпоставимо да полином $A_{n+1/2}$ има $2r-1$ нулу непарне вишеструкости у интервалу $[-\pi,\pi)$, где је $r \leqslant n$. Означимо их са $y_1,\dots,y_{2r-1}$ и уведимо функцију

$$t(x) = \prod_{k=1}^{2r-1} \sin\frac{x-y_k}{2}.$$

Очигледно је $t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$, па из услова ортогоналности следи

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_{n+1/2}(x)t(x)w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

што је немогуће јер интегранд на интервалу $[-\pi,\pi)$ не мења знак.

Претпоставимо сада да полином $A_{n+1/2}$ има $2r$ нула непарне вишеструкости у интервалу $[-\pi,\pi)$, за $r \leqslant n-1$, и означимо их са $y_1,\dots,y_{2r}$. Ако уведемо функцију $t(x)$ са

$$t(x) = \sin\frac{x}{2}\prod_{k=1}^{2r} \sin\frac{x-y_k}{2} \qquad \left(t \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}\right),$$

користећи исте аргументе као у претходном случају долазимо до контрадикције.

Остаје још да проверимо да ли је $2n$ могући број нула непарне вишеструкости полинома $A_{n+1/2}$, на интервалу $[-\pi,\pi)$. Нека су $y_1,\dots,y_{2n}$ те нуле, поређане у растућем поретку. Уколико би било $y_1=0$, функција

$$t(x) = \prod_{k=2}^{2n} \sin\frac{x-y_k}{2}$$

би припадала простору $\mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$, па би се разматрање свело на први случај. Међутим, ни случај $y_1 \neq 0$ није могућ. Ако полином $A_{n+1/2}$ посматрамо у облику (27), имамо следеће

$$\begin{aligned} A_{n+1/2}(x+2\pi) &= \sum_{k=0}^{n}\left(c_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)(x+2\pi) + d_k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(x+2\pi)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(-c_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x - d_k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right). \end{aligned}$$

Дакле, важи једнакост $A_{n+1/2}(x+2\pi) = -A_{n+1/2}(x)$, одакле за $x=-\pi$ добијамо $A_{n+1/2}(\pi) = -A_{n+1/2}(-\pi)$, што значи да полином $A_{n+1/2}$ мора имати непаран број промена знака на интервалу $[-\pi,\pi)$. □

Лема 1.4. *Ако је* $\left\{A_{n+1/2}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *низ тригонометријских полинома полу-целобројног степена ортогоналних у односу на тежинску функцију* w *на интервалу* $[-\pi,\pi)$, *тада је* $\left\{\widetilde{A}_{n+1/2}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, *за* $\widetilde{A}_{n+1/2}(x) = A_{n+1/2}(x-L-\pi)$, $n\in\mathbb{N}_0$, $L\in\mathbb{R}$, *низ тригонометријских полинома полу-целобројног степена ортогоналних на интервалу* $[L, L+2\pi)$, *у односу на тежинску функцију* $\widetilde{w}(x) = w(x-L-\pi)$, $x\in[L,L+2\pi)$.

Рекурентне релације. У одељку 1.2.1 смо показали да ортогонални тригонометријски полиноми целобројног степена задовољавају петочлане рекурентне релације. Исту особину имају и ортогонални тригонометријски полиноми полу-целобројног степена, па ћемо за почетак увести исте ознаке за одређене скаларне производе као у одељку 1.2.1. Како ћемо их користити само у оквиру овог одељка, неће бити забуне на које полиноме се односе.

Дакле, за $k, l \in \mathbb{N}_0$ имамо

$$\begin{aligned} I_k^C &= \left\langle A_{k+1/2}^C, A_{k+1/2}^C \right\rangle_w, & J_{k,l}^C &= \left\langle 2\cos x A_{k+1/2}^C, A_{l+1/2}^C \right\rangle_w, \\ I_k^S &= \left\langle A_{k+1/2}^S, A_{k+1/2}^S \right\rangle_w, & J_{k,l}^S &= \left\langle 2\cos x A_{k+1/2}^S, A_{l+1/2}^S \right\rangle_w, \\ I_k &= \left\langle A_{k+1/2}^C, A_{k+1/2}^S \right\rangle_w, & J_{k,l} &= \left\langle 2\cos x A_{k+1/2}^C, A_{l+1/2}^S \right\rangle_w. \end{aligned}$$

Доказ следеће теореме се спроводи потпуно аналогно доказу теореме 1.5, па га овде нећемо наводити (може се наћи у [42], [13], [41]).

Теорема 1.8. *Тригонометријски полиноми полу-целобројног степена* $A_{k+1/2}^C(x)$ *и* $A_{k+1/2}^S(x)$, $k \geqslant 1$, *који су ортогонални у односу на скаларни производ* (28), *задовољавају рекурентне релације*

$$A_{k+1/2}^C(x) = \left(2\cos x - \alpha_k^{(1)}\right) A_{k-1/2}^C(x) - \beta_k^{(1)} A_{k-1/2}^S(x) - \alpha_k^{(2)} A_{k-3/2}^C(x) - \beta_k^{(2)} A_{k-3/2}^S(x), \tag{29}$$

$$A_{k+1/2}^S(x) = \left(2\cos x - \delta_k^{(1)}\right) A_{k-1/2}^S(x) - \gamma_k^{(1)} A_{k-1/2}^C(x) - \delta_k^{(2)} A_{k-3/2}^S(x) - \gamma_k^{(2)} A_{k-3/2}^C(x), \tag{30}$$

чији коефицијенти $\alpha_k^{(j)}$, $\beta_k^{(j)}$, $\gamma_k^{(j)}$, $\delta_k^{(j)}$, $k \geqslant 1$, $j = 1, 2$, *представљају решења система линеарних једначина*

$$\begin{aligned} J_{k-1,k-j}^C &= \alpha_k^{(j)} I_{k-j}^C + \beta_k^{(j)} I_{k-j}, & J_{k-1,k-j} &= \alpha_k^{(j)} I_{k-j} + \beta_k^{(j)} I_{k-j}^S, \\ J_{k-j,k-1} &= \gamma_k^{(j)} I_{k-j}^C + \delta_k^{(j)} I_{k-j}, & J_{k-1,k-j}^S &= \gamma_k^{(j)} I_{k-j} + \delta_k^{(j)} I_{k-j}^S, \end{aligned}$$

при чему важи $\alpha_1^{(2)} = \beta_1^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} = 0$.

Следећа лема даје везу између скаларних производа чије смо ознаке увели на почетку овог одељка (видети [42]).

Лема 1.5. *За* $n \geqslant 1$ *важе следеће једнакости*

$$J_{n,n-1}^C = I_n^C, \quad J_{n,n-1}^S = I_n^S, \quad J_{n,n-1} = I_n.$$

Доказ. Користећи рекурентне релације (29) и (30), из услова ортогоналности добијамо

$$I_n^C = \left\langle A_{n+1/2}^C, A_{n+1/2}^C \right\rangle_w = \left\langle 2\cos x A_{n-1+1/2}^C, A_{n+1/2}^C \right\rangle_w = J_{n,n-1}^C.$$

Остале две једнакости се слично доказују. □

Дакле, за израчунавање коефицијената у рекурентним релацијама (29) и (30) потребни су нам интеграли I_n^C, I_n^S, I_n, $J_{n,n}^C$, $J_{n,n}^S$ и $J_{n,n}$, па ради краћег записа уводимо следеће ознаке:

$$J_n^C = J_{n,n}^C, \quad J_n^S = J_{n,n}^S, \quad J_n = J_{n,n}.$$

Сада, директно из теореме 1.8 и леме 1.5 изводимо следећу последицу (видети [42]).

Последица 1. *Коефицијенти у рекурентним релацијама (29) и (30) могу се рачунати по следећим формулама*

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{I_{k-1}^S J_{k-1}^C - I_{k-1}J_{k-1}}{D_{k-1}}, \quad \alpha_k^{(2)} = \frac{I_{k-1}^C I_{k-2}^S - I_{k-1}I_{k-2}}{D_{k-2}},$$
$$\beta_k^{(1)} = \frac{I_{k-1}^C J_{k-1} - I_{k-1}J_{k-1}^C}{D_{k-1}}, \quad \beta_k^{(2)} = \frac{I_{k-1}I_{k-2}^C - I_{k-1}^C I_{k-2}}{D_{k-2}},$$
$$\gamma_k^{(1)} = \frac{I_{k-1}^S J_{k-1} - I_{k-1}J_{k-1}^S}{D_{k-1}}, \quad \gamma_k^{(2)} = \frac{I_{k-1}I_{k-2}^S - I_{k-1}^S I_{k-2}}{D_{k-2}},$$
$$\delta_k^{(1)} = \frac{I_{k-1}^C J_{k-1}^S - I_{k-1}J_{k-1}}{D_{k-1}}, \quad \delta_k^{(2)} = \frac{I_{k-1}^S I_{k-2}^C - I_{k-1}I_{k-2}}{D_{k-2}},$$

при чему је

$$D_{k-j} = I_{k-j}^C I_{k-j}^S - I_{k-j}^2, \quad j = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Парне тежинске функције. Посебно ћемо издвојити случај када је тежинска функција симетрична на интервалу $[-\pi, \pi)$, односно када је $w(x) = w(-x)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Резултати које овде наводимо могу се наћи у раду [42].

Лема 1.6. *Ако је тежинска функција $w(x)$ парна на интервалу $[-\pi, \pi)$, онда за коефицијенте у рекурентним релацијама (29) и (30) важе једнакости $\beta_k^{(j)} = 0$, $\gamma_k^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$. Такође, полиноми $A_{k+1/2}^C(x)$ и $A_{k+1/2}^S(x)$ су чисто косинусни, односно чисто синусни тригонометријски полиноми.*

Доказ. Доказ се спроводи аналогно доказу леме 1.2 (видети [42]). □

На основу претходне леме видимо да се у случају симетричне тежинске функције рекурентне релације (29) и (30) своде на трочлане рекурентне релације

$$A_{k+1/2}^C(x) = \left(2\cos x - \alpha_k^{(1)}\right) A_{k-1/2}^C(x) - \alpha_k^{(2)} A_{k-3/2}^C(x), \tag{31}$$

$$A_{k+1/2}^S(x) = \left(2\cos x - \delta_k^{(1)}\right) A_{k-1/2}^S(x) - \delta_k^{(2)} A_{k-3/2}^S(x), \tag{32}$$

а тригонометријски полиноми $A_{n+1/2}^C$ и $A_{n+1/2}^S$ добијају облике

$$A_{n+1/2}^C(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x, \quad c_n^{(n)} = 1, \tag{33}$$

$$A_{n+1/2}^S(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x, \quad g_n^{(n)} = 1. \tag{34}$$

Из последњих формула непосредно следи наредни резултат.

Лема 1.7. *За свако $k \in \mathbb{N}_0$ важи*

$$A_{k+1/2}^C(\pi) = 0, \quad A_{k+1/2}^S(0) = 0.$$

2 Квадратурне формуле

У уводном делу рада увели смо појам квадратурне формуле, као и њених параметара - чворова и тежинских коефицијената. У овој глави ћемо дати преглед основних резултата везаних за квадратурне формуле Gauss-овог типа. Глава је подељена у два дела - први посвећен особинама и начину формирања квадратурних формула за алгебарске полиноме, а други квадратурама на простору тригонометријских полинома.

2.1 Gauss-ове квадратурне формуле за алгебарске полиноме

Као што је на почетку речено, са $\mathcal{P}$ обележавамо скуп свих алгебарских полинома, док је $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}_0$, ознака резервисана за скуп свих алгебарских полинома степена не вишег од n.

Нека је тежинска функција u ненегативна и интеграбилна на интервалу $[a, b)$ и таква да узима вредност нула само на скупу мере нула. Одговарајућа квадратурна формула са n чворова је облика

$$\int_a^b f(x)u(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k) + R_n f. \tag{35}$$

Дефиниција 2.1. *За квадратурну формулу* (35) *кажемо да има алгебарски степен тачности d ако за све $p \in \mathcal{P}_d$ важи $R_n p = 0$ и ако постоји полином $q \in \mathcal{P}_{d+1}$ такав да је $R_n q \neq 0$.*

Постоје два приступа у конструисању ових формула. У првом случају се подразумева да су чворови унапред задати, док се тежински коефицијенти одређују из услова постизања максималног степена тачности. Уколико се у овом поступку користе интерполациони полиноми, за одговарајућу квадратурну формулу кажемо да је интерполационог типа. Максимални могући степен тачности квадратурне формуле са n чворова је $2n-1$, па се за други начин њихове конструкције при одређивању тежинских коефицијената и чворова (који овог пута нису фиксирани унапред) то поставља као услов. Формула која постиже ову тачност се назива Gauss-*овом или* Gauss-Christoffel-*овом квадратурном формулом.*

Претпоставимо да су чворови x_k, $k = 1, \ldots, n$, унапред фиксиране тачке интервала $[a, b]$. Тежинске коефицијенте ω_k, $k = 1, \ldots, n$, одредићемо из услова постизања максималног алгебарског степена тачности квадратурне формуле. Над датим скупом чворова $\{x_k \mid k = 1, \ldots, n\}$ можемо формирати Lagrange-ов интерполациони полином

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ell_k(x), \tag{36}$$

где је

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ако једнакост (36) помножимо са $u(x)$ са обе стране и интегралимо на интервалу $[a, b]$, добијамо формулу за израчунавање тежинских коефицијената

$$\omega_k = \int_a^b \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\, u(x)\mathrm{d}x, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{37}$$

Квадратурна формула добијена овим поступком је интерполационог типа и има алгебарски степен тачности $d = n - 1$. Основне интерполационе квадратурне формуле називају се NEWTON-COTES-ове и имају особину да су им чворови изабрани еквидистантно.

У циљу повећања тачности квадратурних формула, прва идеја која се намеће је да се чворови не фиксирају унапред. Важну улогу у оваквом приступу проблему формирања квадратура играју ортогонални полиноми, чије смо особине навели у поглављу 1.1. Наведимо најпре теорему чији је доказ дао JACOBI 1826. године (видети [23], [22], [33]).

ТЕОРЕМА 2.1. *За дати природан број $m \leqslant n$ квадратурна формула облика* (35) *има алгебарски степен тачности $d = m + n - 1$ ако и само ако су испуњени услови:*

(*i*) *формула* (35) *је интерполационог типа;*

(*ii*) *полином $q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$ задовољава једнакост*

$$\langle q_n, p\rangle_u = \int_a^b q_n(x)p(x)u(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{за све } p \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

Из теореме видимо да је оптимална вредност $m = n$, када квадратурна формула постиже максимални алгебарски степен тачности $2n - 1$. Вредности $m > n$ нису могуће. Рецимо, у случају $m = n + 1$ би због другог услова теореме полином q_n био ортогоналан на самом себи, што је немогуће.

Прве идеје оваквог начина конструисања квадратурних формула, где се из услова максималне могуће тачности одређују чворови и тежински коефицијенти, вуку корене још из XVII века. Ослањајући се на радове NEWTON-а и COTES-а, као и на свој рад о хипергеометријским развојима, GAUSS је развио овај чувени метод нумеричке интеграције. Године 1826. те резултате је по форми појелноставио JACOBI.

Из услова ортогоналности (*ii*) теореме 2.1, у оптималном случају $m = n$, следи да полином q_n мора бити монични полином p_n, ортогоналан у односу на тежинску функцију u. Одатле закључујемо да су чворови GAUSS-ове квадратурне формуле заправо нуле моничног ортогоналног полинома у односу на наведену тежинску функцију. Тежински коефицијенти ω_k се сада могу представити у облику (видети [21], [33])

$$\omega_k = \left(\sum_{i=1}^{n-1} P_i\,(x_k)^2\right)^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где је $P_i(x)$ ортонормирани полином у односу на посматрану тежинску функцију $u(x)$. Дакле, сви тежински коефицијенти су позитивни.

Постоји више метода за нумеричку конструкцију Gauss-ових квадратурних формула. Најпознатији је метод Golub-а и Welsch-а [24], који се базира на примени QR алгоритма за одређивање сопствених вредности симетричне тродијагоналне Jacobi-јеве матрице и првих компоненти њених сопствених вектора. Следећом теоремом дата је веза између параметара квадратурне формуле и сопствених вредности и сопствених вектора поменуте Jacobi-јеве матрице.

Теорема 2.2. *Чворови x_k, $k = 1, \ldots, n$, у* Gauss*-овој квадратурној формули* (35) *су сопствене вредности* Jacobi*-јеве матрице*

$$J_n = \begin{bmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & & \\ & \sqrt{b_2} & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{b_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{38}$$

где су a_k и b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, коефицијенти трочлане рекурентне релације (10)*, коју задовољавају монични ортогонални полиноми p_k. Тежински коефицијенти ω_k дати су са*

$$\omega_k = b_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, \ldots, n,$$

при чему је $b_0 = \mu_0$, док $v_{k,1}$ представља прву компоненту нормализованог сопственог вектора $\mathbf{v}_k$ који одговара сопственој вредности x_k, односно

$$J_n \mathbf{v}_k = x_k \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = 1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следећи резултат, који важи за остатак $R_n f$ Gauss-ове квадратурне формуле, може се наћи у [34], [23], [33].

Теорема 2.3. *Нека је $f \in \mathbb{C}^{2n}[a, b]$. Тада постоји $\xi \in (a, b)$ тако да важи*

$$R_n f = \frac{\|p_n^2\|}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

где је p_n монични полином ортогоналан у односу на тежинску функцију w.

2.2 Gauss-ове квадратурне формуле за тригонометријске полиноме

Једно од уопштења квадратурних формула разматраних у претходном поглављу представљају управо квадратуре са максималним тригонометријским степеном тачности. Квадратурне формуле Gauss-овог типа конструисане на простору тригонометријских полинома су веома важне због своје широке примене. Неки од радова у којима су оне изучаване су [10], [11], [29], [40], [41], [42], [47], [48], [49], [51], [72].

Претпоставимо да је $w(x)$ ненегативна и интеграбилна тежинска функција на интервалу $[-\pi, \pi)$, која узима вредност нула само на скупу мере нула. Слично алгебарском степену тачности уводи се појам тригонометријског степена тачности квадратурне формуле.

Дефиниција 2.2. *Нека је $-\pi \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \pi$. Квадратурна формула*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)w(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k f(\tau_k) + \widehat{R}_n f, \tag{39}$$

има тригонометријски степен тачности d ако важи $\widehat{R}_n t = 0$, за све тригонометријске полиноме $t \in \mathcal{T}_d$, и ако постоји полином $g \in \mathcal{T}_{d+1}$ такав да је $\widehat{R}_n g \neq 0$.

Поменута квадратурна формула може се посматрати на било ком интервалу облика $[L, L+2\pi)$, $L \in \mathbb{R}$, што је показано у раду [42]. У раду [72] Turetzkii је посматрао квадратурне формуле на интервалу $[0, 2\pi)$.

За разлику од алгебарског степена тачности, максималан тригонометријски степен тачности квадратурних формула са $n+1$ чвором је n. Квадратурне формуле које постижу ову тачност називају се квадратурама Gauss-*овог типа за тригонометријске полиноме.* Како је димензија простора $\mathcal{T}_n$ једнака $2n+1$, то из услова максималне тригонометријске тачности квадратурне формуле (39) добијамо систем од $2n+1$ једначине са $2n+2$ непознате вредности $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Из тог разлога јавила се потреба за анализирањем особина тригонометријског полинома чије су нуле управо наведени чворови. Наставак разматрања раздвајамо на квадратурне формуле са парним и квадатурне формуле са непарним бројем чворова.

2.2.1 Квадратурне формуле са парним бројем чворова

Квадратурне формуле са парним бројем чворова имају непаран максимални степен тачности. За њихову конструкцију ће бити коришћени ортогонални тригонометријски полиноми целобројног степена чије смо особине навели у одељку 1.2.1.

Квадратурна формула (39) је у овом случају облика

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)w(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2n-1} \sigma_k f(\tau_k) + \widehat{R}_n f, \tag{40}$$

где је $-\pi \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{2n-1} < \pi$.

Конструкција квадратурних формула облика (40) са максималним тригонометријским степеном тачности се заснива на поступку који је користио Turetzkii у раду [72]. Дакле, неопходан нам је тригонометријски интерполациони полином у Lagrange-овом облику (видети [15]), па на почетку наводимо теорему о његовој егзистенцији и јединствености (за доказ видети [10, Theorem 3.3]).

Теорема 2.4. *Нека су $\tau_k \in [-\pi, \pi)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, дати чворови и нека су y_j, $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, реални бројеви. Посматрајмо интерполациони проблем*

$$\widehat{L}_n(\tau_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{41}$$

Важе следећа тврђења:

(i) *ако је $\sum_{k=0}^{2n-1} \tau_k \neq l\pi$, за свако $l \in \mathbb{Z}$, онда проблем (41) има јединствено решење у простору $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\cos nx\}$ и $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\sin nx\}$;*

(*ii*) *ако је* $\sum_{k=0}^{2n-1} \tau_k = l\pi$, *где је* l *непаран цео број, тада је решење проблема* (41) *јединствено и припада простору* $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\cos nx\}$;

(*iii*) *ако је* $\sum_{k=0}^{2n-1} \tau_k = l\pi$, *где је* l *паран цео број, тада је решење проблема* (41) *јединствено и припада простору* $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\sin nx\}$.

Поменути интерполациони полином Lagrange-овог типа може се записати у облику (видети [10]):

$$\widehat{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f(\tau_k) s_k(x), \tag{42}$$

где је

$$s_k(x) = \frac{1}{2A_n'(\tau_k)\sin\eta_n} \sin\left(\frac{x+\nu_k}{2}\right) \frac{A_n(x)}{\sin\left(\frac{x-\tau_k}{2}\right)},$$

за простор $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\sin nx\}$, односно

$$s_k(x) = \frac{1}{2A_n'(\tau_k)\cos\eta_n} \cos\left(\frac{x+\nu_k}{2}\right) \frac{A_n(x)}{\sin\left(\frac{x-\tau_k}{2}\right)},$$

за простор $\mathcal{T}_n \backslash \mathcal{L}\{\cos nx\}$. Величине η_n и ν_k су дате следећим изразима

$$\eta_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \tau_k, \quad \nu_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{2n-1} \tau_i.$$

Полином $A_n(x)$ је облика

$$A_n(x) = A \prod_{k=0}^{2n-1} \sin\frac{x-\tau_k}{2}, \quad A \neq 0.$$

Множењем обе стране једнакости (42) са $w(x)$ и интеграљењем на $[-\pi,\pi)$ добијамо формулу за одређивање вредности тежинских коефицијената квадратурне формуле (40):

$$\sigma_k = \int_{-\pi}^{\pi} s_k(x) w(x) \mathrm{d}x, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{43}$$

Слично алгебарском случају, тригонометријски степен тачности квадратурне формуле (40) се може повећати уколико чворови нису унапред задати. У том случају се може конструисати Gauss-ова квадратурна формула која је тачна за све полиноме простора $\mathcal{T}_{2n-1}$. Главна особина ових квадратурних формула, која игра битну улогу у њиховом конструисању, наведена је у следећој теореми (видети [69], [70]).

Теорема 2.5. *Квадратурна формула облика* (40), *чији су тежински коефицијенти дати са* (43), *је* Gauss-*ова квадратурна формула ако и само ако су чворови нуле тригонометријског полинома* $A_n(x)$, *ортогоналног у односу на тежинску функцију* $w(x)$ *на интервалу* $[-\pi,\pi)$.

У наставку посматрајмо тежинску функцију $w(x)$ која је парна на интервалу $(-\pi, \pi)$. GAUSS-ове квадратурне формуле са парним бројем чворова се могу добити из одговарајућих GAUSS-ових квадратура за алгебарске полиноме, о чему ће бити речи у наставку. За почетак, наводимо један помоћни резултат.

ЛЕМА 2.1. *Нека је $w(x)$ парна тежинска функција на $(-\pi, \pi)$. За свако $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $n \in \mathbb{N}$, важи:*

$$\int_{-1}^{1} C_n(x) C_k(x) \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 0, \qquad \text{за } C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x)$$

и

$$\int_{-1}^{1} S_n(x) S_k(x) \sqrt{1-x^2}\, w(\arccos x) \mathrm{d}x = 0, \qquad \text{за } S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k U_k(x),$$

где су T_k и U_k, $k \in \mathbb{N}_0$, CHEBYSHEV-љеви полиноми прве и друге врсте, редом. Полиноми C_n и S_n, $n \in \mathbb{N}$, задовољавају трочлане рекурентне релације

$$C_n(x) = (2x - \alpha_n^{(1)}) C_{n-1}(x) - \alpha_n^{(2)} C_{n-2}(x), \quad \alpha_1^{(2)} = 0, \quad C_0 = 1, \tag{44}$$

$$S_n(x) = (2x - \delta_n^{(1)}) S_{n-1}(x) - \delta_n^{(2)} S_{n-2}(x), \quad \delta_1^{(2)} = 0, \quad S_0 = 1. \tag{45}$$

Доказ. Из услова ортогоналности тригонометријског полинома $A_n^C(x)$, у односу на парну тежинску функцију $w(x)$, имамо

$$\int_{0}^{\pi} A_n^C(x) A_k^C(x) w(x) \mathrm{d}x = 0, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad k < n.$$

Уводећи смену $x = \arccos t$, добијамо

$$\int_{-1}^{1} A_n^C(\arccos t) A_k^C(\arccos t) \frac{w(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = 0. \tag{46}$$

Како је $T_k(t) = \cos(k \arccos t)$, следи да је

$$A_n^C(\arccos t) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(t).$$

Уводећи ознаку $C_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(t)$, из последње једнакости и израза (46) добијамо прво тврђење.

Други део тврђења се доказује аналогно, користећи услов ортогоналности за полином $A_n^S(x)$ и једнакост $\sin(k \arccos x) = \sqrt{1-x^2}\, U_n(x)$.

Уводећи смену $x = \arccos t$ у рекурентним релацијама (21) и (22), које задовољавају ортогонални тригонометријски полиноми A_n^C и A_n^S, редом, добијамо трочлане рекурентне релације (44) и (45). □

Из претходног доказа видимо да је

$$A_n^C(\arccos x) = C_n(x), \tag{47}$$

при чему је $C_n(x)$ алгебарски полином који задовољава рекурентну релацију (44). Коришћењем наведених веза између тригонометријских и алгебарских ортогоналних полинома, долазимо до једноставних начина конструисања GAUSS-ових квадратурних формула облика (40). Представићемо их кроз наредне две леме (видети [68]).

Лема 2.2. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi,\pi)$ и нека су x_k и ω_k, $k=1,\ldots,n$, чворови и тежински коефицијенти* Gauss-*ове квадратурне формуле са n чворова, конструисане за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију*

$$u_1(x)=\frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1). \tag{48}$$

Тада за квадратурну формулу Gauss-*овог типа* (40), *конструисану на простору тригонометријских полинома у односу на тежинску функцију w на интервалу $(-\pi,\pi)$, за $k=0,1,\ldots,n-1$, важи:*

$$\sigma_{2n-1-k}=\sigma_k=\omega_{k+1},\quad \tau_{2n-1-k}=-\tau_k=\arccos x_{k+1}. \tag{49}$$

Доказ. Користећи везу (47) добијамо да су нуле полинома A_n^C (а тиме и чворови квадратурне формуле (40)) дате са $\tau_{2n-1-k}=-\tau_k=\arccos x_{k+1}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. За доказивање везе између одговарајућих тежинских коефицијената користићемо Shohat-ову формулу (видети [59], [37])

$$\omega_k=\frac{\mu_0}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\frac{C_n(x_k)}{\prod_{j=2}^{i}\alpha_{j,0}^{(2)}}\right)^2},\quad k=1,\ldots,n,$$

где је

$$\mu_0=\int_{-1}^{1}\frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Сада применом једнакости (47) имамо

$$\omega_k=\frac{\mu_0}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\frac{A_n^C(\tau_{2n-k})}{\prod_{j=2}^{i}\alpha_{j,0}^{(2)}}\right)^2},\quad k=1,\ldots,n.$$

С друге стране, како је тежинска функција $w(x)$, $x\in(-\pi,\pi)$, парна, то су коефицијенти σ_k дати са

$$\sigma_{2n-1-k}=\frac{\widehat{\mu}_0}{2\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\frac{A_n^C(\tau_{2n-1-k})}{\prod_{j=2}^{i}\alpha_{j,0}^{(2)}}\right)^2},\quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

при чему важи

$$\widehat{\mu}_0=\int_{-\pi}^{\pi}w(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}w(x)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}\frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=2\mu_0.$$

Упоређивањем формула за тежинске коефицијенте закључујемо да је $\sigma_{2n-1-k}=\omega_{k+1}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Коначно, из симетричности квадратурне формуле следи да је $\sigma_k=\sigma_{2n-1-k}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. □

Користећи сличне аргументе у доказу, изведен је и следећи резултат.

Лема 2.3. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi, \pi)$ и нека су x_k, ω_k, $k = 1, \ldots, n$, чворови и тежински коефицијенти у* Gauss-*овој квадратури са n чворова, конструисаној за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију*

$$u_2(x) = w(\arccos x)\sqrt{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1). \tag{50}$$

Тада за квадратурну формулу Gauss-*овог типа* (40)*, конструисану на простору тригонометријских полинома у односу на тежинску функцију w на интервалу $(-\pi, \pi)$, за $k = 0, 1, \ldots, n-1$, важи:*

$$\sigma_{2n-1-k} = \sigma_k = \frac{\omega_{k+1}}{1 - x_{k+1}^2}, \quad \tau_{2n-1-k} = -\tau_k = \arccos x_{k+1}.$$

Као и за параметре у квадратурним формулама, постоји веза између остатака у квадратурама конструисаним на простору тригонометријских полинома и одговарајућих остатака у квадратурама конструисаним за алгебарске полиноме (видети [68]). Тај однос ћемо навести у лемама 2.4 и 2.5, у којима користимо следеће ознаке:

$$f_1(x) = f(-\arccos x) + f(\arccos x), \tag{51}$$

$$f_2(x) = \frac{f(-\arccos x) + f(\arccos x)}{1 - x^2}, \tag{52}$$

где је f дата функција.

Лема 2.4. *Остатак $\widehat{R}_n f$ квадратурне формуле* Gauss-*овог типа* (40)*, конструисане на простору тригонометријских полинома у односу на парну тежинску функцију w на $(-\pi, \pi)$, једнак је остатку $R_n(u_1, f_1)$* Gauss-*ове квадратурне формуле конструисане на простору алгебарских полинома, где су u_1 и f_1 дати са* (48) *и* (51)*, респективно.*

Лема 2.5. *Остатак $\widehat{R}_n f$ квадратурне формуле* Gauss-*овог типа* (40)*, конструисане на простору тригонометријских полинома у односу на парну тежинску функцију w на $(-\pi, \pi)$ једнак је остатку $R_n(u_2, f_2)$* Gauss-*ове квадратурне формуле конструисане на простору алгебарских полинома, где су u_2 и f_2 дати са* (50) *и* (52)*, респективно.*

2.2.2 Квадратурне формуле са непарним бројем чворова

Пређимо сада на квадратурне формуле са непарним бројем чворова. За њихову конструкцију су од велике важности ортогонални тригонометријски полиноми полуцелобројног степена чије смо особине навели у одељку 1.2.2. Ове квадратуре имају доста сличних особина са квадратурним формулама описаним у претходном одељку, па ћемо неке од њих наводити без доказа.

Интерполациона квадратурна формула (39) је у овом случају облика (видети [72])

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) w(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2n} \sigma_k f(\tau_k) + \widehat{R}_n f, \tag{53}$$

при чему претпостављамо да су чворови поређани у растућем поретку, односно важи $-\pi \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{2n} < \pi$, док су тежински коефицијенти дати формулама

$$\sigma_k = \int_{-\pi}^{\pi} \ell_k(x) w(x) \mathrm{d}x, \quad \ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-\tau_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\tau_k-\tau_j}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{54}$$

Приметимо да смо овде користили исте ознаке за параметре и остатак квадратурне формуле као у случају квадратура са парним бројем чворова. Како се поново ограничавамо на сам одељак, неће долазити до забуне у њиховом коришћењу.

Максимални могући тригонометријски степен тачности формуле (53) је $2n$. Познато је да ће она постићи ту тачност, односно да ће (53) бити квадратурна формула Gauss-овог типа, ако и само ако су чворови τ_k нуле тригонометријског полинома полу-целобројног степена $n + 1/2$, ортогоналног у односу на тежинску функцију w на $[-\pi, \pi)$ (видети [72], [67], [42]).

Као што смо раније поменули, поступак конструисања квадратурних формула Gauss-овог типа састоји се од два корака. Први се односи на конструкцију чворова, а други на израчунавање тежинских коефицијената. Чворови се могу одредити независно од тежинских коефицијената, док тежинске коефицијенте можемо конструисати једино ако су нам познати чворови. Формула (54) за одређивање тежинских коефицијената је применљива уколико можемо ефикасно да израчунамо интеграл на десној страни. Такође, потребно је одредити ортогонални тригонометријски полином полу-целобројног степена $n + 1/2$, што се може једноставно урадити коришћењем петочланих рекурентних релација које ови полиноми задовољавају (видети одељак 1.2.2). Описани начин је нумерички стабилан.

У наставку ћемо се ограничити на квадратурне формуле Gauss-овог типа (53) код којих је тежинска функција парна на интервалу интеграције $[-\pi, \pi)$. Веза између квадратурне формуле (53) и одговарајућих Gauss-ових квадратурних формула за алгебарске полиноме биће дата у наставку. Пре ње наведимо помоћни резултат (видети [42]).

Теорема 2.6. *Нека је $w(x)$ парна тежинска функција на интервалу $(-\pi, \pi)$. Тада за све $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $n \in \mathbb{N}$, важи*

$$\int_{-1}^{1} C_n(x) C_k(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} w(\arccos x) \mathrm{d}x = 0$$

и

$$\int_{-1}^{1} S_n(x) S_k(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} w(\arccos x) \mathrm{d}x = 0,$$

где је

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)} \left(T_k(x) - (1-x) U_{k-1}(x)\right)$$

и

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} \left(T_k(x) + (1+x) U_{k-1}(x)\right).$$

Алгебарски полиноми C_n и S_n, $n \in \mathbb{N}$, задовољавају трочлане рекурентне релације

$$
\begin{aligned}
C_n(x) &= \left(2x - \alpha_n^{(1)}\right) C_{n-1}(x) - \alpha_n^{(2)} C_{n-2}(x), \quad \alpha_1^{(2)} = 0, \quad C_0(x) = 1, \\
S_n(x) &= \left(2x - \delta_n^{(1)}\right) S_{n-1}(x) - \delta_n^{(2)} S_{n-2}(x), \quad \delta_1^{(2)} = 0, \quad S_0(x) = 1.
\end{aligned}
$$

Доказ. Како је тежинска функција $w(x)$ парна, а полином $A^C_{n+1/2}$, $n \in \mathbb{N}$, ортогоналан у односу на њу, то ће за свако $k \in \mathbb{N}$, $k < n$, важити

$$
\int_0^\pi A^C_{n+1/2}(x) A^C_{k+1/2}(x) w(x) \mathrm{d}x = 0.
$$

Уводећи смену $x = \arccos t$, добијамо

$$
\int_{-1}^1 A^C_{n+1/2}(\arccos t) A^C_{k+1/2}(\arccos t) \frac{w(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = 0. \tag{55}
$$

Користећи сада једнакост

$$
\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \arccos t\right) = \sqrt{\frac{1+t}{2}} T_k(t) - \sqrt{\frac{1-t}{2}} \sqrt{1-t^2} U_{k-1}(t)
$$

имамо

$$
A^C_{n+1/2}(\arccos t) = \sqrt{\frac{1+t}{2}} \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} \left(T_k(t) - (1-t) U_{k-1}(t)\right).
$$

Замењујући добијене формуле у (55), применом елементарних трансформација добијамо прво тврђење.

Друго тврђење се може доказати на исти начин, користећи услове ортогоналности полинома $A^S_{n+1/2}$ и једнакост

$$
\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1-x}{2}} T_k(x) + \sqrt{\frac{1+x}{2}} \sqrt{1-x^2} U_{k-1}(x).
$$

Полазећи од рекурентних релација које задовољавају тригонометријски полиноми $A^C_{n+1/2}$ и $A^S_{n+1/2}$, увођењем смене $x = \arccos t$, лако се изводе наведене рекурентне релације. □

Докази наредних лема се спроводе слично доказима лема 2.2 и 2.3 и могу се наћи у раду [42].

Лема 2.6. *Нека је тежинска функција w парна на интервалу $(-\pi, \pi)$ и нека су x_k, ω_k, $k = 1, \ldots, n$, чворови и тежински коефицијенти у* Gauss*-овој квадратурној формули са n чворова, конструисаној за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију*

$$
u_3(x) = w(\arccos x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x \in (-1, 1). \tag{56}
$$

Тада за квадратурну формулу Gauss*-овог типа* (53)*, конструисану на простору тригонометријских полинома у односу на тежинску функцију w на интервалу $(-\pi, \pi)$, за $k = 0, 1, \ldots, n-1$, важи:*

$$
\sigma_{2n-1-k} = \sigma_k = \frac{\omega_{k+1}}{1 + x_{k+1}}, \quad \tau_{2n-1-k} = -\tau_k = \arccos x_{k+1}, \tag{57}
$$

док су вредности последњих параметара дате са

$$\sigma_{2n} = \int_{-\pi}^{\pi} w(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{2n-1} \sigma_k \quad u \quad \tau_{2n} = \pi. \tag{58}$$

Лема 2.7. *Нека је тежинска функција w парна на интервалу $(-\pi,\pi)$ и нека су x_k, ω_k, $k = 1,\dots,n$, чворови и тежински коефицијенти у* Gauss*-овој квадратурној формули са n чворова, конструисаној за алгебарске полиноме у односу на тежинску функцију*

$$u_4(x) = w(\arccos x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x \in (-1,1). \tag{59}$$

Тада за квадратурну формулу Gauss*-овог типа* (53)*, конструисану на простору тригонометријских полинома у односу на тежинску функцију w на интервалу $(-\pi,\pi)$, за $k = 0,1,\dots,n-1$, важи:*

$$\sigma_{2n-k} = \sigma_k = \frac{\omega_{k+1}}{1-x_{k+1}}, \quad \tau_{2n-k} = -\tau_k = \arccos x_{k+1},$$

док су вредности преосталих параметара дате са

$$\sigma_n = \int_{-\pi}^{\pi} w(x)\mathrm{d}x - \sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} \sigma_k \quad u \quad \tau_n = 0.$$

Дефинишимо функције f_3 и f_4 на следећи начин:

$$f_3(x) = \frac{f(-\arccos x) + f(\arccos x)}{1+x}, \tag{60}$$

$$f_4(x) = \frac{f(-\arccos x) + f(\arccos x)}{1-x}, \tag{61}$$

где је f унапред задата функција.

Резултати слични лемама 2.4 и 2.5 важе за Gauss-ове квадратурне формуле са непарним бројем чворова и наводимо их у наставку (видети [68]).

Лема 2.8. *Ако је $f(\pi) = 0$, остатак $\widehat{R}_n f$ квадратурне формуле* Gauss*-овог типа* (53)*, конструисане на простору тригонометријских полинома у односу на парну тежинску функцију w на $(-\pi,\pi)$, једнак је остатку $R_n(u_3, f_3)$* Gauss*-ове квадратурне формуле конструисане на простору алгебарских полинома, где су u_3 и f_3 дати са* (56) *и* (60)*, респективно.*

Доказ. Полазећи од формуле (53), коришћењем смене $x = \arccos t$, имамо

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)w(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} f(x)w(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)w(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\pi} f(-x)w(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)w(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} (f(-x) + f(x)) w(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} (f(-\arccos t) + f(\arccos t)) \frac{w(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{f(-\arccos t) + f(\arccos t)}{1+t} \, u_3(t) \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Применом Gauss-ове квадратурне формуле конструисане на простору алгебарских полинома у односу на тежинску функцију $u_3(x)$, $x \in (-1, 1)$, добијамо

$$
\int_{-1}^{1} \frac{f(-\arccos t) + f(\arccos t)}{1+t} \, u_3(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \omega_k f_3(x_k) + R_n(u_3, f_3),
$$

где је f_3 функција дефинисана са (60). Мењајући вредности параметара (57) и (58) у формули (53), уз услов $f(\pi) = 0$, добијамо

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \sigma_k f(\tau_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k f(\tau_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{2n-1-k} f(\tau_{2n-1-k}) + \sigma_{2n} f(\tau_{2n}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_{k+1}}{1+x_{k+1}} f(-\arccos x_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_{k+1}}{1+x_{k+1}} f(\arccos x_{k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \omega_{k+1} \frac{f(-\arccos x_{k+1}) + f(\arccos x_{k+1})}{1+x_{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega_k f_3(x_k).
\end{aligned}
$$

Одавде закључујемо да су остаци ових квадратурних формула, $\widehat{R}_n f$ и $R_n(u_3, f_3)$, једнаки. $\square$

Доказ следеће леме се спроводи на сличан начин.

Лема 2.9. *Ако је $f(0) = 0$, остатак $\widehat{R}_n f$ квадратурне формуле* Gauss-*овог типа* (53), *конструисане на простору тригонометријских полинома у односу на парну тежинску функцију w на $(-\pi, \pi)$, једнак је остатку $R_n(u_4, f_4)$* Gauss-*ове квадратурне формуле конструисане на простору алгебарских полинома, где су u_4 и f_4 дати са* (59) *и* (61), *респективно.*

3 Анти-Gauss-ове квадратурне формуле

У уводном делу ове дисертације поменули смо идеју о конструисању две нумеричке методе са грешкама истих величина а супротних знакова, која је коришћена у нумеричком решавању обичних диференцијалних једначина. У раду [32] Laurie уводи анти-Gauss-ову квадратурну формулу облика

$$H_{n+1}f = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(\xi_k) \tag{62}$$

која задовољава једнакост

$$Ip - H_{n+1}p = -(Ip - G_n p), \quad p \in \mathcal{P}_{2n+1}, \tag{63}$$

где је G_n Gauss-ова квадратурна формула дата са (1), а I интеграл облика (2).

Лако је приметити да се грешка $If - G_nf$ може оценити изразом $(H_{n+1}f - G_nf)/2$, док се за апроксимацију интеграла If може користити формула са $2n+1$ чвором $L_{2n+1}f = (G_nf + H_{n+1}f)/2$, алгебарског степена тачности $2n+1$, коју називамо *усредњеном* Gauss-*овом формулом.* Она има веома значајне теоријске и практичне особине: увек постоји, њена конструкција је углавном врло једноставна, сви тежински коефицијенти су позитивни, а чворови реални.

Анти-Gauss-ове квадратурне формуле су модификоване и уопштаване на различите начине. Квадратурне формуле са мерама чије су вредности реалне изучаване су у радовима [6] и [55], док су мере са матричним вредностима посматране у радовима [2] и [18]. Такође, различити типови усредњених Gauss-ових формула конструисани су у радовима [57], [63], [65], [66], док су у раду [64] разматране особине анти-Gauss-ових квадратурних формула ради оцене грешке која њиховом применом настаје.

У наставку ћемо приказати начин конструисања анти-Gauss-ових квадратурних формула на простору алгебарских полинома, који је дао Laurie у раду [32], а потом и резултате нашег рада објављене у [52], који се односе на анти-Gauss-ове и усредњене Gauss-ове квадратурне формуле на простору тригонометријских полинома.

3.1 Анти-Gauss-ове квадратурне формуле за алгебарске полиноме

Из формуле (63) лако добијамо једнакост

$$H_{n+1}p = 2Ip - G_np, \quad p \in \mathcal{P}_{2n+1}. \tag{64}$$

Одавде се природно намеће идеја о дефинисању билинеарне форме на следећи начин

$$(f,g)_u = (2I - G_n)(fg), \quad f,g \in \mathcal{P}. \tag{65}$$

Као и код Gauss-ових квадратурних формула, битну улогу у конструкцији анти-Gauss-ових квадратура играју ортогонални полиноми. Са (π_k) ћемо означавати низ моничних ортогоналних полинома у односу на билинеарну форму (65). Они задовољавају трочлану рекурентну релацију (видети [32])

$$\pi_{k+1}(x) = (x-\alpha_k)\pi_k(x) - \beta_k\pi_{k-1}(x), \quad k = 0,1,\ldots,n; \quad \pi_{-1}(x) = 0,\ \pi_0(x) = 1. \tag{66}$$

Дакле, H_{n+1} представља GAUSS-ову квадратурну формулу која одговара линеарној функционели $2I - G_n$, одакле закључујемо да се њени чворови и тежински коефицијенти могу одредити на начин описан у наставку.

- Најпре је потребно одредити коефицијенте $\alpha_k, k = 0, 1, \ldots, n$, и β_k, $k = 1, \ldots, n$, у рекурентној релацији (66). Коефицијент β_0 може бити било који реалан број, изаберимо $\beta_0 = (2I - G_n)\pi_0$.

- Чворови квадратурне формуле (62) су сопствене вредности, а тежински коефицијенти пропорционални квадратима првих компоненти сопствених вектора симетричне тродијагоналне матрице

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Коефицијенти $\{\alpha_k \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$ и $\{\beta_k \mid k = 1, \ldots, n\}$ могу се рачунати помоћу добро познатих STIELTJES-ових формула:

$$\alpha_k = \frac{(x\pi_k, \pi_k)_u}{(\pi_k, \pi_k)_u}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n; \tag{67}$$

$$\beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)_u}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})_u}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{68}$$

Овај начин одређивања коефицијената може бити веома захтеван. Зато ћемо у наставку показати како се на тривијалан начин могу добити њихове вредности користећи одговарајуће коефицијенте из рекурентне релације (10).

Подсетимо се, са (p_k) смо означили низ моничних полинома ортогоналних у односу на тежинску функцију u, односно скаларни производ (6), док су a_k и b_k, $k = 0, 1, \ldots$, коефицијенти у рекурентној релацији (10). За одређивање вредности наведених коефицијената користимо формуле (11).

Користећи особину GAUSS-ових квадратура, имамо да је $(2I - G_n)\, p = Ip$ за све $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Ово нас доводи до једнакости

$$\alpha_k = a_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \tag{69}$$

$$\beta_k = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \tag{70}$$

$$\pi_k = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{71}$$

Остаје још да одредимо вредности коефицијената α_n и β_n. Како су тачке x_i, $i = 1, \ldots, n$, нуле полинома π_n, то ће резултат примене формуле G_n на било који израз, који садржи π_n као чинилац, бити нула. Водећи се тиме и знајући да је степен полинома π_{n-1}^2 не већи од $2n - 1$, добијамо

$$\alpha_n = \frac{2I\left(x\pi_n^2\right)}{2I\left(\pi_n^2\right)} = \frac{\langle x\pi_n, \pi_n\rangle_u}{\langle \pi_n, \pi_n\rangle_u} = a_n, \tag{72}$$

$$\beta_n = \frac{2I\left(\pi_n^2\right)}{I\left(\pi_{n-1}^2\right)} = \frac{2\left\langle \pi_n, \pi_n\right\rangle_u}{\left\langle \pi_{n-1}, \pi_{n-1}\right\rangle_u} = 2b_n. \tag{73}$$

Дакле, сви коефицијенти рекурентне релације су једнаки коефицијентима коришћеним за израчунавање Gauss-Christoffel-ове формуле G_{n+1}, осим коефицијента β_n који узима двоструку вредност.

Наведимо сада неколико основних особина анти-Gauss-ових квадратурних формула, које се могу наћи у раду [32].

Теорема 3.1. *Нека је H_{n+1} анти-*Gauss*-ова квадратурна формула облика* (62). *Тада важе следеће особине.*

(*i*) *Тежински коефицијенти λ_k, $k = 1, \ldots, n+1$, су позитивни.*

(*ii*) *Сви чворови ξ_k, $k = 1, \ldots, n+1$, су реални и преплићу се са чворовима одговарајуће* Gauss*-ове формуле G_n, тј. важи*

$$\xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \cdots < x_n < \xi_{n+1}.$$

(*iii*) *Унутрашњи чворови квадратурне формуле H_{n+1} леже унутар интервала интеграције, односно важи $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n \in [a, b]$.*

(*iv*) *Чвор $\xi_1 \in [a, b]$ ако и само ако је $\frac{p_{n+1}(a)}{p_{n-1}(a)} \geqslant b_n$, а $\xi_{n+1} \in [a, b]$ ако и само ако је $\frac{p_{n+1}(b)}{p_{n-1}(b)} \geqslant b_n$, где су p_k, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, полиноми ортогонални у односу на тежинску функцију w, а b_k, $k = 1, \ldots, n$, коефицијенти рекурентне релације* (10).

3.2 Анти-Gauss-ове квадратурне формуле за тригонометријске полиноме

Gauss-ове квадратурне формуле за тригонометријске полиноме конструисане су коришћењем веза између ових квадратурних формула и одговарајућих Gauss-ових квадратура за алгебарске полиноме, о чему је било речи у поглављу 2.2. Вођени том идејом успели смо да конструишемо анти-Gauss-ове квадратурне формуле на простору тригонометријских полинома, тј. квадратурне формуле које дају грешку исте величине али супротног знака у односу на одговарајућу Gauss-ову квадратурну формулу. Изводећи везе параметара (чворова и тежинских коефицијената) анти-Gauss-ових квадратура за тригонометријске полиноме са параметрима из одговарајућих анти-Gauss-ових квадратурних формула за алгебарске полиноме, показаћемо како се на једноставан начин ове квадратуре могу конструисати, а тиме и повећати тачност добијених апроксимација. Као што је више пута наглашено, при конструкцији квадратурних формула битну улогу играју ортогонални полиноми.

Како тригонометријски ортогонални полиноми целобројног и полуцелобројног степена имају сличне особине, у овом поглављу их нећемо посматрати одвојено већ ћемо користити уопштене ознаке којима ћемо обухватити оба случаја.

Нека је w тежинска функција, интеграбилна и ненегативна на интервалу $[-\pi, \pi)$. За сваки ненегативан цео број n и $\gamma \in \{0, 1/2\}$, означимо са $\mathcal{T}_{n,\gamma}$ линеарни простор тригонометријских полинома над скупом $\{\cos{(k+\gamma)x}, \sin{(k+\gamma)x} \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$. Дакле, $\mathcal{T}_{n,0} = \mathcal{T}_n$ представља линеарни простор свих тригонометријских полинома степена мањег или једнаког n, а $\mathcal{T}_{n,1/2}$ линеарни простор свих тригонометријских полинома полу-целобројног степена не већег од $n+1/2$.

Посматрајмо интеграл:

$$\widehat{I}f = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

Са $\{A_{k,\gamma}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $A_{k,\gamma} \in \mathcal{T}_{n,\gamma}$, означимо низ тригонометријских полинома ортогоналних на интервалу $[-\pi,\pi)$ у односу на скаларни производ

$$\langle f,g\rangle_w = \widehat{I}(fg). \tag{74}$$

Тада је одговарајућа GAUSS-ова квадратурна формула

$$\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f = \sum_{k=0}^{\widetilde{n}} \omega_k f(x_k), \quad \widetilde{n} = 2(n-1/2+\gamma), \quad \gamma \in \{0,1/2\}, \tag{75}$$

тачна за све тригонометријске полиноме $t \in \mathcal{T}_{2n-1+2\gamma}$ ако и само ако су чворови x_k, $k=0,1,\ldots,\widetilde{n}$ нуле тригонометријског полинома $A_{n,\gamma} \in \mathcal{T}_{n,\gamma}$.

Уведимо ознаке скаларних производа за $k,l \in \mathbb{N}_0$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}
I_k^{C,\gamma} &= \left\langle A_{k,\gamma}^C, A_{k,\gamma}^C \right\rangle_w, & J_{k,l}^{C,\gamma} &= \left\langle 2\cos x A_{k,\gamma}^C, A_{l,\gamma}^C \right\rangle_w, \\
I_k^{S,\gamma} &= \left\langle A_{k,\gamma}^S, A_{k,\gamma}^S \right\rangle_w, & J_{k,l}^{S,\gamma} &= \left\langle 2\cos x A_{k,\gamma}^S, A_{l,\gamma}^S \right\rangle_w, \\
I_k^{\gamma} &= \left\langle A_{k,\gamma}^C, A_{k,\gamma}^S \right\rangle_w, & J_{k,l}^{\gamma} &= \left\langle 2\cos x A_{k,\gamma}^C, A_{l,\gamma}^S \right\rangle_w.
\end{aligned}$$

За фиксиран позитиван цео број n уведимо билинеарну форму:

$$(f,g)_w = (2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1})(fg). \tag{76}$$

Напомена. Важно је нагласити да билинеарна форма (76) зависи од броја n. У складу с тим, када у наставку будемо наглашавали да је n унапред фиксиран позитиван цео број, подразумеваћемо да посматрамо билинеарну форму (76) у односу на тај фиксирани број n.

Нека је n фиксиран број. Са $\{B_{k,\gamma}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ћемо означавати низ тригонометријских полинома ортогоналних у односу на билинеарну форму (76). Одговарајућа GAUSS-ова квадратура има $\widetilde{n}+1$ чвор, док ће одговарајућа анти-GAUSS-ова квадратурна формула имати $\widetilde{n}+3$ чвора (због $n \mapsto n+1$), па ћемо за њу увести ознаку $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3} = \sum_{k=0}^{\widetilde{n}+3} \widehat{\omega}_k f(\widehat{x}_k)$. Чворови поменуте анти-GAUSS-ове квадратурне формуле су заправо нуле тригонометријског полинома

$$B_{n+1,\gamma}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(p_{k,\gamma}\cos(k+\gamma)x + q_{k,\gamma}\sin(k+\gamma)x\right), \quad |p_{n+1,\gamma}| + |q_{n+1,\gamma}| \neq 0.$$

Специјално, избором $(p_{n+1,\gamma}, q_{n+1,\gamma}) = (1,0)$ и $(p_{n+1,\gamma}, q_{n+1,\gamma}) = (0,1)$ добијамо тригонометријске полиноме са водећим косинусним, односно синусним, термом

$$B_{n+1,\gamma}^C(x) = \cos(n+1+\gamma)x + \sum_{k=0}^{n} \left(p_{k,\gamma}^{(n+1)}\cos(k+\gamma)x + q_{k,\gamma}^{(n+1)}\sin(k+\gamma)x\right)$$

и

$$B_{n+1,\gamma}^{S}(x) = \sin\left(n+1+\gamma\right)x + \sum_{k=0}^{n}\Big(r_{k,\gamma}^{(n+1)}\cos\left(k+\gamma\right)x + s_{k,\gamma}^{(n+1)}\sin\left(k+\gamma\right)x\Big),$$

редом. Даље, за $k,\ell\in\mathbb{N}_0$ дефинишимо следеће величине:

$$\begin{aligned}
\widehat{I}_k^{C,\gamma} &= \left(B_{k,\gamma}^{C}, B_{k,\gamma}^{C}\right)_w, & \widehat{J}_{k,\ell}^{C,\gamma} &= \left(2\cos x B_{k,\gamma}^{C}, B_{\ell,\gamma}^{C}\right)_w,\\
\widehat{I}_k^{S,\gamma} &= \left(B_{k,\gamma}^{S}, B_{k,\gamma}^{S}\right)_w, & \widehat{J}_{k,\ell}^{S,\gamma} &= \left(2\cos x B_{k,\gamma}^{S}, B_{\ell,\gamma}^{S}\right)_w,\\
\widehat{I}_k^{\gamma} &= \left(B_{k,\gamma}^{C}, B_{k,\gamma}^{S}\right)_w, & \widehat{J}_{k,\ell}^{\gamma} &= \left(2\cos x B_{k,\gamma}^{C}, B_{\ell,\gamma}^{S}\right)_w.
\end{aligned}$$

Косинусни и синусни ортогонални тригонометријски полиноми задовољавају петочлане рекурентне релације, што је показано у теореми која следи.

Теорема 3.2. *Нека је n фиксиран позитиван цео број. Тригонометријски полиноми $B_{k,\gamma}^{C}(x)$ и $B_{k,\gamma}^{S}(x)$, $k\geqslant 1$, ортогонални у односу на билинеарну форму* (76) *задовољавају рекурентне релације:*

$$B_{k,\gamma}^{C}(x) = \Big(2\cos x - a_{k,\gamma}^{(1)}\Big)B_{k-1,\gamma}^{C}(x) - b_{k,\gamma}^{(1)}B_{k-1,\gamma}^{S}(x) - a_{k,\gamma}^{(2)}B_{k-2,\gamma}^{C}(x) - b_{k,\gamma}^{(2)}B_{k-2,\gamma}^{S}(x), \tag{77}$$

$$B_{k,\gamma}^{S}(x) = \Big(2\cos x - d_{k,\gamma}^{(1)}\Big)B_{k-1,\gamma}^{S}(x) - c_{k,\gamma}^{(1)}B_{k-1,\gamma}^{C}(x) - d_{k,\gamma}^{(2)}B_{k-2,\gamma}^{S}(x) - c_{k,\gamma}^{(2)}B_{k-2,\gamma}^{C}(x), \tag{78}$$

при чему су коефицијенти у овим релацијама решења система

$$\begin{aligned}
\widehat{J}_{k-1,\,k-j}^{C,\gamma} &= a_{k,\gamma}^{(j)}\widehat{I}_{k-j}^{C,\gamma} + b_{k,\gamma}^{(j)}\widehat{I}_{k-j}^{\gamma}, & \widehat{J}_{k-1,\,k-j}^{\gamma} &= a_{k,\gamma}^{(j)}\widehat{I}_{k-j}^{\gamma} + b_{k,\gamma}^{(j)}\widehat{I}_{k-j}^{S,\gamma},\\
\widehat{J}_{k-1,\,k-j}^{\gamma} &= c_{k,\gamma}^{(j)}\widehat{I}_{k-j}^{C,\gamma} + d_{k,\gamma}^{(j)}\widehat{I}_{k-j}^{\gamma}, & \widehat{J}_{k-1,\,k-j}^{S,\gamma} &= c_{k,\gamma}^{(j)}\widehat{I}_{k-j}^{\gamma} + d_{k,\gamma}^{(j)}\widehat{I}_{k-j}^{S,\gamma},
\end{aligned}\tag{79}$$

за $j=1,2$, са $a_{1,\gamma}^{(2)}=b_{1,\gamma}^{(2)}=c_{1,\gamma}^{(2)}=d_{1,\gamma}^{(2)}=0$.

Доказ. Полиноми $B_{j,\gamma}^{C}(x)$ и $B_{j,\gamma}^{S}(x)$, за $j=0,1,\ldots,k$, су линеарно независни, па можемо писати

$$2\cos x B_{k-1,\gamma}^{C}(x) = B_{k,\gamma}^{C}(x) + \sum_{j=0}^{k-1}\Big[a_{k,\gamma}^{(k-j)}B_{j,\gamma}^{C}(x) + b_{k,\gamma}^{(k-j)}B_{j,\gamma}^{S}(x)\Big]. \tag{80}$$

Примењујући билинеарну форму $\left(\cdot, B_{i,\gamma}^{C}(x)\right)_w$ на ову једнакост, за $i=0,1,\ldots,k-1$, добијамо:

$$\begin{aligned}
\left(2\cos x B_{k-1,\gamma}^{C}(x), B_{i,\gamma}^{C}(x)\right)_w &= \left(B_{k,\gamma}^{C}(x), B_{i,\gamma}^{C}(x)\right)_w + \sum_{j=0}^{k-1}a_{k,\gamma}^{(k-j)}\left(B_{j,\gamma}^{C}(x), B_{i,\gamma}^{C}(x)\right)_w\\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}b_{k,\gamma}^{(k-j)}\left(B_{j,\gamma}^{S}(x), B_{i,\gamma}^{C}(x)\right)_w.
\end{aligned}$$

Одавде, за $i = 0, 1, \ldots, k-3$, имамо

$$a_{k,\gamma}^{(k-i)} \widehat{I}_i^{C,\gamma} + b_{k,\gamma}^{(k-i)} \widehat{I}_i^{\gamma} = 0. \tag{81}$$

На сличан начин, применом билинеарне форме (76) са полиномом $B_{i,\gamma}^S(x)$ на месту другог аргумента, за $i = 0, 1, \ldots, k-1$, добијамо

$$\begin{aligned}\left(2\cos x B_{k-1,\gamma}^C(x), B_{i,\gamma}^S(x)\right)_w = \left(B_{k,\gamma}^C(x), B_{i,\gamma}^S(x)\right)_w + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,\gamma}^{(k-j)} \left(B_{j,\gamma}^C(x), B_{i,\gamma}^S(x)\right)_w \\ + \sum_{j=0}^{k-1} b_{k,\gamma}^{(k-j)} \left(B_{j,\gamma}^S(x), B_{i,\gamma}^S(x)\right)_w.\end{aligned}$$

Поново, за вредности $i = 0, 1, \ldots, k-3$ последња једнакост се своди на

$$a_{k,\gamma}^{(k-i)} \widehat{I}_i^{\gamma} + b_{k,\gamma}^{(k-i)} \widehat{I}_i^{S,\gamma} = 0. \tag{82}$$

Дакле, добили смо хомогене системе линеарних једначина

$$\begin{aligned}\widehat{I}_i^{C,\gamma} \cdot a_{k,\gamma}^{(k-i)} + \widehat{I}_i^{\gamma} \cdot b_{k,\gamma}^{(k-i)} = 0, \\ \widehat{I}_i^{\gamma} \cdot a_{k,\gamma}^{(k-i)} + \widehat{I}_i^{S,\gamma} \cdot b_{k,\gamma}^{(k-i)} = 0,\end{aligned} \qquad i = 0, 1, \ldots, k-3, \tag{83}$$

чије су детерминанте дате са

$$\widehat{D}_i^{\gamma} = \begin{vmatrix} \widehat{I}_i^{C,\gamma} & \widehat{I}_i^{\gamma} \\ \widehat{I}_i^{\gamma} & \widehat{I}_i^{S,\gamma} \end{vmatrix}.$$

Како је једнакост $\widehat{I}f = \widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$ испуњена за све $f \in \mathcal{T}_{\widetilde{n}}$, то ће важити

$$\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f = (2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1})f = \widehat{I}f + (\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1})f = \widehat{I}f$$

за свако $f \in \mathcal{T}_{\widetilde{n}}$. Даље, важе једнакости $B_{k,\gamma}^C(x) = A_{k,\gamma}^C(x)$ и $B_{k,\gamma}^S(x) = A_{k,\gamma}^S(x)$, за свако $k = 0, 1, \ldots, n$. Отуда, за $2k+1 < 2n$, имамо

$$\widehat{I}_k^{C,\gamma} = \left(B_{k,\gamma}^C, B_{k,\gamma}^C\right)_w = (2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1})\left(B_{k,\gamma}^C \cdot B_{k,\gamma}^C\right) = \widehat{I}\left(B_{k,\gamma}^C \cdot B_{k,\gamma}^C\right) = I_k^{C,\gamma}.$$

Аналогно се може показати да је $\widehat{I}_k^{S,\gamma} = I_k^{S,\gamma}$ и $\widehat{I}_k^{\gamma} = I_k^{\gamma}$.
Користећи сада интегралну неједнакост Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ог (видети [46]), за $i = 0, 1, \ldots, k-3$, имамо:

$$\begin{aligned}\widehat{D}_i^{\gamma} =& \widehat{I}_i^{C,\gamma}\widehat{I}_i^{S,\gamma} - \left(\widehat{I}_i^{\gamma}\right)^2 = I_i^{C,\gamma} I_i^{S,\gamma} - (I_i^{\gamma})^2 \\ =& \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(A_{i,\gamma}^C(x)\right)^2 w(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(A_{i,\gamma}^S(x)\right)^2 w(x)\mathrm{d}x\right) \\ &- \left(\int_{-\pi}^{\pi} A_{i,\gamma}^C(x) A_{i,\gamma}^S(x) w(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ >& \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(A_{i,\gamma}^C(x)\right)^2 w(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(A_{i,\gamma}^S(x)\right)^2 w(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

$$
- \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(A_{i,\gamma}^{C}(x) \right)^2 w(x) \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(A_{i,\gamma}^{S}(x) \right)^2 w(x) \mathrm{d}x \right) = 0.
$$

Дакле, систем (83) има само тривијална решења $a_{k,\gamma}^{(k-i)} = b_{k,\gamma}^{(k-i)} = 0$, за све вредности $i = 0, 1, \ldots, k-3$, па једнакост (80) постаје

$$
\begin{aligned}
2\cos x B_{k-1,\gamma}^{C}(x) = B_{k,\gamma}^{C}(x) + a_{k,\gamma}^{(1)} B_{k-1,\gamma}^{C}(x) + b_{k,\gamma}^{(1)} B_{k-1,\gamma}^{S}(x) \\
+ a_{k,\gamma}^{(2)} B_{k-2,\gamma}^{C}(x) + b_{k,\gamma}^{(2)} B_{k-2,\gamma}^{S}(x),
\end{aligned} \tag{84}
$$

односно важи (77). Аналогно се показује релација (78).

Користећи релацију (84), за $j = 1, 2$, имамо

$$
\begin{aligned}
\left(2\cos x B_{k-1,\gamma}^{C}(x),\ B_{k-j,\gamma}^{C}(x)\right)_w &= a_{k,\gamma}^{(1)} \left(B_{k-1,\gamma}^{C}(x), B_{k-j,\gamma}^{C}(x) \right)_w \\
&+ b_{k,\gamma}^{(1)} \left(B_{k-1,\gamma}^{S}(x), B_{k-j,\gamma}^{C}(x) \right)_w + a_{k,\gamma}^{(2)} \left(B_{k-2,\gamma}^{C}(x), B_{k-j,\gamma}^{C}(x) \right)_w \\
&+ b_{k,\gamma}^{(2)} \left(B_{k-2,\gamma}^{S}(x), B_{k-j,\gamma}^{C}(x) \right)_w
\end{aligned}
$$

тј. $\widehat{J}_{k-1,\,k-j}^{C,\gamma} = a_{k,\gamma}^{(j)} \widehat{I}_{k-j}^{C,\gamma} + b_{k,\gamma}^{(j)} \widehat{I}_{k-j}^{\gamma}$, за $j = 1, 2$.
Аналогно је $\widehat{J}_{k-1,\,k-j}^{\gamma} = a_{k,\gamma}^{(j)} \widehat{I}_{k-j}^{\gamma} + b_{k,\gamma}^{(j)} \widehat{I}_{k-j}^{S,\gamma}$, за $j = 1, 2$.

Полазећи од рекурентне релације (78), лако се долази до једнакости

$$
\widehat{J}_{k-1,\,k-j}^{\gamma} = c_{k,\gamma}^{(j)} \widehat{I}_{k-j}^{C,\gamma} + d_{k,\gamma}^{(j)} \widehat{I}_{k-j}^{\gamma}, \quad \widehat{J}_{k-1,\,k-j}^{S,\gamma} = c_{k,\gamma}^{(j)} \widehat{I}_{k-j}^{\gamma} + d_{k,\gamma}^{(j)} \widehat{I}_{k-j}^{S,\gamma},
$$

за $j = 1, 2$, чиме је доказ завршен. □

Наредна лема се лако доказује користећи услове ортогоналности и рекурентне релације (77) и (78).

Лема 3.1. *За $k \geqslant 1$ важе следеће једнакости:*

$$
\widehat{I}_{k}^{C,\gamma} = \widehat{J}_{k,\,k-1}^{C,\gamma}, \quad \widehat{I}_{k}^{S,\gamma} = \widehat{J}_{k,\,k-1}^{S,\gamma}, \quad \widehat{I}_{k}^{\gamma} = \widehat{J}_{k,\,k-1}^{\gamma}.
$$

Ради прегледнијег записа уведимо ознаке: $\widehat{J}_{k}^{C,\gamma} = \widehat{J}_{k,\,k}^{C,\gamma}$, $\widehat{J}_{k}^{S,\gamma} = \widehat{J}_{k,\,k}^{S,\gamma}$, $\widehat{J}_{k}^{\gamma} = \widehat{J}_{k,\,k}^{\gamma}$. Решавањем система (79) долазимо до следећег резултата.

Последица 2. *Коефицијенти у рекурентним релацијама* (77) *и* (78) *могу се рачунати помоћу формула:*

$$
\begin{aligned}
a_{k,\gamma}^{(1)} &= \frac{\widehat{I}_{k-1}^{S,\gamma} \widehat{J}_{k-1}^{C,\gamma} - \widehat{I}_{k-1}^{\gamma} \widehat{J}_{k-1}^{\gamma}}{\widehat{D}_{k-1}^{\gamma}}, & a_{k,\gamma}^{(2)} &= \frac{\widehat{I}_{k-1}^{C,\gamma} \widehat{I}_{k-2}^{S,\gamma} - \widehat{I}_{k-1}^{\gamma} \widehat{I}_{k-2}^{\gamma}}{\widehat{D}_{k-2}^{\gamma}}, \\
b_{k,\gamma}^{(1)} &= \frac{\widehat{I}_{k-1}^{C,\gamma} \widehat{J}_{k-1}^{\gamma} - \widehat{I}_{k-1}^{\gamma} \widehat{J}_{k-1}^{C,\gamma}}{\widehat{D}_{k-1}^{\gamma}}, & b_{k,\gamma}^{(2)} &= \frac{\widehat{I}_{k-1}^{\gamma} \widehat{I}_{k-2}^{C,\gamma} - \widehat{I}_{k-1}^{C,\gamma} \widehat{I}_{k-2}^{\gamma}}{\widehat{D}_{k-2}^{\gamma}}, \\
c_{k,\gamma}^{(1)} &= \frac{\widehat{I}_{k-1}^{S,\gamma} \widehat{J}_{k-1}^{\gamma} - \widehat{I}_{k-1}^{\gamma} \widehat{J}_{k-1}^{S,\gamma}}{\widehat{D}_{k-1}^{\gamma}}, & c_{k,\gamma}^{(2)} &= \frac{\widehat{I}_{k-1}^{\gamma} \widehat{I}_{k-2}^{S,\gamma} - \widehat{I}_{k-1}^{S,\gamma} \widehat{I}_{k-2}^{\gamma}}{\widehat{D}_{k-2}^{\gamma}}, \\
d_{k,\gamma}^{(1)} &= \frac{\widehat{I}_{k-1}^{C,\gamma} \widehat{J}_{k-1}^{S,\gamma} - \widehat{I}_{k-1}^{\gamma} \widehat{J}_{k-1}^{\gamma}}{\widehat{D}_{k-1}^{\gamma}}, & d_{k,\gamma}^{(2)} &= \frac{\widehat{I}_{k-1}^{S,\gamma} \widehat{I}_{k-2}^{C,\gamma} - \widehat{I}_{k-1}^{\gamma} \widehat{I}_{k-2}^{\gamma}}{\widehat{D}_{k-2}^{\gamma}},
\end{aligned}
$$

где је $\widehat{D}_{k-j}^{\gamma} = \widehat{I}_{k-j}^{C,\gamma} \widehat{I}_{k-j}^{S,\gamma} - \left(\widehat{I}_{k-j}^{\gamma} \right)^2$, $j = 1, 2$, *за* $k \geqslant 1$.

Посматрајмо сада фиксиран цео број n. Како је испуњено $B^C_{k,\gamma}(x) = A^C_{k,\gamma}(x)$ и $B^S_{k,\gamma}(x) = A^S_{k,\gamma}(x)$, за свако $k = 0, 1, \ldots, n$, то ће важити

$$a^{(j)}_{k,\gamma} = \alpha^{(j)}_{k,\gamma}, \quad b^{(j)}_{k,\gamma} = \beta^{(j)}_{k,\gamma}, \quad c^{(j)}_{k,\gamma} = \gamma^{(j)}_{k,\gamma}, \quad d^{(j)}_{k,\gamma} = \delta^{(j)}_{k,\gamma}, \qquad \text{за } j = 1, 2, \tag{85}$$

где су са $\alpha^{(j)}_{k,\gamma}$, $\beta^{(j)}_{k,\gamma}$, $\gamma^{(j)}_{k,\gamma}$ и $\delta^{(j)}_{k,\gamma}$ означени коефицијенти у одговарајућим рекурентним релацијама које задовољавају тригонометријски полиноми $A^C_{k,\gamma}$ и $A^S_{k,\gamma}$ (видети [42], [69]).

Лема 3.2. *Нека је n цео број. За $k = 0, 1, \ldots, n-1$ важе једнакости:*

$$\begin{aligned} \widehat{I}^{S,\gamma}_k = I^{S,\gamma}_k, \quad \widehat{I}^{C,\gamma}_k = I^{C,\gamma}_k, \quad \widehat{I}^{\gamma}_k = I^{\gamma}_k, \\ \widehat{J}^{S,\gamma}_k = J^{S,\gamma}_k, \quad \widehat{J}^{C,\gamma}_k = J^{C,\gamma}_k, \quad \widehat{J}^{\gamma}_k = J^{\gamma}_k, \end{aligned}$$

док је за $k = n$ испуњено:

$$\begin{aligned} \widehat{I}^{S,\gamma}_n = 2I^{S,\gamma}_n, \quad \widehat{I}^{C,\gamma}_n = 2I^{C,\gamma}_n, \quad \widehat{I}^{\gamma}_n = 2I^{\gamma}_n, \\ \widehat{J}^{S,\gamma}_n = 2J^{S,\gamma}_n, \quad \widehat{J}^{C,\gamma}_n = 2J^{C,\gamma}_n, \quad \widehat{J}^{\gamma}_n = 2J^{\gamma}_n. \end{aligned}$$

Такође, за $k = n+1$ коефицијенти у петочланим рекурентним релацијама (77) *и* (78) *задовољавају следеће једнакости*

$$\begin{aligned} a^{(1)}_{n+1,\gamma} &= \alpha^{(1)}_{n+1,\gamma}, & a^{(2)}_{n+1,\gamma} &= 2\alpha^{(2)}_{n+1,\gamma}, \\ b^{(1)}_{n+1,\gamma} &= \beta^{(1)}_{n+1,\gamma}, & b^{(2)}_{n+1,\gamma} &= 2\beta^{(2)}_{n+1,\gamma}, \\ c^{(1)}_{n+1,\gamma} &= \gamma^{(1)}_{n+1,\gamma}, & c^{(2)}_{n+1,\gamma} &= 2\gamma^{(2)}_{n+1,\gamma}, \\ d^{(1)}_{n+1,\gamma} &= \delta^{(1)}_{n+1,\gamma}, & d^{(2)}_{n+1,\gamma} &= 2\delta^{(2)}_{n+1,\gamma}. \end{aligned} \tag{86}$$

Доказ. За $k = 0, 1, \ldots, n-1$ имамо

$$\begin{aligned} \widehat{I}^{\gamma}_k &= \left(B^C_{k,\gamma}, B^S_{k,\gamma}\right)_w = \left(2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1}\right)\left(B^C_{k,\gamma} \cdot B^S_{k,\gamma}\right) = \left(2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1}\right)\left(A^C_{k,\gamma} \cdot A^S_{k,\gamma}\right) \\ &= \widehat{I}\left(A^C_{k,\gamma} \cdot A^S_{k,\gamma}\right) + \left(\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1}\right)\left(A^C_{k,\gamma} \cdot A^S_{k,\gamma}\right) = \left\langle A^C_{k,\gamma}, A^S_{k,\gamma}\right\rangle_w = I^{\gamma}_k. \end{aligned}$$

Слично се показују и остале једнакости за $k \leqslant n-1$.

Како су чворови Gauss-ове квадратурне формуле нуле тригонометријског полинома $A_{n,\gamma}(x)$, то за $k = n$, имамо

$$\begin{aligned} \widehat{I}^{\gamma}_n &= \left(B^C_{n,\gamma}, B^S_{n,\gamma}\right)_w = \left(2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1}\right)\left(B^C_{n,\gamma} \cdot B^S_{n,\gamma}\right) \\ &= \left(2\widehat{I} - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1}\right)\left(A^C_{n,\gamma} \cdot A^S_{n,\gamma}\right) = 2I^{\gamma}_n. \end{aligned}$$

Аналогно се могу доказати и остале једнакости у овом случају.

Даље, користећи претходно изведене једнакости, добијамо:

$$\begin{aligned} \widehat{D}^{\gamma}_k &= \widehat{I}^{C,\gamma}_k \widehat{I}^{S,\gamma}_k - \left(\widehat{I}^{\gamma}_k\right)^2 = I^{C,\gamma}_k I^{S,\gamma}_k - \left(I^{\gamma}_k\right)^2 = D^{\gamma}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \widehat{D}^{\gamma}_n &= \widehat{I}^{C,\gamma}_n \widehat{I}^{S,\gamma}_n - \left(\widehat{I}^{\gamma}_n\right)^2 = 2I^{C,\gamma}_n \cdot 2I^{S,\gamma}_n - \left(2I^{\gamma}_n\right)^2 = 4D^{\gamma}_n, \end{aligned}$$

где je $D_k^\gamma = I_k^{C,\gamma} I_k^{S,\gamma} - (I_k^\gamma)^2$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Коначно, за коефицијенте $a_{n+1,\gamma}^{(1)}$ и $a_{n+1,\gamma}^{(2)}$ важи

$$a_{n+1,\gamma}^{(1)} = \frac{\widehat{I}_n^{S,\gamma} \widehat{J}_n^{C,\gamma} - \widehat{I}_n^\gamma \widehat{J}_n^\gamma}{\widehat{D}_n^\gamma} = \frac{2I_n^{S,\gamma} \cdot 2J_n^{C,\gamma} - 2I_n^\gamma \cdot 2J_n^\gamma}{4 \cdot D_n^\gamma} = \alpha_{n+1,\gamma}^{(1)}$$

и

$$a_{n+1,\gamma}^{(2)} = \frac{\widehat{I}_n^{C,\gamma} \widehat{I}_{n-1}^{S,\gamma} - \widehat{I}_n^\gamma \widehat{I}_{n-1}^\gamma}{\widehat{D}_{n-1}^\gamma} = \frac{2I_n^{C,\gamma} I_{n-1}^{S,\gamma} - 2I_n^\gamma I_{n-1}^\gamma}{D_{n-1}^\gamma} = 2\alpha_{n+1,\gamma}^{(2)}.$$

Једнакости за остале коефицијенте се изводе на сличан начин. □

3.3 Нумеричка конструкција анти-Gauss-ових квадратурних формула на простору тригонометријских полинома

У овом поглављу наша пажња ће бити усмерена на парне тежинске функције w на интервалу $(-\pi, \pi)$. Нека је n фиксиран позитиван цео број. Користећи једнакости полинома $B_{k,\gamma}^C(x) = A_{k,\gamma}^C(x)$, $B_{k,\gamma}^S(x) = A_{k,\gamma}^S(x)$, за $k = 0, 1, \dots, n$, као и везе (86), добијамо следећу релацију

$$\begin{aligned}
B_{n+1,\gamma}^C(x) &= \left(2\cos x - a_{n+1,\gamma}^{(1)}\right) B_{n,\gamma}^C(x) - b_{n+1,\gamma}^{(1)} B_{n,\gamma}^S(x) \\
&\quad - a_{n+1,\gamma}^{(2)} B_{n-1,\gamma}^C(x) - b_{n+1,\gamma}^{(2)} B_{n-1,\gamma}^S(x) \\
&= \left(2\cos x - \alpha_{n+1,\gamma}^{(1)}\right) A_{n,\gamma}^C(x) - \beta_{n+1,\gamma}^{(1)} A_{n,\gamma}^S(x) \\
&\quad - 2\alpha_{n+1,\gamma}^{(2)} A_{n-1,\gamma}^C(x) - 2\beta_{n+1,\gamma}^{(2)} A_{n-1,\gamma}^S(x) \\
&= A_{n+1,\gamma}^C(x) - \alpha_{n+1,\gamma}^{(2)} A_{n-1,\gamma}^C(x) - \beta_{n+1,\gamma}^{(2)} A_{n-1,\gamma}^S(x).
\end{aligned}$$

На основу лема 1.2 и 1.6 знамо да је $\beta_{k,\gamma}^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$, за свако $k \in \mathbb{N}$, па је и $\beta_{n+1,\gamma}^{(2)}$ једнако нули. Узимајући у обзир да је сваки ортогонални тригонометријски полином $A_{k,\gamma}^C(x)$ облика $A_{k,\gamma}^C(x) = \sum_{j=0}^{k} u_{j,\gamma}^{(k)} \cos(j+\gamma)x$, са $u_{k,\gamma}^{(k)} = 1$, добијамо:

$$B_{n+1,\gamma}^C(x) = A_{n+1,\gamma}^C(x) - \alpha_{n+1,\gamma}^{(2)} A_{n-1,\gamma}^C(x) = \sum_{k=0}^{n+1} p_{k,\gamma}^{(n+1)} \cos(k+\gamma)x,$$

при чему је $p_{n+1,\gamma}^{(n+1)} = 1$. На сличан начин, користећи релације (86) и леме 1.2 и 1.6, имамо:

$$B_{n+1,\gamma}^S(x) = A_{n+1,\gamma}^S(x) - \delta_{n+1,\gamma}^{(2)} A_{n-1,\gamma}^S(x) = \sum_{k=0}^{n+1} s_{k,\gamma}^{(n+1)} \sin(k+\gamma)x,$$

уз $s_{n+1,\gamma}^{(n+1)} = 1$.

Сада се лако долази до закључка да полиноми $B_{n+1,\gamma}^C$ и $B_{n+1,\gamma}^S$ задовољавају трочлане рекурентне релације:

(87) $$B_{n+1,\gamma}^C(x) = \left(2\cos x - a_{n+1,\gamma}^{(1)}\right) B_{n,\gamma}^C(x) - a_{n+1,\gamma}^{(2)} B_{n-1,\gamma}^C(x),$$

$$B_{n+1,\gamma}^S(x) = \left(2\cos x - d_{n+1,\gamma}^{(1)}\right) B_{n,\gamma}^S(x) - d_{n+1,\gamma}^{(2)} B_{n-1,\gamma}^S(x), \tag{88}$$

као и да важи следећи резултат.

Лема 3.3. *За свако* $k \in \mathbb{N}_0$ *важи*

$$B_{k+1,\gamma}^C(\pi) = 0, \quad B_{k+1,\gamma}^S(0) = 0.$$

3.3.1 Квадратурне формуле са парним бројем чворова

Нека је n позитиван цео број. За $\gamma = 0$ добијамо квадратурне формуле са парним бројем чворова.

Уведимо следеће ознаке за $k = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{aligned} C_{k,0}(x) &= \sum_{j=0}^{k} p_{j,0}^{(k)} T_j(x), \quad & S_{k,0}(x) &= \sum_{j=0}^{k} s_{j,0}^{(k)} U_{j-1}(x), \\ u_1(x) &= \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, & u_2(x) &= \sqrt{1-x^2}\, w(\arccos x), \end{aligned}$$

где су $T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)$ и $U_k(x) = \sin((k+1)\arccos x)/\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$, Chebyshev-љеви полиноми прве и друге врсте, редом. Даље, означимо са $\tau_k^{(i)}$ и $\sigma_k^{(i)}$, $k = 1, \ldots, n$, чворове и тежинске коефицијенте Gauss-ове квадратурне формуле конструисане на простору алгебарских полинома у односу на тежинске функције $u_i(x)$, $i = 1, 2$.

Веза квадратуре (75) са одређеном Gauss-овом квадратурном формулом за алгебарске полиноме, у случају $\gamma = 0$, посматрана је у раду [68]. Користећи те везе долазимо до следећег резултата.

Теорема 3.3. *Нека је n позитиван цео број и $w(x)$ парна тежинска функција на интервалу $(-\pi, \pi)$. Тада, за свако $k = 0, 1, \ldots, n-1$, важи*

$$\left(C_{n,0}(x), C_{k,0}(x)\right)_{u_1} = 0 \quad \text{и} \quad \left(S_{n,0}(x), S_{k,0}(x)\right)_{u_2} = 0. \tag{89}$$

Доказ. Користећи тврђење леме 2.2 и ортогоналност полинома $B_{k,0}^C(x)$, уводећи смену $x = \arccos t$, за свако $k = 0, 1, \ldots, n-1$, имамо

$$\begin{aligned} 0 = \left(B_{n,0}^C(x), B_{k,0}^C(x)\right)_w &= \left(2\widehat{I} - \widehat{G}_{2n}\right)\left(B_{n,0}^C(x) \cdot B_{k,0}^C(x)\right) \\ &= 4\int_0^\pi B_{n,0}^C(x) B_{k,0}^C(x) w(x)dx - \sum_{j=0}^{2n-1} \omega_j B_{n,0}^C(x_j) B_{k,0}^C(x_j) \\ &= 4\int_1^{-1} B_{n,0}^C(\arccos t) B_{k,0}^C(\arccos t) \frac{w(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}(-dt) \\ &\quad - \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{j+1}^{(1)} B_{n,0}^C\left(-\arccos \tau_{j+1}^{(1)}\right) B_{k,0}^C\left(-\arccos \tau_{j+1}^{(1)}\right)\right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=n}^{2n-1} \sigma_{2n-j}^{(1)} B_{n,0}^C\left(\arccos \tau_{2n-j}^{(1)}\right) B_{k,0}^C\left(\arccos \tau_{2n-j}^{(1)}\right)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_{-1}^{1} B_{n,0}^{C}(\arccos t) B_{k,0}^{C}(\arccos t)\frac{w(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\
&\quad - 2\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{(1)} B_{n,0}^{C}\left(\arccos \tau_j^{(1)}\right) B_{k,0}^{C}\left(\arccos \tau_j^{(1)}\right) \\
&= 2\,(2I - G_n)\left(B_{n,0}^{C}(\arccos x)\cdot B_{k,0}^{C}(\arccos x)\right) \\
&= 2\left(B_{n,0}^{C}(\arccos x), B_{k,0}^{C}(\arccos x)\right)_{u_1}.
\end{aligned}
$$

Како је $B_{k,0}^{C}(\arccos x) = \sum_{j=0}^{k} p_{j,0}^{(k)} \cos(j\arccos x) = \sum_{j=0}^{k} p_{j,0}^{(k)} T_j(x)$, за све $k = 0, 1, \ldots, n-1$, одавде добијамо

$$
\begin{aligned}
\left(B_{n,0}^{C}(\arccos x), B_{k,0}^{C}(\arccos x)\right)_{u_1} &= \left(\sum_{j=0}^{n} p_{j,0}^{(n)} T_j(x), \sum_{j=0}^{k} p_{j,0}^{(k)} T_j(x)\right)_{u_1} \\
&= \left(C_{n,0}(x), C_{k,0}(x)\right)_{u_1},
\end{aligned}
$$

тј. $\left(C_n(x), C_k(x)\right)_{u_1} = 0$.
Друга једнакост се доказује на исти начин, коришћењем леме 2.3:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(B_{n,0}^{S}(x), B_{k,0}^{S}(x)\right)_{w} = \left(2\widehat{I} - \widehat{G}_{2n}\right)\left(B_{n,0}^{S}(x)\cdot B_{k,0}^{S}(x)\right) \\
&= 4\int_{0}^{\pi} B_{n,0}^{S}(x) B_{k,0}^{S}(x) w(x)\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{2n-1} \omega_j B_{n,0}^{S}(x_j) B_{k,0}^{S}(x_j) \\
&= 2\cdot\Bigg[2\int_{-1}^{1} \frac{B_{n,0}^{S}(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{B_{k,0}^{S}(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\, u_2(t)\mathrm{d}t \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{(2)} \frac{B_{n,0}^{S}\left(\arccos \tau_j^{(2)}\right)}{\sqrt{1-\left(\tau_j^{(2)}\right)^2}}\cdot\frac{B_{k,0}^{S}\left(\arccos \tau_j^{(2)}\right)}{\sqrt{1-\left(\tau_j^{(2)}\right)^2}}\Bigg] \\
&= 2\cdot(2I - G_n)\left(\frac{B_{n,0}^{S}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{B_{k,0}^{S}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&= 2\left(\frac{B_{n,0}^{S}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{B_{k,0}^{S}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)_{u_2}.
\end{aligned}
$$

Сада, из једнакости

$$
B_{k,0}^{S}(\arccos x) = \sum_{j=0}^{k} s_{j,0}^{(k)} \sin(j\arccos x) = \sum_{j=0}^{k} s_{j,0}^{(k)} \sqrt{1-x^2}\, U_{k-1}(x),
$$

односно

$$
\frac{B_{k,0}^{S}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{j=0}^{k} s_{j,0}^{(k)} U_{j-1}(x),
$$

за свако $k = 0, 1, \ldots, n-1$, добијамо:

$$\begin{aligned}\left(\frac{B^S_{n,0}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{B^S_{k,0}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)_{u_2} &= \left(\sum_{j=0}^{n} s^{(n)}_{j,0} U_{j-1}(x), \sum_{j=0}^{k} s^{(k)}_{j,0} U_{j-1}(x)\right)_{u_2} \\ &= \left(S_{n,0}(x), S_{k,0}(x)\right)_{u_2},\end{aligned}$$

тј. важи $(S_n(x), S_k(x))_{u_2} = 0$. □

Ако у једнакости (87) уведемо смену $x := \arccos x$, узимајући у обзир једнакост $B^C_{n,0}(\arccos x) = C_{n,0}(x)$, добијамо:

$$C_{n,0}(x) = \left(2x - a^{(1)}_{n,0}\right) C_{n-1,0}(x) - a^{(2)}_{n,0} C_{n-2,0}(x), \quad a^{(2)}_{1,0} = 0, \quad C_{0,0}(x) = 1.$$

Дакле, нуле полинома $C_{n+1,0}(x)$, а тиме и нуле полинома $B^C_{n+1,0}(x)$, могу се одредити коришћењем QR-алгоритма.

Лема 3.4. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi, \pi)$ и нека су τ_k и σ_k, $k = 1, \ldots, n+1$, чворови и тежински коефицијенти анти-*Gauss*-ове квадратурне формуле са $n+1$ чвором, конструисане на простору алгебарских полинома у односу на тежинску функцију $u_1(x) = w(\arccos x)/\sqrt{1-x^2}$ на $(-1, 1)$. Тада се тежински коефицијенти $\widehat{\omega}_k$ и чворови $\widehat{x}_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$, анти-*Gauss*-ове квадратуре са $2n+2$ чвора, конструисане у односу на тежинску функцију w, могу одредити помоћу формула:*

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_k &= \widehat{\omega}_{2n+1-k} = \sigma_{k+1}, & k &= 0, 1, \ldots, n, \\ \widehat{x}_k &= -\widehat{x}_{2n+1-k} = -\arccos \tau_{k+1}, & k &= 0, 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Доказ. На основу једнакости $B^C_{n+1,0}(\arccos x) = C_{n+1,0}(x)$ јасно се види да су чворови анти-Gauss-ове квадратурне формуле за тригонометријске полиноме дати са

$$\widehat{x}_k = -\widehat{x}_{2n+1-k} = -\arccos \tau_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

За одређивање тежинских коефицијената користимо Shohat-ову формулу (видети [59], [42]):

$$\sigma_k = \mu_0 \left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{C_{j,0}(\tau_k)}{\prod_{i=2}^{j} a^{(2)}_{i,0}}\right)^2\right]^{-1} = \frac{\mu_0}{\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{B^C_{j,0}(\arccos \tau_k)}{\prod_{i=2}^{j} a^{(2)}_{i,0}}\right)^2}, \quad k = 1, \ldots, n+1,$$

при чему је

$$\mu_0 = \int_{-1}^{1} \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Како је тежинска функција $w(x)$ парна на интервалу $(-\pi, \pi)$, то је

$$\widehat{\omega}_{2n+1-k} = \frac{\widehat{\mu}_0}{2 \cdot \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{B^C_{j,0}(\widehat{x}_{2n+1-k})}{\prod_{i=2}^{j} a^{(2)}_{i,0}}\right)^2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где је

$$\widehat{\mu}_0=\int_{-\pi}^{\pi}w(x)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}w(\arccos t)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=2\mu_0.$$

Одавде добијамо $\widehat{\omega}_{2n+1-k}=\widehat{\omega}_k=\sigma_{k+1}$, за $k=0,1,\ldots,n$. $\square$

На сличан начин се може доказати следећи резултат.

Лема 3.5. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi,\pi)$ и нека су τ_k и σ_k, $k=1,\ldots,n+1$, чворови и тежински коефицијенти анти-*Gauss*-ове квадратурне формуле са $n+1$ чвором, конструисане на простору алгебарских полинома у односу на тежинску функцију $u_2(x)=\sqrt{1-x^2}\,w(\arccos x)$ на $(-1,1)$. Тада се тежински коефицијенти $\widehat{\omega}_k$ и чворови $\widehat{x}_k$, $k=0,1,\ldots,2n+1$, анти-*Gauss*-ове квадратурне формуле са $2n+2$ чвора, конструисане у односу на тежинску функцију w, могу одредити на следећи начин:*

$$\begin{aligned}\widehat{\omega}_k&=\widehat{\omega}_{2n+1-k}=\frac{\sigma_{k+1}}{1-\tau_{k+1}^2}, && k=0,1,\ldots,n,\\ \widehat{x}_k&=-\widehat{x}_{2n+1-k}=-\arccos\tau_{k+1}, && k=0,1,\ldots,n.\end{aligned}$$

3.3.2 Квадратурне формуле са непарним бројем чворова

У случају $\gamma=1/2$ добијамо квадратурне формуле са непарним бројем чворова. Уведимо следеће ознаке за $k=0,1,\ldots$:

$$\begin{aligned}C_{k,1/2}(x)&=\sum_{j=0}^{k}p_{j,1/2}^{(k)}\big(T_j(x)-(1-x)U_{j-1}(x)\big),\\ S_{k,1/2}(x)&=\sum_{j=0}^{k}s_{j,1/2}^{(k)}\big(T_j(x)+(1+x)U_{j-1}(x)\big),\\ u_3(x)&=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,w(\arccos x),\quad u_4(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,w(\arccos x).\end{aligned}$$

Даље, означимо са $\tau_k^{(i)}$ и $\sigma_k^{(i)}$, $k=1,\ldots,n$, чворове и тежинске коефицијенте Gauss-ове квадратурне формуле конструисане за алгебарске полиноме у односу на тежинске функције $u_i(x)$, $i=3,4$. Важи следећи резултат.

Теорема 3.4. *Нека је n фиксиран позитиван цео број и нека је $w(x)$ парна тежинска функција на интервалу $(-\pi,\pi)$. Тада важе следеће једнакости*

$$\big(C_{n,1/2}(x),C_{k,1/2}(x)\big)_{u_3}=0\quad \text{и}\quad \big(S_{n,1/2}(x),S_{k,1/2}(x)\big)_{u_4}=0,$$

за свако $k=0,1,\ldots,n-1$.

Доказ. Лако се проверава да важи тригонометријска једнакост

$$\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right)=T_k(x)\sqrt{\frac{1+x}{2}}-\sqrt{1-x^2}\cdot U_{k-1}(x)\sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

Полазећи од полинома $B^C_{k,1/2}$, одавде имамо

$$B^C_{k,1/2}(\arccos x) = \sum_{j=0}^{k} p^{(k)}_{j,1/2} \cos\left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos x = \sqrt{\frac{1+x}{2}}\, C_{k,1/2}(x), \tag{90}$$

односно важи $B^C_{k,1/2}(\arccos x)/\sqrt{1+x} = C_{k,1/2}(x)/\sqrt{2}$. Користећи ове једнакости, услове ортогоналности полинома $B^C_{k,1/2}(x)$, лему 3.3 и лему 2.6, за свако $k = 0,1,\ldots,n-1$, добијамо:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(B^C_{n,1/2}(x), B^C_{k,1/2}(x)\right)_w = \left(2\widehat{I} - \widehat{G}_{2n+1}\right)\left(B^C_{n,1/2}(x)\cdot B^C_{k,1/2}(x)\right)\\
&= 4\int_0^{\pi} B^C_{n,1/2}(x)B^C_{k,1/2}(x)w(x)\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{2n}\omega_j B^C_{n,1/2}(x_j)B^C_{k,1/2}(x_j)\\
&= 4\int_{-1}^{1}\frac{B^C_{n,1/2}(\arccos t)}{\sqrt{1+t}}\cdot\frac{B^C_{k,1/2}(\arccos t)}{\sqrt{1+t}}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,w(\arccos t)\mathrm{d}t\\
&\quad - 2\sum_{j=1}^{n}\sigma^{(3)}_j \frac{B^C_{n,1/2}\left(\arccos\tau^{(3)}_j\right)}{\sqrt{1+\tau^{(3)}_j}}\cdot\frac{B^C_{k,1/2}\left(\arccos\tau^{(3)}_j\right)}{\sqrt{1+\tau^{(3)}_j}}\\
&= 2\int_{-1}^{1} C_{n,1/2}(t)C_{k,1/2}(t)u_3(t)\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{n}\sigma^{(3)}_j C_{n,1/2}\left(\tau^{(3)}_j\right)C_{k,1/2}\left(\tau^{(3)}_j\right)\\
&= (2I - G_n)\left(C_{n,1/2}(x)\cdot C_{k,1/2}(x)\right) = \left(C_{n,1/2}(x), C_{k,1/2}(x)\right)_{u_3},
\end{aligned}$$

тј. $\left(C_{n,1/2}(x), C_{k,1/2}(x)\right)_{u_3} = 0$.

За доказивање другог дела тврђења користимо тригонометријску једнакост

$$\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right) = \sqrt{1-x^2}\,U_{k-1}(x)\sqrt{\frac{1+x}{2}} + T_k(x)\sqrt{\frac{1-x}{2}},$$

на основу које је

$$\begin{aligned}
B^S_{k,1/2}(\arccos x) &= \sum_{j=0}^{k} s^{(k)}_{j,1/2}\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right)\\
&= \sqrt{\frac{1-x}{2}}\, S_{n,1/2}(x),
\end{aligned}\tag{91}$$

односно $B^S_{k,1/2}(\arccos x)/\sqrt{1-x} = S_{k,1/2}(x)/\sqrt{2}$. Сада, користећи ове једнакости, услове ортогоналности полинома $B^S_{k,1/2}(x)$, тврђење лема 3.3 и 2.7, имамо да за свако $k = 0,1,\ldots,n-1$ важи:

$$0 = \left(B^S_{n,1/2}(x), B^S_{k,1/2}(x)\right)_w = \left(S_{n,1/2}(x), S_{k,1/2}(x)\right)_{u_4},$$

што је и требало доказати. □

Ако у једнакости (87) ставимо $x := \arccos x$ и искористимо једнакост (90), а затим обе стране добијене једнакости поделимо са $\sqrt{(1+x)/2}$, добијамо трочлану рекурентну релацију коју задовољавају алгебарски полиноми $C_{k,1/2}(x)$:

$$C_{n+1,1/2}(x) = \left(2x - a^{(1)}_{n+1,1/2}\right) C_{n,1/2}(x) - a^{(2)}_{n+1,1/2} C_{n-1,1/2}(x), \tag{92}$$

уз услове $a^{(2)}_{1,1/2} = 0$, $C_{0,1/2}(x) = 1$.

Сада можемо извести везе између одговарајућих чворова и тежинских коефицијената анти-GAUSS-ових квадратурних формула конструисаних на простору алгебарских полинома и анти-GAUSS-ових квадратурних формула које конструишемо за тригонометријске полиноме.

ЛЕМА 3.6. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi,\pi)$ и нека су τ_k и σ_k, $k = 1,\dots,n{+}1$, чворови и тежински коефицијенти анти-*GAUSS*-ове квадратурне формуле са $n+1$ чвором, конструисане на простору алгебарских полинома у односу на тежинску функцију*

$$u_3(x) = w(\arccos x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x \in (-1,1).$$

*Тада се тежински коефицијенти $\widehat{\omega}_k$ и чворови $\widehat{x}_k$, $k = 0,1,\dots,2n+2$, анти-*GAUSS*-ове квадратурне формуле са $2n{+}3$ чвора, конструисане у односу на тежинску функцију w, могу одредити помоћу следећих формула:*

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}_k &= \widehat{\omega}_{2n+2-k-1} = \frac{\sigma_{k+1}}{1+\tau_{k+1}}, && k = 0,1,\dots,n,\\
\widehat{x}_k &= -\widehat{x}_{2n+2-k-1} = -\arccos\tau_{k+1}, && k = 0,1,\dots,n,\\
\widehat{\omega}_{2n+2} &= \int_{-\pi}^{\pi} w(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{2n+1}\widehat{\omega}_k, && \widehat{x}_{2n+2} = \pi.
\end{aligned}$$

Доказ. Користећи трочлану рекурентну релацију (92) једноставно можемо конструисати низ полинома $\left\{C_{k,1/2}(x)\right\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, а затим применом QR-алгоритма одредити нуле алгебарског полинома $C_{n+1,1/2}(x)$, односно чворове τ_k, $k = 1,\dots,n+1$. На основу једнакости (90) лако је приметити да важи $\widehat{x}_k = -\widehat{x}_{2n+2-k-1} = -\arccos\tau_{k+1}$, $k = 0,1,\dots,n$, чиме су одређена прва $2n+2$ чвора анти-GAUSS-ове квадратуре коју конструишемо на простору тригонометријских полинома. Преостали чвор $\widehat{x}_{2n+2}$ биће једнак π, на основу тврђења леме 3.3.

Пређимо сада на израчунавање тежинских коефицијената. Као у случају квадратурних формула са парним бројем чворова, и овде се позивамо на коришћење SHOHAT-ове формуле, која се може наћи у радовима [59], [42]. Дакле, за све индексе $k = 1,\dots,n+1$ важи:

$$\sigma_k = \mu_0\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{C_{j,1/2}(\tau_k)}{\prod\limits_{i=2}^{j} a^{(2)}_{i,1/2}}\right)^2\right]^{-1} = \frac{\mu_0(1+\tau_k)}{2\sum\limits_{j=0}^{n}\left(\frac{B^C_{j,1/2}(\widehat{x}_{2n+2-k})}{\prod\limits_{i=2}^{j} a^{(2)}_{i,1/2}}\right)^2},$$

где је

$$\mu_0=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,w(\arccos x)\mathrm{d}x.$$

Како је функција $w(x)$ парна на интервалу $(-\pi,\pi)$, то ће бити

$$\widehat{\omega}_{2n+2-k-1}=\frac{\widehat{\mu}_0}{2\sum\limits_{j=0}^{n}\left(\frac{B^C_{j,1/2}(\widehat{x}_{2n+2-k-1})}{\prod\limits_{i=2}^{j}a^{(2)}_{i,1/2}}\right)^2},\quad k=0,1,\dots,n,$$

при чему је

$$\widehat{\mu}_0=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,w(x)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}\frac{1+t}{2}\,w(\arccos t)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\mu_0.$$

Одавде добијамо:

$$\widehat{\omega}_{2n+2-k-1}=\widehat{\omega}_k=\frac{\sigma_{k+1}}{1+\tau_{k+1}},\quad k=0,1,\dots,n.$$

Коначно, користећи једнакост $\sum\limits_{k=0}^{2n+2}\widehat{\omega}_k=\int\limits_{-\pi}^{\pi}w(x)\mathrm{d}x$, одређујемо последњи тежински коефицијент

$$\widehat{\omega}_{2n+2}=\int_{-\pi}^{\pi}w(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{2n+1}\widehat{\omega}_k,$$

чиме је доказ завршен. □

Наредна лема се може доказати на сличан начин, користећи полиноме $B^S_{j,1/2}(x)$, релацију (91) и једнакост $\widehat{\mu}_0=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}\,w(x)\mathrm{d}x$.

Лема 3.7. *Нека је w парна тежинска функција на интервалу $(-\pi,\pi)$ и нека су τ_k и σ_k, $k=1,\dots,n+1$, чворови и тежински коефицијенти анти-*Gauss*-ове квадратурне формуле са $n+1$ чвором, конструисане на простору алгебарских полинома у односу на тежинску функцију*

$$u_4(x)=w(\arccos x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\quad x\in(-1,1).$$

*Тада се тежински коефицијенти $\widehat{\omega}_k$ и чворови $\widehat{x}_k$, $k=0,1,\dots,2n+2$, анти-*Gauss*-ове квадратурне формуле са $2n+3$ чвора, конструисане у односу на тежинску функцију w, могу одредити на следећи начин:*

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}_k&=\widehat{\omega}_{2n+2-k}=\frac{\sigma_{k+1}}{1-\tau_{k+1}}, && k=0,1,\dots,n,\\
\widehat{x}_k&=-\widehat{x}_{2n+2-k}=-\arccos\tau_{k+1}, && k=0,1,\dots,n,\\
\widehat{\omega}_{n+1}&=\int_{-\pi}^{\pi}w(x)\mathrm{d}x-\sum_{\substack{k=0\\k\neq n+1}}^{2n+2}\widehat{\omega}_k, && \widehat{x}_{n+1}=0.
\end{aligned}$$

У претходним лемама смо извели једноставне начине за одређивање параметара анти-Gauss-ових квадратурних формула за тригонометријске полиноме. Сада, када имамо конструисане Gauss-ове квадратурне формуле $\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$ и анти-Gauss-ове квадратурне формуле $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$, можемо увести такозване *усредњене* Gauss-*ове квадратурне формуле* на простору тригонометријских полинома:

$$\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f = \frac{1}{2}\left(\widehat{G}_{\widetilde{n}+1} + \widehat{H}_{\widetilde{n}+3}\right)f.$$

Ове формуле ће имати тачност $\widetilde{n}+2$, односно једнакост $\widetilde{I}f = \widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$ ће бити испуњена за све $f \in \mathcal{T}_{\widetilde{n}+2}$.

3.4 Нумерички примери

У овом поглављу наводимо два примера за простор тригонометријских полинома у којима ће бити представљени резултати примене квадратурних формула са парним, односно непарним бројем чворова, редом, наводећи грешке које дају Gauss-ове, анти-Gauss-ове и усредњене квадратурне формуле. Сва израчунавања извршена су коришћењем програмског пакета Mathematica, у оквиру кога је за одређивање чворова и тежинских коефицијената полазних квадратурних формула укључен пакет Orthogonal Polynomials (за више детаља видети [12]).

Пример 3.1. *Посматрајмо тежинску функцију* $w(x) = 1 - \cos^2 x$, *за* $x \in (-\pi, \pi)$, *и одговарајућу функцију*

$$u_1 = \frac{w(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}, \qquad \text{за } x \in (-1,1).$$

У табели 1 представљене су вредности грешака које настају применом квадратурних формула $\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}$, $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}$ *и* $\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}$, *за* $\widetilde{n}+1 = 20, 40, 60, 80$, *при чему је интегранд функција* $f(x) = (1+\cos x)(\mathrm{e}^{-x} + 4/3)$.

Табела 1: Грешке у Gauss-овој ($\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}$), анти-Gauss-овој ($\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}$) и усредњеној ($\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}$) квадратурној формули за $w(x) = 1-\cos^2 x$, $x \in (-\pi,\pi)$ и $f(x) = (1+\cos x)(\mathrm{e}^{-x}+4/3)$

$\widetilde{n}+1$	$\widetilde{I}f - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$	$\widetilde{I}f - \widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$	$\widetilde{I}f - \widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$
80	$-9.30463 \cdot 10^{-9}$	$8.99386 \cdot 10^{-9}$	$-1.55389 \cdot 10^{-10}$
60	$-4.97942 \cdot 10^{-8}$	$4.82213 \cdot 10^{-8}$	$-7.86464 \cdot 10^{-10}$
40	$-5.16734 \cdot 10^{-7}$	$5.00653 \cdot 10^{-7}$	$-8.04024 \cdot 10^{-9}$
20	-0.0000254069	0.0000246255	$-3.90685 \cdot 10^{-7}$

Пример 3.2. *У овом примеру изаберимо тежинску функцију* $w(x) = 1 + \cos x$, *за* $x \in (-\pi,\pi)$, *и њој одговарајућу функцију*

$$u_4(x) = w(\arccos x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{1-x^2}, \qquad \text{за } x \in (-1,1).$$

Нека је интегранд поново функција $f(x) = (1+\cos x)(\mathrm{e}^{-x}+4/3)$. *Резултати примене квадратурних формула* $\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}$, $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}$ *и* $\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}$, *за* $\widetilde{n}+1 = 21, 41, 61, 81$, *дати су у табели 2.*

Табела 2: Грешке у GAUSS-овој ($\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}$), анти-GAUSS-овој ($\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}$) и усредњеној ($\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}$) квадратурној формули за $w(x) = 1+\cos x$, $x \in (-\pi, \pi)$ и $f(x) = (1+\cos x)(\mathrm{e}^{-x} + 4/3)$

$\widetilde{n}+1$	$\widehat{I}f - \widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$	$\widehat{I}f - \widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$	$\widehat{I}f - \widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$
81	$-4.63804 \cdot 10^{-9}$	$4.49229 \cdot 10^{-9}$	$-7.28786 \cdot 10^{-11}$
61	$-2.48222 \cdot 10^{-8}$	$2.40457 \cdot 10^{-8}$	$-3.88281 \cdot 10^{-10}$
41	$-2.56852 \cdot 10^{-7}$	$2.48826 \cdot 10^{-7}$	$-4.01318 \cdot 10^{-9}$
21	-0.0000124339	0.0000120453	$-1.94297 \cdot 10^{-7}$

На крају овог поглавља дајемо поређење нашег метода са другим постојећим методама. Наиме, KIM и REICHEL су у раду [31] увели анти-SZEGŐ-ве квадратурне формуле које карактерише особина да је грешка настала применом ове квадратурне формуле на LAURENT-ове полиноме степена не већег од n једнака производу негативне константе и грешке добијене применом SZEGŐ-ве квадратурне формуле са n чворова. Користећи SZEGŐ-ве и анти-SZEGŐ-ве квадратуре, JAGELS, REICHEL и TANG су у раду [30] дефинисали уопштене усредњене SZEGŐ-ве квадратурне формуле које су тачне за све LAURENT-ове полиноме простора $\Lambda_{-n+1,n-1}$.

Чворови уопштене усредњене SZEGŐ-ве квадратурне формуле се одређују као сопствене вредности унитарне горње HESSENBERG-ове матрице $\breve{H}_{2n-2}(\tau)$, димензије $(2n-2)\times(2n-2)$, која је одређена параметром τ са јединичне кружнице и такозваним SCHUR-овим параметрима $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. Тежински коефицијенти се тада могу израчунати као квадрати првих компоненти одговарајућих јединичних сопствених вектора (видети [30], [31]). Горња HESSENBERG-ова матрица $\breve{H}_{2n-2}(\tau)$ може бити представљена у облику $\breve{H}_{2n-2}(\tau) = \widehat{D}_{2n-2}^{-1/2}\widehat{H}_{2n-2}(\tau)\widehat{D}_{2n-2}^{1/2}$, где је

$$
\widehat{H}_{2n-2}(\tau) = \begin{bmatrix} -\bar{\gamma}_0\gamma_1 & -\bar{\gamma}_0\gamma_2 & \cdots & -\bar{\gamma}_0\gamma_{n-1} & -\bar{\gamma}_0\gamma_{n-2} & \cdots & -\bar{\gamma}_0\gamma_1 & -\bar{\gamma}_0\tau \\ 1-|\gamma_1|^2 & -\bar{\gamma}_1\gamma_2 & \cdots & -\bar{\gamma}_1\gamma_{n-1} & -\bar{\gamma}_1\gamma_{n-2} & \cdots & -\bar{\gamma}_1\gamma_1 & -\bar{\gamma}_1\tau \\ 0 & 1-|\gamma_2|^2 & \cdots & -\bar{\gamma}_2\gamma_{n-1} & -\bar{\gamma}_2\gamma_{n-2} & \cdots & -\bar{\gamma}_2\gamma_1 & -\bar{\gamma}_2\tau \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 1-|\gamma_1|^2 & -\bar{\gamma}_1\tau \end{bmatrix},
$$

као и $\gamma_0 = 1$, $\widehat{D}_{2n-2} = \operatorname{diag}[\widehat{\delta}_0, \widehat{\delta}_1, \ldots, \widehat{\delta}_{2n-3}]$, $\widehat{\delta}_0 = 1$, $\widehat{\delta}_j = \widehat{\delta}_{j-1}(1-|\widehat{\gamma}_j|^2)$, $j = 1, \ldots, 2n-3$, $\widehat{\gamma}_j = \gamma_j$, $j = 1, \ldots, n-1$ и $\widehat{\gamma}_j = \gamma_{2n-2-j}$, $j = n, \ldots, 2n-3$. Постоји неколико алгоритама за декомпозицију оваквих матрица (видети [27], [26], [25]). Израчунавање сопственог система може се извести веома ефикасно коришћењем компактне репрезентације HESSENBERG-ове матрице (видети нпр. [27], [25]).

За разлику од наведеног метода, наш метод користи рекурентне релације за одређивање потребних ортогоналних система како би се избегла нумеричка нестабилност која је карактеристична за GRAM-SCHMIDT-ов поступак. Такође, рекурентне релације обезбеђују стабилан начин за израчунавање вредности тригонометријских полинома у односу на коришћење проширених форми. Демонстрирали смо како се у случају симетричне тежинске функције могу конструисати анти-GAUSS-ове квадратурне формуле, служећи се ортогоналним полиномима реалне праве.

Користећи усредњене GAUSS-ове квадратурне формуле за тригонометријске полиноме, које смо увели у претходним поглављима, успели смо да постигнемо много већу тачност у поређењу са усредњеним SZEGŐ-вим квадратурама на класи симетричних тежинских функција, коју ћемо демонстрирати у наредном примеру. Такође, увођењем анти-GAUSS-ових квадратурних формула са непарним бројем чворова (случај $\gamma = 1/2$) постигли смо тачност за тригонометријске полиноме већег степена, тачније за све тригонометријске полиноме $t \in \mathcal{T}_{2n+2}$. У наставку наводимо пример који је дат у раду [30], уз поређење са резултатима добијеним применом наших метода.

ПРИМЕР 3.3. *Посматрајмо тежинску функцију* $w(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ *на* $(-\pi, \pi)$ *и интегранд* $f(x) = \frac{1}{2}\log(5 + 4\cos x)$. *У табели 3 представљене су грешке настале применом* SZEGŐ-*ве* $S_1^n(f)$, *анти*-SZEGŐ-*ве* $A_1^n(f)$, *уопштене усредњене* SZEGŐ-*ве квадратурне формуле* $\widehat{S}_1^{(2n-2)}(f)$, *као и* GAUSS-*ове* $\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$, *анти*-GAUSS-*ове* $\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$ *и усредњене* GAUSS-*ове квадратуре* $\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$, *уз услов* $\widetilde{n} + 1 = n$. *Можемо приметити да су грешке које настају применом* GAUSS-*ових и* SZEGŐ-*вих, односно анти*-GAUSS-*ових и анти*-SZEGŐ-*вих квадратура, приближне. Међутим, очигледно је да усредњене* GAUSS-*ове квадратуре за тригонометријске полиноме дају значајно побољшање у односу на уопштене усредњене* SZEGŐ-*ве квадратуре, које су представљале најбоље резултате у раду [30]. То побољшање је значајније са порастом броја чворова. Такође, можемо приметити да у наведеном примеру квадратурне формуле са парним бројем чворова доводе до већег побољшања резултата него квадратурне формуле са непарним бројем чворова.*

Табела 3: Грешке у SZEGŐ-вој ($S_1^n(f)$), анти-SZEGŐ-вој ($A_1^n(f)$), уопштеној усредњеној SZEGŐ-вој ($\widehat{S}_1^{(2n-2)}(f)$), GAUSS-овој ($\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$), анти-GAUSS-овој ($\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$) и усредњеној GAUSS-овој ($\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$) квадратурној формули за $w(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in (-\pi, \pi)$, и $f(x) = \frac{1}{2}\log(5 + 4\cos x)$

Правило	$n = 12$	$n = 15$	$n = 18$
$S_1^n(f)$	$-2.2 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$-2.3 \cdot 10^{-7}$
$A_1^n(f)$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$-2.3 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$
$\widehat{S}_1^{(2n-2)}(f)$	$-1.5 \cdot 10^{-7}$	$9.2 \cdot 10^{-9}$	$-6.7 \cdot 10^{-10}$
$\widehat{G}_{\widetilde{n}+1}f$	$-1.98 \cdot 10^{-5}$	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{-7}$
$\widehat{H}_{\widetilde{n}+3}f$	$1.98 \cdot 10^{-5}$	$-1.38 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$
$\widehat{A}_{2\widetilde{n}+4}f$	$-5.31 \cdot 10^{-10}$	$1.04 \cdot 10^{-10}$	$-8.75 \cdot 10^{-14}$

4 Скуп анти-Gauss-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу

У претходним поглављима смо видели значај ортогоналних полинома у области Нумеричке интеграције. Током двадесетог века научници су се бавили изучавањем карактеристика различитих врста ортогоналних полинома. Убрзо се јавило интересовање о проширењу појма ортогоналних полинома познато као вишеструко ортогонални полиноми. Овај појам потиче од симултане рационалне апроксимације, посебно од Hermite-Padé-ове апроксимације система r функција, па отуда вуче своје корене из деветнаестог века. Радови и књиге у којима су обрађивани појмови вишеструко ортогоналних полинома и Hermite-Padé-ова апроксимација су [3], [5], [19], [28], [36], [39], [44], [45], [50], [54], [60], [61], [62], [71], [73], [74], [75],...

Вишеструко ортогонални полиноми представљају генерализацију ортогоналних полинома у том смислу да они задовољавају $r \in \mathbb{N}$ услова ортогоналности. Нека је $r \geqslant 1$ цео број и нека су са $w_1, \ldots, w_r$ означене тежинске функције на реалној правој, такве да је носач сваке функције w_k подскуп неког интервала E_k. Вектор $\overrightarrow{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ назива се *мулти-индекс* дужине $|\overrightarrow{n}| = n_1 + \cdots + n_r$, где су $n_1, \ldots, n_r$ ненегативни цели бројеви.

Уведимо парцијално уређење над мулти-индексима на следећи начин: за мулти-индексе $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ и $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ кажемо да важи $\overrightarrow{m} \leqslant \overrightarrow{n}$ кадгод је $m_k \leqslant n_k$, за свако $k = 1, \ldots, r$.

Постоје два типа вишеструко ортогоналних полинома (видети [75]).

- *Вишеструко ортогонални полином типа I* представља вектор $(A_{\overrightarrow{n},1}, \ldots, A_{\overrightarrow{n},r})$ такав да је $A_{\overrightarrow{n},k}$ полином степена $n_k - 1$, за свако $k = 1, \ldots, r$, и важе услови ортогоналности

$$\sum_{k=1}^{r} \int_{E_k} A_{\overrightarrow{n},k} x^j w_k(x) \mathrm{d}x = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, |\overrightarrow{n}| - 2, \tag{93}$$

уз нормализацију

$$\sum_{k=1}^{r} \int_{E_k} A_{\overrightarrow{n},k}(x) x^{|\overrightarrow{n}|-1} w_k(x) \mathrm{d}x = 1. \tag{94}$$

Сваки полином $A_{\overrightarrow{n},k}$ има n_k коефицијената. Вишеструко ортогонални полином типа I је комплетно одређен ако се свих $|\overrightarrow{n}|$ непознатих коефицијената може одредити. Како услови ортогоналности (93) формирају систем од $|\overrightarrow{n}| - 1$ хомогене линеарне једначине, то се вишеструко ортогонални полином типа I може јединствено одредити до на мултипликативну константу уколико је матрица тог система регуларна.

- *Вишеструко ортогонални полином типа II* је моничан полином $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}$ степена $|\overrightarrow{n}|$, који задовољава услове ортогоналности

$$\int_{E_k} \widehat{P}_{\overrightarrow{n}} x^j w_k(x) \mathrm{d}x = 0, \quad \text{за } j = 0, 1, \ldots, n_k - 1;\ k = 1, \ldots, r. \tag{95}$$

Ови услови дају $|\overrightarrow{n}|$ линеарних једначина за одређивање $|\overrightarrow{n}|$ непознатих коефицијената моничног полинома $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}(x)$. Ако је полином $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}$ јединствено одређен, за мулти-индекс $\overrightarrow{n}$ кажемо да је *нормалан*. Уколико су сви мулти-индекси нормални, имамо *савршен систем*.

У оба случаја за $r = 1$ вишеструко ортогонални полиноми се своде на обичне ортогоналне полиноме. У наставку, наша пажња ће бити усмерена на вишеструко ортогоналне полиноме типа II.

Јединственост вишеструко ортогоналних полинома се може гарантовати једино постављањем додатних претпоставки за посматраних r тежинских функција. Постоје два случаја за које су вишеструко ортогонални полиноми типа II дефинисани (видети [75]).

1. Angelesco *систем* представља систем тежинских функција којима су сви носачи E_k међусобно дисјунктни, тј. за које је $E_i \cap E_j = \emptyset$ за $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$.

2. *AT систем* је систем тежинских функција таквих да све имају исти носач E и да следећих $|\overrightarrow{n}|$ функција

$$w_1(x), \ldots, x^{n_1-1}w_1(x), \ldots, w_r(x), \ldots, x^{n_r-1}w_r(x)$$

   формирају Chebyshev-љев систем на E за сваки мулти-индекс $\overrightarrow{n}$.

Докази следећих теорема објављени су у радовима [75] и [28].

Теорема 4.1. *Вишеструко ортогонални полином типа II $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}(x)$, у односу на* Angelesco *систем тежинских функција, може се представити као производ r полинома $\prod_{k=1}^{r}\widehat{p}_{n_k}(x)$, при чему сваки од полинома $\widehat{p}_{n_k}$ има тачно n_k нула на E_k.*

Доказ. Претпоставимо да полином $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}(x)$ има $m_k < n_k$ промена знака на интервалу E_k и нека су оне у тачкама $x_1, \ldots, x_{m_k}$. Означимо са $Q_{m_k}(x)$ полином чије су нуле управо ове тачке, тј. нека је

$$Q_{m_k}(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{m_k}).$$

Тада полином $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}(x)Q_{m_k}(x)$ не мења знак на интервалу E_k, па важи

$$\int_{E_k} \widehat{P}_{\overrightarrow{n}}(x)Q_{m_k}(x)w_k(x)\mathrm{d}x \neq 0.$$

С друге стране, на основу услова ортогоналности (95) интеграл на левој страни последњег израза ће имати вредност нула, па долазимо до контрадикције. Дакле, полином $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}(x)$ има најмање n_k нула на интервалу E_k. Како су интервали E_k, $k = 1, \ldots, r$, међусобно дисјунктни, то закључујемо да полином $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}(x)$ има најмање $|\overrightarrow{n}|$ нула на реалној правој, а како је степен овог полинома једнак $|\overrightarrow{n}|$, то ће број нула на интервалу E_k бити тачно n_k. $\square$

Теорема 4.2. *Вишеструко ортогонални полином типа II $\widehat{P}_{\overrightarrow{n}}(x)$, у односу на AT систем тежинских функција, има тачно $|\overrightarrow{n}|$ нула на E. За вишеструко ортогонални полином типа I, у односу на AT систем тежинских функција, линеарна комбинација $\sum_{k=1}^{r} A_{\overrightarrow{n},k}(x)w_k(x)$ има тачно $|\overrightarrow{n}| - 1$ нулу на E.*

Доказ. Покажимо најпре први део тврђења. Претпоставимо да $\widehat{P}_{\vec{n}}(x)$ има $m < |\vec{n}|$ промена знака на E и нека су оне у тачкама $x_1, \ldots, x_m$. Посматрајмо мулти-индекс $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_r)$, дужине $|\vec{m}|$, такав да је $m_i \leqslant n_i$, за свако $i = 1, \ldots, r$, и да постоји индекс k за који је $m_k < n_k$. Тада можемо конструисати функцију

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i(x) w_i(x),$$

такву да је $p_i(x)$ полином степена $m_i - 1$, за свако $i \neq k$, а $p_k(x)$ полином степена m_k, као и да она задовољава интерполационе услове $Q(x_j) = 0$, за $j = 1, \ldots, m$, и $Q(x_0) = 1$, за неку тачку $x_0 \in E$. Овај интерполациони проблем има јединствено решење јер посматрани систем тежинских функција чини Chebyshev-љев систем. Функција $Q(x)$ очигледно има m нула, а како је посматрани систем Chebyshev-љев, то она не може имати додатних промена знака. Штавише, услов $Q(x_0) = 1$ обезбеђује да функција не буде идентички једнака нули. Како сада функција $\widehat{P}_{\vec{n}}(x) Q(x)$ не мења знак на E, то важи

$$\int_E \widehat{P}_{\vec{n}}(x) Q(x) \mathrm{d}x \neq 0.$$

Међутим, ово је у контрадикцији са условима ортогоналности (95), које вишеструко ортогонални полином типа II $\widehat{P}_{\vec{n}}(x)$ задовољава. Тиме долазимо до закључка да полином $\widehat{P}_{\vec{n}}(x)$ има тачно $\vec{n}$ нула на E, чиме је први део тврђења доказан.

Други део доказа спроводи се на сличан начин. Најпре нагласимо да функција

$$A(x) = \sum_{k=1}^{r} A_{\vec{n},k}(x) w_k(x)$$

може имати највише $|\vec{n}| - 1$ нулу на E јер посматрамо Chebyshev-љев систем. Претпоставимо да ова функција има $m < |\vec{n}| - 1$ промена знака у тачкама $x_1, \ldots, x_m$. Ако са $Q_m(x)$ означимо полином

$$Q_m(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m),$$

онда функција $A(x) Q_m(x)$ не мења знак на E, па важи

$$\int_E A(x) Q_m(x) \mathrm{d}x \neq 0.$$

Ово сада доводи до контрадикције са ортогоналношћу вишеструко ортогоналног полинома типа I, па отуда закључујемо да $A(x)$ има тачно $|\vec{n}| - 1$ нулу на E. □

Добро је познато да алгебарски ортогонални полиноми задовољавају трочлану рекурентну релацију, о чему је било речи раније (видети [8], [23], [33]). У случају вишеструко ортогоналних полинома постоји доста могућих рекурентних релација, с обзиром да радимо са мулти-индексима. Међутим, једна од значајних рекурентних релација реда $r + 1$ је задовољена од стране вишеструко ортогоналних полинома типа II са скоро дијагоналним мулти-индексима. Нека је m природан број облика

$m = lr + j$, где је $l = \left[\frac{m}{r}\right]$ и $0 \leqslant j < r$. *Скоро дијагонални мулти-индекс* $\overrightarrow{s}(m)$, који одговара броју m, дат је са

$$\overrightarrow{s}(m) = (\underbrace{l+1, \ldots, l+1}_{j \text{ пута}}, \underbrace{l, \ldots, l}_{r-j \text{ пута}}).$$

Ради краћег записа означимо одговарајуће вишеструко ортогоналне полиноме типа II са $\widehat{P}_m = \widehat{P}_{\overrightarrow{s}(m)}$, $m \in \mathbb{N}_0$, и уведимо скраћеницу В.О.П. за назив вишеструко ортогонални полином, коју ћемо у наставку користити. Важи следећа теорема (за доказ видети [74]).

Теорема 4.3. *В.О.П. типа II, са скоро дијагоналним мулти-индексима, задовољавају рекурентну релацију*

$$x\widehat{P}_m(x) = \widehat{P}_{m+1}(x) + \sum_{i=0}^{r} \widehat{a}_{m,r-i}\widehat{P}_{m-i}(x), \quad m \geqslant 0, \tag{96}$$

уз почетне услове $\widehat{P}_0(x) = 1$ *и* $\widehat{P}_i(x) = 0$, *за* $i = -1, \ldots, -r$.

Мотивисан проблемом који се јавља у компјутерској графици, Carlos Borges је у [4] испитивао апстрактнији проблем нумеричког израчунавања скупа r одређених интеграла узетих са r различитих тежинских функција, али повезаних заједничким интеграндом и истим интервалом интеграције. За решавање оваквог проблема није ефикасно користити скуп од r Gauss-Christoffel-ових квадратурних формула, јер захтева велики број израчунавања вредности интегранда.

Borges је у раду [4] увео тзв. *количник перформансе* на следећи начин:

$$R = \frac{\text{Укупан степен тачности} + 1}{\text{Број израчунавања вредности интегранда}}.$$

Користећи скуп од r Gauss-Christoffel-ових квадратурних формула, добили бисмо $R = 2/r$, а одатле и $R < 1$ за све $r > 2$.

Уколико изаберемо скуп од n различитих чворова, који ће бити исти у свим квадратурним формулама, онда се тежински коефицијенти за свако од r посматраних квадратурних правила могу изабрати тако да се постигне вредност $R = 1$. Како је избор чворова произвољан, квадратурна правила не морају бити најбоља могућа. Зато је циљ пронаћи оптимални скуп чворова симулирајући развој Gauss-Christoffel-ових квадратурних формула.

Означимо са $W = (w_1, \ldots, w_r)$ један AT систем тежинских функција. Наредном дефиницијом се уводи појам оптималног скупа квадратурних формула (видети [4, Definition 3], [44]).

Дефиниција 4.1. *Нека је* W *AT систем за мулти-индекс* $\overrightarrow{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ *и* $n = |\overrightarrow{n}|$. *Скуп квадратурних формула облика*

$$\int_E f(x)w_k(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \widehat{A}_{k,i} f(\widehat{x}_i), \quad k = 1, \ldots, r, \tag{97}$$

назива се оптималним скупом у односу на $(W, \overrightarrow{n})$ *ако и само ако чворови* $\widehat{x}_i$ *и тежински коефицијенти* $\widehat{A}_{k,i}$, $i = 1, \ldots, n$, *задовољавају следеће једначине:*

$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{A}_{k,i} = \int_E w_k(x)\mathrm{d}x,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \widehat{A}_{k,i}\widehat{x}_i^j = \int_E x^j w_k(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{за } j = 1, \ldots, n + n_k - 1,$$

за свако $k = 1, \ldots, r$.

Следећа теорема представља уопштење фундаменталне теореме за Gauss-Christoffel-ова квадратурна правила и доказана је од стране Миловановића и Станићеве у раду [44].

Теорема 4.4. *Нека је* W *AT систем,* $\overrightarrow{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ *и* $n = |\overrightarrow{n}|$. *Квадратурне формуле* (97) *чине оптимални скуп у односу на* $(W, \overrightarrow{n})$ *ако и само ако важи:*

(*i*) *оне су тачне за све полиноме степена мањег или једнаког* $n-1$;

(*ii*) *полином* $q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \widehat{x}_i)$ *је В.О.П. типа II* $\widehat{P}_n$ *у односу на* W.

Наша идеја је да конструишемо скуп анти-Gauss-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу. Наиме, желимо да формирамо скуп квадратурних формула које ће давати грешку исте величине али супротног знака у односу на грешку насталу применом одговарајуће квадратурне формуле из посматраног оптималног скупа. Резултати овог истраживања објављени су у раду [53]. Сам концепт анти-Gauss-ових квадратурних формула повезан са вишеструком ортогоналношћу, уз ограничење на дијагоналне мулти-индексе, први пут се појављује у раду [1]. Посматрани полиноми су коришћени за одређивање чворова квадратурних формула код којих су тежински коефицијенти унапред задати матрицама, а које се примењују на апроксимацију матричних функција.

4.1 Вишеструко ортогонални полиноми у односу на одређене билинеарне форме

Уз претпоставку да је $(w_1, \ldots, w_r)$ један AT систем састављен од r датих тежинских функција на реалној правој, са носачима на истом интервалу E, посматрајмо интеграле

$$I_k f = \int_E f(x) w_k(x)\mathrm{d}x.$$

Означимо квадратурне формуле из оптималног скупа квадратурних формула у Borges-овом смислу са

$$G_n^{(k)} f = \sum_{i=1}^{n} \widehat{A}_{k,i} f(\widehat{x}_i), \quad k = 1, \ldots, r.$$

Наш циљ је да конструишемо скуп анти-Gauss-ових квадратурних формула $H_{n+1}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, r$, које ће бити формуле са $n+1$ чвором, такве да задовољавају једнакост

$$I_k p - H_{n+1}^{(k)} p = -(I_k p - G_n^{(k)} p), \tag{98}$$

за све полиноме p степена мањег или једнаког n. Одавде лако видимо да је $H_{n+1}^{(k)}p = \left(2I_k - G_n^{(k)}\right)p$, што нас доводи до посматрања билинеарних форми

$$(f,g)_k = \left(2I_k - G_n^{(k)}\right)(fg), \quad k = 1,\dots,r. \tag{99}$$

Сада можемо дефинисати два типа вишеструко ортогоналних полинома у односу на билинеарне форме (99).

Дефиниција 4.2. *В.О.П. типа I у односу на билинеарне форме* (99) *је вектор полинома* $(B_{\vec{n},1},\dots,B_{\vec{n},r})$*, такав да је свако* $B_{\vec{n},k}$ *полином степена* n_k-1 *и важе следећи услови ортогоналности*

$$\sum_{k=1}^{r}\left(B_{\vec{n},k}, x^i\right)_k = 0, \quad i = 0,1,\dots,|\vec{n}|-2, \tag{100}$$

са нормализацијом

$$\sum_{k=1}^{r}\left(B_{\vec{n},k}, x^{|\vec{n}|-1}\right)_k = 1. \tag{101}$$

Сваки полином $B_{\vec{n},k}$ има n_k коефицијената, па је В.О.П. типа I комплетно одређен уколико можемо израчунати свих $|\vec{n}|$ непознатих коефицијената. Услови ортогоналности (100) и нормализација (101) дају $|\vec{n}|$ хомогених линеарних једначина за одређивање ових $|\vec{n}|$ коефицијената. Матрица овог линеарног система је облика

$$M_{\vec{n}} = \begin{bmatrix} M_{n_1}^{(1)} & M_{n_2}^{(2)} & \cdots & M_{n_r}^{(r)} \end{bmatrix}, \tag{102}$$

где су $M_{n_k}^{(k)}$ матрице момената облика

$$M_{n_k}^{(k)} = \begin{bmatrix} m_0^{(k)} & m_1^{(k)} & m_2^{(k)} & \cdots & m_{n_k-1}^{(k)} \\ m_1^{(k)} & m_2^{(k)} & m_3^{(k)} & \cdots & m_{n_k}^{(k)} \\ m_2^{(k)} & m_3^{(k)} & m_4(k) & \cdots & m_{n_k+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{|\vec{n}|-1}^{(k)} & m_{|\vec{n}|}^{(k)} & m_{|\vec{n}|+1}^{(k)} & \cdots & m_{|\vec{n}|+n_k-2}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Ако је матрица $M_{\vec{n}}$ пуног ранга, онда се овај вишеструко ортогонални полином може јединствено одредити до на мултипликативну константу.

Дефиниција 4.3. *В.О.П. типа II у односу на билинеарне форме* (99) *је монични полином* $P_{\vec{n}}$ *степена* $|\vec{n}|$ *који задовољава услове ортогоналности:*

$$\left(P_{\vec{n}}, x^i\right)_k = 0, \quad i = 0,1,\dots,n_k-1;\ k = 1,\dots,r. \tag{103}$$

Услови ортогоналности (103) формирају $|\vec{n}|$ линеарних једначина за одређивање $|\vec{n}|$ непознатих коефицијената моничног полинома $P_{\vec{n}}$. Матрица овог система линеарних једначина дата је са

$$M'_{\vec{n}} = M_{\vec{n}}^T = \begin{bmatrix} \left[M_{n_1}^{(1)}\right]^T \\ \left[M_{n_2}^{(2)}\right]^T \\ \vdots \\ \left[M_{n_r}^{(r)}\right]^T \end{bmatrix}, \tag{104}$$

па следи да је мулти-индекс нормалан за тип II ако је $\det M_{\vec{n}} \neq 0$.

В.О.П. типа I и типа II, у односу на билинеарне форме (99), задовољавају одређену биортогоналност, што ћемо показати у наредној теореми.

Теорема 4.5. *За В.О.П. типа I и типа II, у односу на билинеарне форме* (99)*, важи следећа биортогоналност:*

$$\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\vec{n}}, B_{\vec{m},k}\right)_k = \begin{cases} 0, & \text{ако је } \vec{m} \leqslant \vec{n}, \\ 0, & \text{ако је } |\vec{n}| \leqslant |\vec{m}| - 2, \\ 1, & \text{ако је } |\vec{n}| = |\vec{m}| - 1. \end{cases} \tag{105}$$

Доказ. Претпоставимо најпре да су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ мулти-индекси такви да је $\vec{m} \leqslant \vec{n}$. Тада је $m_k \leqslant n_k$, за свако $k = 1, 2, \ldots, r$. Како је $B_{\vec{m},k}$ полином степена $m_k - 1 \leqslant n_k - 1$, то из услова ортогоналности (103) важи $\left(P_{\vec{n}}, B_{\vec{m},k}\right)_k = 0$, за свако $k = 1, \ldots, r$, одакле сумирањем добијамо $\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\vec{n}}, B_{\vec{m},k}\right)_k = 0$, за $\vec{m} \leqslant \vec{n}$.

Уколико су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ мулти-индекси такви да важи $|\vec{n}| \leqslant |\vec{m}| - 2$, користећи услове ортогоналности (100) и чињеницу да је $P_{\vec{n}}$ полином степена $|\vec{n}|$, добијамо

$$\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\vec{n}}, B_{\vec{m},k}\right)_k = \sum_{k=1}^{r} \left(B_{\vec{m},k}, P_{\vec{n}}\right)_k = 0.$$

Коначно, ако за мулти-индексе $\vec{m}$ и $\vec{n}$ важи $|\vec{n}| = |\vec{m}| - 1$, онда је $P_{\vec{n}}$ монични полином степена $|\vec{m}| - 1$, па је

$$\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\vec{n}}, B_{\vec{m},k}\right)_k = \sum_{k=1}^{r} \left(x^{|\vec{m}|-1}, B_{\vec{m},k}\right)_k + \sum_{i=0}^{|\vec{m}|-2} \left(a_i \sum_{k=1}^{r} \left(x^i, B_{\vec{m},k}\right)_k\right) = 1,$$

на основу услова (100) и нормализације (101), чиме је доказ завршен. □

4.1.1 Рекурентне релације за В.О.П. са скоро дијагоналним мулти-индексима

У овом одељку ћемо посматрати скоро дијагоналне мулти-индексе. Означимо са $P_n = P_{\vec{n}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, одговарајуће вишеструко ортогоналне полиноме типа II у односу на билинеарне форме (99), где је $n = |\vec{n}|$. У овом одељку наводимо неке од резултата који се могу наћи у раду [1].

Теорема 4.6. *В.О.П. типа II са скоро дијагоналним мулти-индексима, који су ортогонални у односу на билинеарне форме* (99)*, задовољавају рекурентну релацију*

$$xP_m(x) = P_{m+1}(x) + \sum_{i=0}^{r} a_{m,r-i} P_{m-i}(x), \quad m \geqslant 0, \tag{106}$$

уз почетне услове $P_0(x) = 1$, $P_i(x) = 0$ за $i = -1, \ldots, -r$.

Доказ. Како је $P_m(x)$ монични полином степена m, то $xP_m(x)$ можемо записати у облику:

$$xP_m(x) = \sum_{i=0}^{m+1} a_i^{(m)} P_i(x), \quad a_{m+1}^{(m)} = 1. \tag{107}$$

Претпоставимо да је m облика $m = lr + j$ и покажимо да је коефицијент $a_{pr+q}^{(m)} = 0$ за $p = 0, 1, \ldots, l-2$ и $q = 0, 1, \ldots, r-1$, а када је $p = l-1$ и за $q = 0, 1, \ldots, j-1$. Доказ ћемо спровести математичком индукцијом.

Најпре посматрајмо случај $p = 0$. Користећи услове ортогоналности (103) и једнакост (107) имамо

$$(xP_m, 1)_1 = \left(\sum_{i=0}^{m+1} a_i^{(m)} P_i, 1\right)_1 = \sum_{i=0}^{m+1} a_i^{(m)} (P_i, 1)_1 = a_0^{(m)} (1, 1)_1.$$

На основу (103) важи $(xP_m, 1)_1 = 0$, кадгод је $m > r$. Одатле добијамо $a_0^{(m)} = 0$. Слично, користећи билинеарне форме $(xP_m, 1)_{i+1}$, лако се види да је и $a_i^{(m)} = 0$, за $i = 1, \ldots, r-1$.

Претпоставимо сада да је $a_{Lr+q}^{(m)} = 0$ за $L \leqslant p-1$ и $q = 0, 1, \ldots, r-1$, уз $p \leqslant l-2$, и покажимо да је тада и $a_{pr+q}^{(m)} = 0$, за $q = 0, 1, \ldots, r-1$. Поново, користећи услове ортогоналности (103) и једнакост (107) добијамо

$$(xP_m, x^p)_1 = \sum_{i=pr}^{m+1} a_i^{(m)} (P_i, x^p)_1 = a_{pr}^{(m)} (P_{pr}, x^p)_1 .$$

Како је $(xP_m, x^p)_1 = 0$, то закључујемо да је $a_{pr}^{(m)} = 0$. На сличан начин, можемо користити билинеарне форме $(xP_m, x^p)_{i+1}$ како бисмо показали да је $a_{pr+i}^{(m)} = 0$ за $i = 1, \ldots, r-1$.

Коначно, претпоставимо да је $p = l-1$. Користећи билинеарне форме $\left(xP_m, x^{l-1}\right)_{q+1}$, за $q = 0, 1, \ldots, j-1$, и услове ортогоналности (103) добијамо да је $a_{(l-1)r+q}^{(m)} = 0$ за $q = 0, 1, \ldots, j-1$.

Сада једнакост (107) постаје

$$xP_m(x) = \sum_{i=r(l-1)+j}^{m+1} a_i^{(m)} P_i(x) = \sum_{i=m-r}^{m+1} a_i^{(m)} P_i(x) = P_{m+1}(x) + \sum_{j=0}^{r} a_{m,r-j} P_{m-j}(x),$$

што је и требало доказати. □

Додељујући вредности $m = 0, 1, \ldots, n$ у рекурентној релацији (106) добијамо систем

$$\begin{aligned}
xP_0(x) &= a_{0,r}P_0(x) + P_1(x)\\
xP_1(x) &= a_{1,r-1}P_0(x) + a_{1,r}P_1(x) + P_2(x)\\
xP_2(x) &= a_{2,r-2}P_0(x) + a_{2,r-1}P_1(x) + a_{2,r}P_2(x) + P_3(x)\\
&\vdots\\
xP_n(x) &= a_{n,0}P_{n-r} + a_{n,1}P_{n-r+1}(x) + \cdots + a_{n,r}P_n(x) + P_{n+1}(x),
\end{aligned}$$

тј.

$$M_{n+1} \cdot \mathbf{P}_{n+1} = x \cdot \mathbf{P}_{n+1} - P_{n+1}(x) \cdot \mathbf{e}_{n+1}, \tag{108}$$

где је M_{n+1} нередукована Hessenberg-ова матрица реда $n+1$ облика

$$M_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{0,r} & 1 & & & & & & \\ a_{1,r-1} & a_{1,r} & 1 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ a_{r,0} & \cdots & a_{r,r-1} & a_{r,r} & 1 & & & \\ & a_{r+1,0} & \cdots & a_{r+1,r-1} & a_{r+1,r} & 1 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1,0} & \cdots & a_{n-1,r-1} & a_{n-1,r} & 1 \\ & & & & a_{n,0} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r} \end{bmatrix},$$

и

$$\mathbf{P}_{n+1} = \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{n+1} = [\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1\ ]^T.$$

Ако са x_i означимо нуле полинома $P_{n+1}(x)$, онда се систем (108) своди на проблем сопствених вредности: $x_i\mathbf{P}_{n+1}(x_i) = M_{n+1}\mathbf{P}_{n+1}(x_i)$. Одавде лако видимо да су тачке x_i сопствене вредности матрице M_{n+1}, а $\mathbf{P}_{n+1}(x_i)$ одговарајући сопствени вектори. Такође, лако се добија репрезентација В.О.П. типа II: $P_{n+1}(x) = \det(xI_{n+1} - M_{n+1})$, где смо са I_{n+1} означили јединичну матрицу реда $n+1$.

Локализација нула В.О.П. типа II $P_{n+1}(x)$ са скоро дијагоналним мулти-индексом, који је ортогоналан у односу на билинеарне форме (99) је и даље отворен проблем. На основу великог броја нумеричких експеримената формулисали смо хипотезу 4.1. У наставку наводимо неколико нумеричких примера који иду у прилог тврђењу хипотезе 4.1.

Пример 4.1. *Посматрајмо две тежинске функције* $w_1(x) = (1-x)^{-1/4}(1+x)$ *и* $w_2(x) = (1-x)^{-1/4}(1+x)^{-1/2}$ *на* $[-1,1]$. *Нуле одговарајућих В.О.П. типа II* $P_{(4,3)}(x)$ *и* $P_{(5,5)}(x)$ *ортогоналних у односу на билинеарне форме* (99) *приказане су у табели 4.*

Табела 4: Нуле одговарајућих В.О.П. типа II $P_{(4,3)}(x)$ и $P_{(5,5)}(x)$

Полином $P_{(4,3)}(x)$		
-1.0100124721	-0.1353974988	0.9919846932
-0.9165572832	0.3889490054	
-0.6103276133	0.8077498979	
Полином $P_{(5,5)}(x)$		
-1.0227541196	-0.3325783590	0.8974742560
-0.9799144371	$0.2144122126(-1)$	0.9903042895
-0.8584454779	0.3772745366	
-0.6375050595	0.6842186051	

Пример 4.2. *Посматрајмо две тежинске функције* $w_1(x) = (1-x)^{1/4}(1+x)^{1/3}$ *и* $w_2(x) = (1-x)(1+x)^{-1/2}$ *на* $[-1,1]$. *Нуле одговарајућих В.О.П. типа II* $P_{(4,4)}(x)$ *и* $P_{(8,7)}(x)$ *ортогоналних у односу на билинеарне форме* (99) *приказане су у табели 5.*

Табела 5: Нуле одговарајућих В.О.П. типа II $P_{(4,4)}(x)$ и $P_{(8,7)}(x)$

Полином $P_{(4,4)}(x)$		
-1.0004103097	-0.3267876272	0.8575382189
-0.9333345165	0.1268156947	0.9969132581
-0.7053216048	0.5524646395	
Полином $P_{(8,7)}(x)$		
-1.0225159264	-0.5150792798	0.6205171812
-0.9943723616	-0.2947895771	0.7864241771
-0.9469464441	$-0.5595209720(-1)$	0.9063623355
-0.8494104189	0.1863052567	0.9774010834
-0.7034058608	0.4165578974	1.0132933210

Пример 4.3. *Посматрајмо три тежинске функције* $w_1(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{1/3}$, $w_2(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{1/4}$ *и* $w_3(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)$ *на* $[-1,1]$. *Нуле одговарајућих В.О.П. типа II* $P_{(3,2,2)}(x)$ *и* $P_{(5,5,4)}(x)$ *ортогоналних у односу на билинеарне форме* (99) *приказане су у табели 6.*

Табела 6: Нуле одговарајућих В.О.П. типа II $P_{(3,2,2)}(x)$ и $P_{(5,5,4)}(x)$

Полином $P_{(3,2,2)}(x)$		
-1.0294522350	-0.2590348297	0.9505300654
-0.9307665589	0.2399576997	
-0.6782377807	0.6861526953	
Полином $P_{(5,5,4)}(x)$		
-1.0332207961	-0.6056447260	0.5809409654
-0.9954369264	-0.3967282671	0.7726731243
-0.9650839303	-0.1572290866	0.9100603085
-0.8927894073	$-0.9763496600(-1)$	0.9832600281
-0.7729332667	0.3499657997	

Хипотеза 4.1. *В.О.П. типа II* $P_{n+1}(x)$ *са скоро дијагоналним мулти-индексом, који је ортогоналан у односу на билинеарне форме* (99), *има* $n+1$ *просту нулу* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, *при чему је* $x_2, \ldots, x_n \in E$, *док* x_1 *и* x_{n+1} *могу бити изван интервала* E.

Израчунавање коефицијената рекурентне релације. У овом делу ћемо представити један ефикасан нумерички метод за конструкцију Hessenberg-ове матрице M_{n+1} дате у претходном поглављу. Користићемо неку врсту Stieltjes-ове процедуре (видети нпр. [22]), познате као дискретизована Stieltjes-Gautschi-јева процедура. Сличан начин конструисања рекурентних коефицијената користили су Миловановић и Станићева у раду [44]. Дакле, елементе матрице M_{n+1} ћемо представити помоћу вредности билинеарних форми (99), уз претпоставку да одговарајући вишеструко ортогонални полиноми типа II постоје.

Разматрајмо прво случај $r = 2$. Тада је мулти-индекс облика $\vec{s}(m) = (m_1, m_2)$, где је $m_1 + m_2 = m$ и $m_1 = \left[\frac{m+1}{2}\right]$, $m_2 = \left[\frac{m}{2}\right]$. Дакле, рекурентна релација (106) постаје

$$
\begin{aligned}
&P_{m+1}(x)=(x-a_{m,2})P_m(x)-a_{m,1}P_{m-1}(x)-a_{m,0}P_{m-2}(x),\\
&P_0(x)=1,\quad P_{-1}(x)=P_{-2}(x)=0.
\end{aligned}\tag{109}
$$

Из услова ортогоналности (103) важи

$$
\begin{aligned}
&(P_m,P_i)_1=0,\qquad \text{за } i\leqslant m_1-1=\left[\frac{m+1}{2}\right]-1=\left[\frac{m-1}{2}\right],\\
&(P_m,P_i)_2=0,\qquad \text{за } i\leqslant m_2-1=\left[\frac{m}{2}\right]-1=\left[\frac{m-2}{2}\right].
\end{aligned}\tag{110}
$$

- Постављајући вредност $m=0$ у (109), а потом примењујући билинеарну форму $(\cdot,\cdot)_1$, добијамо једнакост

$$
(P_1,P_0)_1=(xP_0,P_0)_1-a_{0,2}\,(P_0,P_0)_1\,.
$$

Одавде, због $(P_1,P_0)_1=0$, имамо

$$
a_{0,2}=\frac{(xP_0,P_0)_1}{(P_0,P_0)_1}.\tag{111}
$$

- У наредном кораку посматрајмо једнакост (109) за $m=1$. Ако на њу применимо билинеарну форму $(\cdot,\cdot)_1$, добијамо једнакост

$$
(P_2,P_0)_1=(xP_1,P_0)_1-a_{1,1}\,(P_0,P_0)_1-a_{1,2}\,(P_1,P_0)_1\,,
$$

одакле због $(P_1,P_0)_1=0$ и $(P_2,P_0)_1=0$ изводимо

$$
a_{1,1}=\frac{(xP_1,P_0)_1}{(P_0,P_0)_1}.\tag{112}
$$

Слично, применом билинеарне форме $(\cdot,\cdot)_2$, добијамо

$$
(P_2,P_0)_2=(xP_1-a_{1,1}P_0,P_0)_2-a_{1,2}\,(P_1,P_0)_2\,.
$$

Сада због $(P_2,P_0)_2=0$ имамо

$$
a_{1,2}=\frac{(xP_1-a_{1,1}P_0,P_0)_2}{(P_1,P_0)_2}.\tag{113}
$$

- Следећа вредност, $m=2$, замењена у релацији (109), након примене билинеарних форми $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$, даје једнакости

$$
\begin{aligned}
(P_3,P_0)_1&=(xP_2,P_0)_1-a_{2,0}\,(P_0,P_0)_1-a_{2,1}\,(P_1,P_0)_1-a_{2,2}\,(P_2,P_0)_1\,,\\
(P_3,P_0)_2&=(xP_2,P_0)_2-a_{2,0}\,(P_0,P_0)_2-a_{2,1}\,(P_1,P_0)_2-a_{2,2}\,(P_2,P_0)_2\,,\\
(P_3,P_1)_1&=(xP_2-a_{2,0}P_0-a_{2,1}P_1,P_1)_1-a_{2,2}\,(P_2,P_1)_1\,.
\end{aligned}
$$

Како важе једнакости $(P_3, P_0)_1 = 0$, $(P_3, P_0)_2 = 0$ и $(P_3, P_1)_1 = 0$, то одавде лако изводимо

$$a_{2,0} = \frac{(xP_2, P_0)_1}{(P_0, P_0)_1} \tag{114}$$

$$a_{2,1} = \frac{(xP_2 - a_{2,0}P_0, P_0)_2}{(P_1, P_0)_2} \tag{115}$$

$$a_{2,2} = \frac{(xP_2 - a_{2,0}P_0 - a_{2,1}P_1, P_1)_1}{(P_2, P_1)_1}. \tag{116}$$

- Једнакост (109), за $m = 3$, и услови ортогоналности $(P_4, P_0)_2 = 0$, $(P_4, P_1)_1 = 0$ и $(P_4, P_1)_2 = 0$, дају следеће формуле:

$$a_{3,0} = \frac{(xP_3, P_0)_2}{(P_1, P_0)_2} \tag{117}$$

$$a_{3,1} = \frac{(xP_3 - a_{3,0}P_1, P_1)_1}{(P_2, P_1)_1} \tag{118}$$

$$a_{3,2} = \frac{(xP_3 - a_{3,0}P_1 - a_{3,1}P_2, P_1)_2}{(P_3, P_1)_2}. \tag{119}$$

Настављајући поступак долазимо до уопштеног резултата.

Теорема 4.7. *Нека је m природан број облика $m = 2l + j$, где је $l = \left[\frac{m}{2}\right]$ и $j \in \{0, 1\}$. Коефицијенти рекурентне релације* (109) *могу се одредити помоћу формула*

$$a_{m,0} = \frac{\left(xP_m, P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)_{j+1}}{\left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)_{j+1}} \tag{120}$$

$$a_{m,1} = \frac{\left(xP_m - a_{m,0}P_{m-2}, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_j}{\left(P_{m-1}, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_j} \tag{121}$$

$$a_{m,2} = \frac{\left(xP_m - a_{m,0}P_{m-2} - a_{m,1}P_{m-1}, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_{j-1}}{\left(P_m, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_{j-1}}, \tag{122}$$

при чему је $(\cdot, \cdot)_{i+2M} = (\cdot, \cdot)_i$, за $i \in \{1, 2\}$ и свако $M \in \mathbb{Z}$.

Доказ. Формуле за $m \leqslant 3$ су претходно показане.

За уопштено m кренимо од рекурентне релације (109) и применимо билинеарну форму $(\cdot, P_i)_{j+1}$. Тада је

$$\begin{aligned}(P_{m+1}, P_i)_{j+1} = &(xP_m, P_i)_{j+1} - a_{m,2}\,(P_m, P_i)_{j+1} \\ &- a_{m,1}\,(P_{m-1}, P_i)_{j+1} - a_{m,0}\,(P_{m-2}, P_i)_{j+1}\,.\end{aligned}$$

Како из услова ортогоналности (110) имамо да су вредности билинеарних форми $(P_{m+1}, P_i)_{j+1}$, $(P_m, P_i)_{j+1}$ и $(P_{m-1}, P_i)_{j+1}$ једнаке нули, за $i = \left[\frac{m-2}{2}\right]$, то закључујемо да (120) важи.

Слично, примењујући билинеарну форму $(\cdot, P_i)_j$ у релацији (109), долазимо до једнакости

$$(P_{m+1}, P_i)_j = (xP_m, P_i)_j - a_{m,2}\,(P_m, P_i)_j - a_{m,1}\,(P_{m-1}, P_i)_j - a_{m,0}\,(P_{m-2}, P_i)_j\,.$$

Услови ортогоналности (110) дају $(P_{m+1}, P_i)_j = 0$ и $(P_m, P_i)_j = 0$, за $i = \left[\frac{m-1}{2}\right]$, одакле добијамо формулу (121).

Коначно, за $i = \left[\frac{m}{2}\right]$ из услова (110) је $(P_{m+1}, P_i)_{j-1} = 0$, па применом билинеарне форме $(\cdot, P_i)_{j-1}$ на (109) добијамо формулу (122). $\square$

Узимајући да је за билинеарне форме (99) испуњено $(\cdot,\cdot)_{i+Mr} = (\cdot,\cdot)_i$, $M \in \mathbb{Z}$, важи следећи уопштени резултат, за $r \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.8. *Нека је m природан број облика $m = lr + j$, где је $l = \left[\frac{m}{r}\right]$ и $j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. Тада се коефицијенти у рекурентној релацији* (106) *могу представити у облику*

$$a_{m,0} = \frac{\left(xP_m, P_{\left[\frac{m-r}{r}\right]}\right)_{j+1}}{\left(P_{m-r}, P_{\left[\frac{m-r}{r}\right]}\right)_{j+1}}, \tag{123}$$

$$a_{m,i} = \frac{\left(xP_m - \sum_{\nu=0}^{i-1} a_{m,\nu} P_{m-r+\nu}, P_{\left[\frac{m-r+i}{r}\right]}\right)_{j+1+i}}{\left(P_{m-r+i}, P_{\left[\frac{m-r+i}{r}\right]}\right)_{j+1+i}}, \tag{124}$$

за $i = 1, \ldots, r$ и $m \geqslant 0$.

Доказ. Како је $m = lr+j$, то ће бити $m-r+i = (l-1)r+j+i$, за $i = 0, 1, \ldots, r-j-1$, па је скоро дијагонални мулти-индекс дужине $m-r+i$ облика

$$(\underbrace{l, \ldots, l}_{j+i \text{ пута}}, \underbrace{l-1, \ldots, l-1}_{r-j-i \text{ пута}}).$$

Посматрајмо скоро дијагонални мулти-индекс дужине $m-r+q$, за природан број $q \geqslant i+1$. Прва $j+i+1$ координата овог мулти-индекса једнака је броју који је већи или једнак од l, па отуда важи $\left(P_{m-r+q}, x^{l-1}\right)_{j+i+1} = 0$, а одатле, користећи рекурентну релацију (106), имамо

$$\left(xP_m, x^{l-1}\right)_{j+i+1} = \sum_{\nu=0}^{i} a_{m,\nu}\left(P_{m-r+\nu}, x^{l-1}\right)_{j+i+1}.$$

Одавде добијамо

$$a_{m,i} = \frac{\left(xP_m, x^{l-1}\right)_{j+i+1} - \sum_{\nu=0}^{i-1} a_{m,\nu}\left(P_{m-r+\nu}, x^{l-1}\right)_{j+1+i}}{\left(P_{m-r+i}, x^{l-1}\right)_{j+1+i}}. \tag{125}$$

Слично, за $i = r - j, \dots, r$, скоро дијагонални мулти-индекс чија је дужина $m - r + i$ је облика

$$(\underbrace{l+1, \dots, l+1}_{j+i-r \text{ пута}}, \underbrace{l, \dots, l}_{2r-j-i \text{ пута}}).$$

Дакле, прва $j+i-r+1$ координата скоро дијагоналног мулти-индекса дужине $m-r+q$, за $q \geqslant i+1$, биће број већи или једнак од $l+1$, што нас доводи до једнакости $\left(P_{m-r+q}, x^l\right)_{j+i-r+1} = 0$, тј. $\left(P_{m-r+q}, x^l\right)_{j+i+1} = 0$. Одавде је

$$\left(xP_m, x^l\right)_{j+i+1} = \sum_{\nu=0}^{i} a_{m,\nu} \left(P_{m-r+\nu}, x^l\right)_{j+i+1},$$

односно изводимо

$$a_{m,i} = \frac{\left(xP_m, x^l\right)_{j+i+1} - \sum_{\nu=0}^{i-1} a_{m,\nu} \left(P_{m-r+\nu}, x^l\right)_{j+1+i}}{\left(P_{m-r+i}, x^l\right)_{j+1+i}}. \tag{126}$$

Коначно, из ортогоналности (103) следи $\left(xP_m, x^k\right)_{j+i+1} = 0$ и $\left(P_{m-r+\nu}, x^k\right)_{j+i+1} = 0$, за свако $k < \left[\frac{m-r+i}{r}\right]$ и за све $\nu = 0, 1, \dots, i$. На основу тога, формуле (125) и (126) постају формуле (123) и (124), које смо и желели да добијемо. □

Везе између рекурентних коефицијената. У овом делу рада ћемо извести везе између коефицијената у рекурентној релацији (106) са одговарајућим коефицијентима из рекурентне релације (96). Напоменимо да је рекурентна релација (96) задовољена од стране В.О.П. типа II са скоро дијагоналним мулти-индексима $\widehat{P}_m(x)$, који су ортогонални у односу на скаларне производе $\langle f, g\rangle_k = I_k(fg)$, $k = 1, \dots, r$.

Формуле са n чворова $G_n^{(k)}$, $k = 1, \dots, r$, формирају оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу, па једнакост $I_k p = G_n^{(k)} p$ важи за све полиноме p степена мањег или једнаког $n-1$ (теорема 4.4). Приметимо да су почетни услови у рекурентним релацијама (106) и (96) исти, односно да је $\widehat{P}_0(x) = P_0(x) = 1$ и $\widehat{P}_i(x) = P_i(x) = 0$, за $i = -1, \dots, -r$, одакле следи $\widehat{a}_{0,i} = a_{0,i}$, за $i = 0, 1, \dots, r$. Лако је закључити да ће полиноми $\widehat{P}_m(x)$ и $P_m(x)$ бити једнаки уколико су сви коефицијенти $\widehat{a}_{m-1,i}$ и $a_{m-1,i}$ међусобно једнаки, за свако $i = 0, 1, \dots, r$.

Као у претходном делу, најпре ћемо посматрати случај $r = 2$. Нека је $m \in \mathbb{N}$ и $\overrightarrow{s}(m) = (m_1, m_2)$ одговарајући скоро дијагонални мулти-индекс. Тада је $m = 2l + j$, за $l = \left[\frac{m}{2}\right]$ и $j \in \{0, 1\}$. Рекурентна релација (96) у овом случају постаје

$$\begin{aligned} &\widehat{P}_{m+1}(x) = (x - \widehat{a}_{m,2})\widehat{P}_m(x) - \widehat{a}_{m,1}\widehat{P}_{m-1}(x) - \widehat{a}_{m,0}\widehat{P}_{m-2}(x), \\ &\widehat{P}_0(x) = 1, \quad \widehat{P}_{-1}(x) = \widehat{P}_{-2}(x) = 0. \end{aligned} \tag{127}$$

Ако је $j = 0$, онда је $m = 2l$ и $\overrightarrow{s}(m) = (l, l)$, односно $m_1 = m_2 = l$. Претпоставимо да је $m < n$ и $\overrightarrow{s}(n) = (n_1, n_2)$ мулти-индекс који одговара броју чворова n. Претходно смо закључили да једнакост $\widehat{a}_{0,i} = a_{0,i}$, $i = 0, 1, 2$, важи. Претпоставимо још да је $\widehat{a}_{j,i} = a_{j,i}$, за свако $j = 1, \dots, m-1$, $i = 0, 1, 2$, а тиме и $\widehat{P}_j(x) = P_j(x)$, за $j \leqslant m$.

- Како је $m < n$, то ће важити $n \geqslant m+1 = 2l+1$ и $n_1 > m_1 = l$. Даље, алгебарски степен тачности квадратурне формуле $G_n^{(1)}$ је $n+n_1-1 \geqslant 2l+1+l+1-1 = 3l+1$. Како је степен полинома $xP_mP_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}$ једнак $1+m+\left[\frac{m-2}{2}\right] = 1+2l+l-1 = 3l$, а степен полинома $P_{m-2}P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}$ једнак $m-2+\left[\frac{m-2}{2}\right] = 2l-2+l-1 = 3l-3$, то примењујући билинеарну форму $(\cdot,\cdot)_1$ добијамо

$$\begin{aligned}
\left(xP_m, P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)_1 &= \left(2I_1 - G_n^{(1)}\right)\left(xP_mP_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right) = I_1\left(xP_mP_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right) \\
&\quad + \left(I_1 - G_n^{(1)}\right)\left(xP_mP_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right) = I_1\left(xP_mP_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right) \\
\left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)_1 &= \left(2I_1 - G_n^{(1)}\right)\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right) = I_1\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right) \\
&\quad + \left(I_1 - G_n^{(1)}\right)\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right) = I_1\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right).
\end{aligned}$$

Користећи једнакост (120) и $P_i(x) = \widehat{P}_i(x)$, за $i \leqslant m$, имамо

$$a_{m,0} = \frac{\left(xP_m, P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)_1}{\left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)_1} = \frac{I_1\left(xP_mP_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)}{I_1\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)} = \widehat{a}_{m,0}.$$

- На сличан начин, користећи билинеарну форму $(\cdot,\cdot)_2$, добијамо једнакости

$$\begin{aligned}
\left(xP_m, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_2 &= I_2\left(xP_mP_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) + \left(I_2 - G_n^{(2)}\right)\left(xP_mP_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) \\
&= I_2\left(xP_mP_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) \\
\left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_2 &= I_2\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) + \left(I_2 - G_n^{(2)}\right)\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) \\
&= I_2\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) \\
\left(P_{m-1}, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_2 &= I_2\left(P_{m-1}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) + \left(I_2 - G_n^{(2)}\right)\left(P_{m-1}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) \\
&= I_2\left(P_{m-1}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right),
\end{aligned}$$

при чему, због $m < n$, важи $n_2 \geqslant m_2 = l$. Дакле, алгебарски степен тачности квадратурне формуле $G_n^{(2)}$ је $n + n_2 - 1 \geqslant 3l$. Осим тога, степени полинома $xP_mP_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$, $P_{m-2}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$ и $P_{m-1}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$ су $3l$, $3l-3$ и $3l-2$, редом. На основу добијених једнакости, формуле (121) и $P_i(x) = \widehat{P}_i(x)$, за $i \leqslant m$, закључујемо да важи

$$\begin{aligned}
a_{m,1} &= \frac{\left(xP_m, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_2 - a_{m,0}\left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_2}{\left(P_{m-1}, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_2} \\
&= \frac{I_2\left(x\widehat{P}_m\widehat{P}_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right) - \widehat{a}_{m,0}I_2\left(\widehat{P}_{m-2}\widehat{P}_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)}{I_2\left(\widehat{P}_{m-1}\widehat{P}_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)} = \widehat{a}_{m,1}.
\end{aligned}$$

- Посматрајући степене полинома $xP_m(x)P_{\left[\frac{m}{2}\right]}(x)$, $P_{m-2}(x)P_{\left[\frac{m}{2}\right]}(x)$, $P_{m-1}(x)P_{\left[\frac{m}{2}\right]}(x)$ и $P_m(x)P_{\left[\frac{m}{2}\right]}(x)$, који су једнаки $3l+1$, $3l-2$, $3l-1$ и $3l$, редом, добијамо једнакости

$$\begin{aligned}
&\left(xP_m, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(xP_mP_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right); \quad \left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(P_{m-2}P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right);\\
&\left(P_{m-1}, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(P_{m-1}P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right); \ \left(P_m, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(P_mP_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).
\end{aligned}$$

  На основу тога, користећи формулу (122) и претходно показане везе добијамо $a_{m,2} = \widehat{a}_{m,2}$.

Дакле, видели смо да је $a_{m,i} = \widehat{a}_{m,i}$, за $i = 0,1,2$ и за свако $m < n$. Отуда, постављајући $m = n-1$ у (109) и (127) добијамо $P_n(x) = \widehat{P}_n(x)$.

Размотримо сада случај $m = n$. Тада имамо $\overrightarrow{s}(m) = \overrightarrow{s}(n) = (l,l)$. Како су чворови квадратурних формула $G_n^{(k)}$, $k \in \{1,2\}$, нуле вишеструко ортогоналног полинома типа II $\widehat{P}_n(x)$ и важи једнакост $P_n(x) = \widehat{P}_n(x)$, то ће $G_n^{(k)}p$ бити једнако нули кадгод је $P_n(x)$ чинилац полинома p. Такође, алгебарски степен тачности квадратурних формула $G_n^{(1)}$ и $G_n^{(2)}$ је исти, јер је $n_1 = n_2 = l$, и једнак је $2l + l - 1 = 3l - 1$. На основу наведених чињеница, посматрајући степене полинома који учествују у билинеарним формама добијамо следеће једнакости:

$$\begin{aligned}
\left(xP_n, P_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\right)_1 &= 2\cdot I_1\left(xP_nP_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\right),\\
\left(P_{n-2}, P_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\right)_1 &= I_1\left(P_{n-2}P_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\right).
\end{aligned}$$

Одавде је $a_{n,0} = 2\cdot\widehat{a}_{n,0}$, због $P_i(x) = \widehat{P}_i(x)$, за $i \leqslant n$.

Слично, из једнакости

$$\begin{aligned}
\left(xP_n, P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)_2 &= 2\cdot I_2\left(xP_nP_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)\\
\left(P_{n-2}, P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)_2 &= I_2\left(P_{n-2}P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)\\
\left(P_{n-1}, P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)_2 &= I_2\left(P_{n-1}P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right),
\end{aligned}$$

имамо $a_{n,1} = 2\cdot\widehat{a}_{n,1}$. Коначно, из

$$\begin{aligned}
&\left(xP_n, P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_1 = 2\cdot I_1\left(xP_nP_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right), \quad \left(P_{n-2}, P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(P_{n-2}P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\\
&\left(P_{n-1}, P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(P_{n-1}P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right), \quad \left(P_n, P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_1 = 2\cdot I_1\left(P_nP_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)
\end{aligned}$$

добијамо $a_{n,2} = \widehat{a}_{n,2}$.

Изаберимо сада $j = 1$. Тада је $m = 2l+1$ и $\overrightarrow{s}(m) = (l+1,l)$, односно $m_1 = l+1$ и $m_2 = l$. Претпоставимо да је $m < n$. Истим поступком као у претходном случају ($j = 0$) изводимо везе између одговарајућих рекурентних коефицијената.
Како је $m < n$, то је $n \geqslant m+1 = 2l+2$, $n_2 > m_2 = l$ и $n_1 \geqslant m_1 = l+1$. Дакле, алгебарски степен тачности квадратурних формула $G_n^{(k)}$ је $n + n_k - 1 \geqslant 3l+2$, за $k = 1,2$. Посматрајући степене одговарајућих полинома изводимо жељене везе.

- Степени полинома $xP_mP_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}$, $P_{m-2}P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}$ су $3l+1$ и $3l-2$, редом, па важи

$$\left(xP_m, P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)_2 = I_2\left(x\widehat{P}_m\widehat{P}_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right),$$
$$\left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right)_2 = I_2\left(\widehat{P}_{m-2}\widehat{P}_{\left[\frac{m-2}{2}\right]}\right).$$

  Одавде је $a_{m,0} = \widehat{a}_{m,0}$.

- Користећи услове ортогоналности, имајући у виду да су степени полинома $xP_mP_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$, $P_{m-2}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$, $P_{m-1}P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}$ једнаки $3l+2$, $3l-1$ и $3l$, редом, добијамо

$$\left(xP_m, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(x\widehat{P}_m\widehat{P}_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right),$$
$$\left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(\widehat{P}_{m-2}\widehat{P}_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right),$$
$$\left(P_{m-1}, P_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right)_1 = I_1\left(\widehat{P}_{m-1}\widehat{P}_{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\right).$$

  Сада лако изводимо једнакост $a_{m,1} = \widehat{a}_{m,1}$.

- Коначно, како су степени полинома $xP_mP_{\left[\frac{m}{2}\right]}$, $P_{m-2}P_{\left[\frac{m}{2}\right]}$, $P_{m-1}P_{\left[\frac{m}{2}\right]}$ и $P_mP_{\left[\frac{m}{2}\right]}$ редом једнаки $3l+2$, $3l-1$, $3l$ и $3l+1$, уз услове ортогоналности и степен тачности квадратурне формуле $G_n^{(2)}$, имамо

$$\left(xP_m, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_2 = I_2\left(x\widehat{P}_m\widehat{P}_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right), \qquad \left(P_{m-2}, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_2 = I_2\left(\widehat{P}_{m-2}\widehat{P}_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right),$$
$$\left(P_{m-1}, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_2 = I_2\left(\widehat{P}_{m-1}\widehat{P}_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right), \quad \left(P_m, P_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)_2 = I_2\left(\widehat{P}_m\widehat{P}_{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

  Отуда закључујемо да је $a_{m,2} = \widehat{a}_{m,2}$.

Дакле, показали смо да је $a_{m,i} = \widehat{a}_{m,i}$, за $i = 0, 1, 2$ и за све $m < n$, па је $P_n(x) = \widehat{P}_n(x)$.

Преостаје нам још да размотримо случај $m = n$. Тада за мулти-индексе важи $\overrightarrow{s}(m) = \overrightarrow{s}(n) = (l+1, l)$. Као у претходном случају, $j = 0$, вредност $G_n^{(k)}p$ ће бити једнака нули кадгод је $P_n(x)$ чинилац полинома p. Даље, квадратурне формуле $G_n^{(1)}$ и $G_n^{(2)}$ су тачне за све полиноме степена мањег или једнаког $3l+1$ и $3l$, редом. Отуда, посматрајући степене одговарајућих полинома долазимо до жељених веза.

- Из једнакости

$$\left(xP_n, P_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\right)_2 = 2 \cdot I_2\left(x\widehat{P}_n\widehat{P}_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\right),$$
$$\left(P_{n-2}, P_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\right)_2 = I_2\left(\widehat{P}_{n-2}\widehat{P}_{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\right),$$

  имамо $a_{n,0} = 2 \cdot \widehat{a}_{n,0}$.

- Како важе следећи односи

$$\begin{aligned}
\left(xP_n, P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)_1 &= 2 \cdot I_1 \left(x\widehat{P}_n\widehat{P}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right),\\
\left(P_{n-2}, P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)_1 &= I_1 \left(\widehat{P}_{n-2}\widehat{P}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right),\\
\left(P_{n-1}, P_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)_1 &= I_1 \left(\widehat{P}_{n-1}\widehat{P}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right),
\end{aligned}$$

  то користећи формулу (121) добијамо

$$a_{n,1} = \frac{2 \cdot I_1 \left(x\widehat{P}_n\widehat{P}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right) - 2\widehat{a}_{n,0} I_1 \left(\widehat{P}_{n-2}\widehat{P}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)}{I_1 \left(\widehat{P}_{n-1}\widehat{P}_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right)} = 2 \cdot \widehat{a}_{n,1}.$$

- Коначно, формула (122) и једнакости

$$\begin{aligned}
&\left(xP_n, P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_2 = 2 \cdot I_2 \left(x\widehat{P}_n\widehat{P}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right), \quad &&\left(P_{n-2}, P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_2 = I_2 \left(\widehat{P}_{n-2}\widehat{P}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right),\\
&\left(P_{n-1}, P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_2 = I_2 \left(\widehat{P}_{n-1}\widehat{P}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right), \quad &&\left(P_n, P_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_2 = 2 \cdot I_2 \left(\widehat{P}_n\widehat{P}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right),
\end{aligned}$$

  дају $a_{n,2} = \widehat{a}_{n,2}$.

Овим смо показали да се за $r = 2$ коефицијенти у рекурентним релацијама код В.О.П. типа II са скоро дијагоналним мулти-индексима, као и поменути полиноми, могу одредити на следећи начин

(128) $$a_{m,i} = \widehat{a}_{m,i}, \qquad i = 0, 1, 2, \quad \text{за } m < n,$$

(129) $$a_{n,i} = 2 \cdot \widehat{a}_{n,i}, \quad i = 0, 1, \qquad a_{n,2} = \widehat{a}_{n,2},$$

(130) $$P_i(x) = \widehat{P}_i(x), \quad \text{за } i \leqslant n.$$

Следећа теорема повезује рекурентне коефицијенте релација (106) и (96), као и вишеструко ортогоналне полиноме типа II који задовољавају ове релације.

Теорема 4.9. *Нека је* $(w_1, \dots, w_r)$ *систем датих тежинских функција на реалној правој. В.О.П. типа II са скоро дијагоналним мулти-индексима, који су ортогонални у односу на билинеарне форме* (99), *и коефицијенти рекурентне релације* (106) *могу се представити у облику*

(131) $$a_{m,i} = \widehat{a}_{m,i}, \qquad i = 0, 1, \dots, r, \qquad \text{за } m < n,$$

(132) $$a_{n,i} = 2 \cdot \widehat{a}_{n,i}, \quad i = 0, 1, \dots, r-1, \quad a_{n,r} = \widehat{a}_{n,r},$$

(133) $$P_i(x) = \widehat{P}_i(x), \quad \text{за } i \leqslant n,$$

где су $\widehat{a}_{m,i}$ *коефицијенти рекуретне релације* (96), *коју задовољавају В.О.П. типа II,* $\widehat{P}_i(x)$, *који су ортогонални у односу на скаларне производе* $\langle f, g\rangle_k$, $k = 1, \dots, r$.

Доказ. Нека је $\overrightarrow{n}$ скоро дијагонални мулти-индекс дужине $n = lr + j$. Тада једнакост

(134) $$I_k p = \left(2I_k - G_n^{(k)}\right) p$$

важи за све полиноме p степена не већег од $n+l$, тј. $n+l-1$, за $k=1,\ldots,j$, тј. $k=j+1,\ldots,r$, редом.

Посматрајмо најпре случај $m<n$. Нека је m облика $m=\widetilde{l}r+\widetilde{j}$. За израчунавање коефицијената $a_{m,0},\ldots,a_{m,r}$ потребно нам је $m+\widetilde{l}$ вредности билинеарних форми $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{j}+2},\ldots,(\cdot,\cdot)_r$ и $m+\widetilde{l}-1$ вредности билинеарних форми $(\cdot,\cdot)_1,\ldots,(\cdot,\cdot)_{\widetilde{j}+1}$ (теорема 4.8).

Ако је $m\leqslant n-2$, онда је $m+\widetilde{l}+1\leqslant n+l-1$, па једнакост (134) важи за све полиноме p степена мањег или једнаког $m+\widetilde{l}+1$.

Даље, уколико је $m=n-1$, посматрамо следећа два случаја.

- Када је $j=0$, имамо $\widetilde{l}<l$, па важи $m+\widetilde{l}+1\leqslant n+l-1$. Одатле закључујемо да је једнакост (134) задовољена за све полиноме p степена мањег или једнаког $m+\widetilde{l}+1$.
- Уколико је $j>0$, онда важи $\widetilde{l}=l$ и $\widetilde{j}=j-1$, па добијамо $m+\widetilde{l}=n+l-1$ и $m+\widetilde{l}+1=n+l$. Одавде следи да су све потребне вредности билинеарних форми једнаке вредностима одговарајућих скаларних производа.

Користећи услове ортогоналности (103) и (95), које задовољавају В.О.П. типа II, добијамо једнакости $\left(xP_m,x^k\right)_{j+i+1}=0$, $\left(P_{m-r+\nu},x^k\right)_{j+i+1}=0$ и $\left\langle x\widehat{P}_m,x^k\right\rangle_{j+i+1}=0$, $\left\langle \widehat{P}_{m-r+\nu},x^k\right\rangle_{j+i+1}=0$, за свако $k<\left[\frac{m-r+i}{r}\right]$ и за све $\nu=0,1,\ldots,i$.

Сада за $i=0,1,\ldots,r-\widetilde{j}-1$ имамо

$$
\begin{aligned}
a_{m,i}&=\frac{\left(xP_m-\sum_{\nu=0}^{i-1}a_{m,\nu}P_{m-r+\nu},x^{l-1}\right)_{\widetilde{j}+1+i}}{\left(P_{m-r+i},x^{l-1}\right)_{\widetilde{j}+1+i}}\\
&=\frac{\left\langle x\widehat{P}_m-\sum_{\nu=0}^{i-1}a_{m,\nu}\widehat{P}_{m-r+\nu},x^{l-1}\right\rangle_{\widetilde{j}+1+i}}{\left\langle \widehat{P}_{m-r+i},x^{l-1}\right\rangle_{\widetilde{j}+1+i}}=\widehat{a}_{m,i},
\end{aligned}
$$

и за $i=r-\widetilde{j},\ldots,r$ једнакост

$$
\begin{aligned}
a_{m,i}&=\frac{\left(xP_m-\sum_{\nu=0}^{i-1}a_{m,\nu}P_{m-r+\nu},x^{l}\right)_{\widetilde{j}+1+i}}{\left(P_{m-r+i},x^{l}\right)_{\widetilde{j}+1+i}}\\
&=\frac{\left\langle x\widehat{P}_m-\sum_{\nu=0}^{i-1}a_{m,\nu}\widehat{P}_{m-r+\nu},x^{l}\right\rangle_{\widetilde{j}+1+i}}{\left\langle \widehat{P}_{m-r+i},x^{l}\right\rangle_{\widetilde{j}+1+i}}=\widehat{a}_{m,i}
\end{aligned}
$$

важи. Закључујемо да је $P_i(x)=\widehat{P}_i(x)$, за $i=0,1,\ldots,n$.

На крају, посматрајмо случај $m=n$. Овде имамо

$$
a_{n,i}=\frac{\left(xP_n-\sum_{\nu=0}^{i-1}a_{n,\nu}P_{n-r+\nu},x^{l-1}\right)_{j+1+i}}{\left(P_{n-r+i},x^{l-1}\right)_{j+1+i}},
$$

за $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Како су чворови квадратурних формула $G_n^{(k)}$ нуле В.О.П. $\widehat{P}_n(x)$, то ће важити $\left(xP_n, x^{l-1}\right)_{j+i+1} = 2\left\langle xP_n, x^{l-1}\right\rangle_{j+i+1}$, а отуда и једнакост

$$a_{n,0} = \frac{2\left\langle xP_n, x^{l-1}\right\rangle_{j+1+i}}{\left\langle P_{n-r+i}, x^{l-1}\right\rangle_{j+1+i}} = 2\,\widehat{a}_{n,0}.$$

Дакле, добијамо $a_{n,1} = 2\,\widehat{a}_{n,1}, \ldots, a_{n,r-1} = 2\,\widehat{a}_{n,r-1}$.

Коначно, за $i = r$ имамо $\left(P_{n-r+r}, x^{l-1}\right)_{j+r+1} = 2\left\langle P_n, x^{l-1}\right\rangle_{j+r+1}$, на основу чега изводимо једнакост

$$a_{n,r} = \frac{2\left\langle xP_n - \sum_{\nu=0}^{r-1}\widehat{a}_{n,\nu}P_{n-r+\nu}, x^{l-1}\right\rangle_{j+1}}{2\left\langle P_n, x^{l-1}\right\rangle_{j+1}} = \widehat{a}_{n,r},$$

при чему је $\langle\cdot,\cdot\rangle_{j+r+1} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{j+1}$. □

4.1.2 Рекурентне релације најближих суседа

У овом одељку ћемо посматрати произвољне мулти-индексе и дати доказе рекурентних релација које задовољавају одговарајући В.О.П. типа I и типа II, а који представљају оригиналне резултате аутора.

Нека је $\{\overrightarrow{m}_k, k = 0, 1, \ldots, |\overrightarrow{n}|\}$ путања од $\overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ до $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$, таква да је $\overrightarrow{m}_0 = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{m}_{|\overrightarrow{n}|} = \overrightarrow{n}$, а у сваком кораку мулти-индекс $\overrightarrow{m}_k$ се повећава за 1 на тачно једној координати, тј. важи

$$\overrightarrow{m}_{k+1} = \overrightarrow{m}_k + \overrightarrow{e}_j,$$

за неко $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, одакле јасно следи $|\overrightarrow{m}_k| = k$ и $\overrightarrow{m}_k \leqslant \overrightarrow{m}_{k+1}$.

Теорема 4.10. *Нека је $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(r))$ пермутација вектора $(1, 2, \ldots, r)$ и $\overrightarrow{s}_j = \sum_{i=1}^{j}\overrightarrow{e}_{\pi(i)}$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Изаберимо $\overline{k} \in \{1, 2, \ldots, r\}$ и претпоставимо да су сви мулти-индекси $\overrightarrow{m} \leqslant \overrightarrow{n} + \overrightarrow{e}_{\overline{k}}$ нормални. Тада В.О.П. типа II, који су ортогонални у односу на билинеарне форме* (99)*, задовољавају следећу рекурентну релацију*

$$xP_{\overrightarrow{n}}(x) = P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}(x) + a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k})P_{\overrightarrow{n}}(x) + \sum_{j=1}^{r} a_j(\overrightarrow{n})P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{s}_j}(x), \tag{135}$$

где су $a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k})$ и $a_j(\overrightarrow{n})$ реални бројеви.

Доказ. Нека је $\{\overrightarrow{m}_k, k = 0, 1, \ldots, |\overrightarrow{n}|\}$ путања од $\overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ до вектора $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$, таква да је $\overrightarrow{m}_{|\overrightarrow{n}|-j} = \overrightarrow{n} - \overrightarrow{s}_j$, за $j = 1, 2, \ldots, r$, и $\overrightarrow{m}_{|\overrightarrow{n}|} = \overrightarrow{n}$. Како су $P_{\overrightarrow{m}_j}$ монични полиноми степена j, $0 \leqslant j \leqslant |\overrightarrow{n}|$, то они чине базу линеарног простора полинома степена не већег од $|\overrightarrow{n}|$. Полином $xP_{\overrightarrow{n}}(x) - P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}(x)$ је степена мањег или једнаког $|\overrightarrow{n}|$, па можемо писати

$$xP_{\overrightarrow{n}}(x) = P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}(x) + \sum_{j=0}^{|\overrightarrow{n}|} c_j(\overrightarrow{n})P_{\overrightarrow{m}_j}(x). \tag{136}$$

За $l \leqslant j$ важи $\overrightarrow{m}_l \leqslant \overrightarrow{m}_j$, па на основу биортогоналности (105) следи

$$\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\overrightarrow{m}_j}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k = 0, \text{ за } j \geqslant l; \quad \sum_{k=1}^{r} \left(P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k = 0.$$

Даље, за $j \leqslant l-2$, односно $|\overrightarrow{m}_j| \leqslant |\overrightarrow{m}_l| - 2$, на основу (105) добијамо

$$\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\overrightarrow{m}_j}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k = 0.$$

Коначно, у случају $j = l-1$ биортогоналност (105) даје

$$\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\overrightarrow{m}_j}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k = \sum_{k=1}^{r} \left(P_{\overrightarrow{m}_{l-1}}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k = 1.$$

Сада из једнакости (136) добијамо

$$\sum_{k=1}^{r} \left(xP_{\overrightarrow{n}}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k = \sum_{k=1}^{r} \left(P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k + \sum_{j=0}^{|\overrightarrow{n}|} c_j(\overrightarrow{n}) \left[\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\overrightarrow{m}_j}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k\right] = c_{l-1}(\overrightarrow{n}),$$

за све $l = 1, \ldots, |\overrightarrow{n}|$.

Како је $\overrightarrow{m}_l \leqslant (n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_r - 1) = \overrightarrow{m}_{|\overrightarrow{n}|-r}$ кадгод је $l \leqslant |\overrightarrow{n}| - r$, то је полином $xB_{\overrightarrow{m}_l,k}$ степена не већег од $1 + n_k - 2 = n_k - 1$, за $l \leqslant |\overrightarrow{n}| - r$, па из услова (103) следи

$$\left(P_{\overrightarrow{n}}, xB_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k = 0, \quad k = 1, \ldots, r, \quad l \leqslant |\overrightarrow{n}| - r,$$

односно $\sum_{k=1}^{r} \left(xP_{\overrightarrow{n}}, B_{\overrightarrow{m}_l,k}\right)_k = 0$, за $l \leqslant |\overrightarrow{n}| - r$. Одавде закључујемо да је $c_{l-1}(\overrightarrow{n}) = 0$, за $l \leqslant |\overrightarrow{n}| - r$, па се једнакост (136) своди на

$$xP_{\overrightarrow{n}}(x) = P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}(x) + \sum_{j=|\overrightarrow{n}|-r}^{|\overrightarrow{n}|} c_j(\overrightarrow{n}) P_{\overrightarrow{m}_j}(x).$$

Ако обележимо $a_j(\overrightarrow{n}) = c_{|\overrightarrow{n}|-j}(\overrightarrow{n})$, за $1 \leqslant j \leqslant r$, и $a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k}) = c_{|\overrightarrow{n}|}(\overrightarrow{n})$, добијамо жељену рекурентну релацију. □

Из претходног доказа видимо да су коефицијенти у рекурентној релацији (135) експлицитно дати са

$$a_j(\overrightarrow{n}) = \sum_{k=1}^{r} \left(xP_{\overrightarrow{n}}, B_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{s}_{j-1},k}\right)_k, \quad 1 \leqslant j \leqslant r, \tag{137}$$

где је $\overrightarrow{s}_0 = \overrightarrow{0}$. Користећи претходно доказану рекурентну релацију (135) и В.О.П. типа I $\left(B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},1}, B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},2}, \ldots, B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},r}\right)$, на основу биортогоналности добијамо

$$\sum_{k=1}^{r} \left(P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{s}_j}, B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},k}\right)_k = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\sum_{k=1}^{r}\Big(P_{\vec{n}+\vec{e}_{\bar{k}}}, B_{\vec{n}+\vec{e}_{\bar{k}},k}\Big)_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{r}\Big(P_{\vec{n}}, B_{\vec{n}+\vec{e}_{\bar{k}},k}\Big)_k = 1,$$

односно

$$a_{\vec{n},0}(\bar{k}) = \sum_{k=1}^{r}\Big(xP_{\vec{n}}, B_{\vec{n}+\vec{e}_{\bar{k}},k}\Big)_k. \tag{138}$$

Слично, В.О.П. типа I задовољавају рекуретну релацију коначног реда, коју наводимо у наредној теореми.

Теорема 4.11. *Нека је* $(\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(r))$ *пермутација вектора* $(1,2,\dots,r)$ *и* $\vec{s}_j = \sum_{i=1}^{j}\vec{e}_{\pi(i)}$, $1\leqslant j\leqslant r$. *Изаберимо* $\bar{k}\in\{1,2,\dots,r\}$ *и претпоставимо да су сви мултииндекси* $\vec{m}\leqslant\vec{n}$ *нормални. Тада В.О.П. типа I, који су ортогонални у односу на билинеарне форме* (99)*, задовољавају следећу рекурентну релацију*

$$xB_{\vec{n},k}(x) = B_{\vec{n}-\vec{e}_{\bar{k}},k}(x) + \sum_{j=0}^{r} b_j(\vec{n})B_{\vec{n}+\vec{s}_j,k}(x), \quad 1\leqslant k\leqslant r, \tag{139}$$

где су $b_j(\vec{n})$ *реални бројеви и* $B_{\vec{n},k}=0$ *кадгод је* $n_k\leqslant 0$.

Доказ. Нека је $\{\vec{m}_j, j=0,1,\dots,|\vec{n}|+r\}$ путања од $\vec{m}_0=\vec{0}=(0,0,\dots,0)$ до $\vec{m}_{|\vec{n}|+r}=(n_1+1,n_2+1,\dots,n_r+1)$, таква да је $\vec{m}_{|\vec{n}|}=\vec{n}$, $\vec{m}_{|\vec{n}|+j}=\vec{n}+\vec{s}_j$, за $j=1,\dots,r$, и $\vec{m}_{|\vec{n}|-1}=\vec{n}-\vec{e}_{\bar{k}}$. Тада полином $xB_{\vec{n},k}(x)$ можемо записати у облику

$$xB_{\vec{n},k}(x) = \sum_{j=0}^{|\vec{n}|+r} c_j(\vec{n})B_{\vec{m}_j,k}(x), \tag{140}$$

за свако $k=1,\dots,r$.

Како је $\vec{m}_0=\vec{0}$, то је $B_{\vec{0},k}=0$, за свако $k=1,\dots,r$, па у претходној суми j креће од 1. Користећи В.О.П. типа II $P_{\vec{m}_l}(x)$ и биортогоналност (105) добијамо следеће.

(1) Ако је $l\geqslant j$, односно $\vec{m}_l\geqslant\vec{m}_j$, важи $\sum_{k=1}^{r}\big(P_{\vec{m}_l}, B_{\vec{m}_j,k}\big)_k=0$.

(2) Слично, за $l\leqslant j-2$ имамо $\sum_{k=1}^{r}\big(P_{\vec{m}_l}, B_{\vec{m}_j,k}\big)_k=0$.

(3) У случају $l=j-1$, биортогоналност (105) даје $\sum_{k=1}^{r}\big(P_{\vec{m}_l}, B_{\vec{m}_j,k}\big)_k=1$.

Користећи претходне једнакости и формулу (140), добијамо

$$\sum_{k=1}^{r}\big(P_{\vec{m}_l}, xB_{\vec{n},k}\big)_k = c_{l+1}(\vec{n})\sum_{k=1}^{r}\big(P_{\vec{m}_l}, B_{\vec{m}_{l+1},k}\big)_k = c_{l+1}(\vec{n}),$$

за свако $l=0,1,\dots,|\vec{n}|+r-1$.

Како је $P_{\vec{m}_l}$ полином степена l, то је $xP_{\vec{m}_l}$ полином степена $l+1$, па на основу услова ортогоналности (100) следи:

$$\sum_{k=1}^{r}\big(P_{\vec{m}_l}, xB_{\vec{n},k}\big)_k = \sum_{k=1}^{r}\big(B_{\vec{n},k}, xP_{\vec{m}_l}\big)_k = 0, \qquad \text{за } l+1\leqslant|\vec{n}|-2,$$

одакле добијамо $c_j(\vec{n}) = 0$, за $j \leqslant |\vec{n}| - 2$. Сада се једнакост (140) своди на

$$xB_{\vec{n},k}(x) = \sum_{j=|\vec{n}|-1}^{|\vec{n}|+r} c_j(\vec{n}) B_{\vec{m}_j,k}(x), \quad k = 1, \ldots, r.$$

За $l = |\vec{n}| - 2$, на основу нормализације (101), имамо:

$$c_{l+1}(\vec{n}) = c_{|\vec{n}|-1}(\vec{n}) = \sum_{k=1}^{r} \Big(P_{\vec{m}_{|\vec{n}|-2}}, xB_{\vec{n},k} \Big)_k = \sum_{k=1}^{r} \Big(B_{\vec{n},k}, xP_{\vec{m}_{|\vec{n}|-2}} \Big)_k = 1.$$

Ако означимо $b_j(\vec{n}) = c_{|\vec{n}|+j}(\vec{n})$, за $j = 0, 1, \ldots, r$, добијамо жељену рекурентну релацију. $\square$

Из претходног доказа видимо да су коефицијенти у рекурентној релацији (139) експлицитно задати са

$$b_j(\vec{n}) = \sum_{k=1}^{r} \left(P_{\vec{n}+\vec{s}_{j-1}}, xB_{\vec{n},k} \right)_k, \quad j = 0, 1, \ldots, r, \tag{141}$$

где је $\vec{s}_0 = \vec{0}$ и $P_{\vec{n}+\vec{s}_{-1}} = P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}$. Дакле, рекурентна релација (139) је облика

$$xB_{\vec{n},k}(x) = B_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}},k}(x) + b_0(\overline{k}) B_{\vec{n},k}(x) + \sum_{j=1}^{r} b_j(\vec{n}) B_{\vec{n}+\vec{s}_j,k}(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \tag{142}$$

уз услове $B_{\vec{n},k} = 0$ кадгод је $n_k \leqslant 0$.

Рекурентна релација (135) даје везу између В.О.П. типа II са мулти-индексима од $(n_1-1, n_2-1, \ldots, n_r-1)$ до $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ и В.О.П. типа II са мулти-индексом $\vec{n} + \vec{e}_{\overline{k}}$. Друга занимљива рекурентна релација повезује В.О.П. типа II $P_{\vec{n}}$ са В.О.П. типа II чији су мулти-индекси $\vec{n} + \vec{e}_{\overline{k}}$ и сви суседни мулти-индекси $\vec{n} - \vec{e}_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Ову везу ћемо доказати у наредној теореми.

Теорема 4.12. *Нека су $\vec{n}$ и $\vec{n} + \vec{e}_{\overline{k}}$ нормални мулти-индекси. Тада В.О.П. типа II, који су ортогонални у односу на билинеарне форме* (99), *задовољавају следећу рекурентну релацију*

$$xP_{\vec{n}}(x) = P_{\vec{n}+\vec{e}_{\overline{k}}}(x) + a_{\vec{n},0}(\overline{k}) P_{\vec{n}}(x) + \sum_{j=1}^{r} a_{\vec{n},j} P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x), \tag{143}$$

где су

$$a_{\vec{n},0}(\overline{k}) = \sum_{k=1}^{r} \Big(xP_{\vec{n}}, B_{\vec{n}+\vec{e}_{\overline{k}},k} \Big)_k \tag{144}$$

и

$$a_{\vec{n},k} = \frac{(P_{\vec{n}}, x^{n_k})_k}{\left(P_{\vec{n}-\vec{e}_k}, x^{n_k-1}\right)_k}, \quad k = 1, \ldots, r. \tag{145}$$

Доказ. Како су мулти-индекси $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}$ нормални, а полиноми $P_{\overrightarrow{n}}$ и $P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}$ монични, то је полином $xP_{\overrightarrow{n}}(x)-P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}(x)$ степена не већег од $|\overrightarrow{n}|$. Такође, коефицијент $a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k})$ можемо изабрати тако да се члан који садржи $x^{|\overrightarrow{n}|}$ потре, односно да полином $xP_{\overrightarrow{n}}(x)-P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}(x)-a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k})P_{\overrightarrow{n}}(x)$ постане полином степена не већег од $|\overrightarrow{n}|-1$. Лако се проверава да је овај полином ортогоналан на свим полиномима степена не већег од n_k-2, у односу на билинеарну форму (99), за $k=1,\ldots,r$. Линеарни простор $\mathcal{A}$ који садржи све полиноме степена мањег или једнаког $|\overrightarrow{n}|-1$, а који су ортогонални на свим полиномима степена не већег од n_k-2 у односу на билинеарну форму (99), за $k=1,\ldots,r$, одговара линеарном простору $A\subset\mathbb{R}^{|\overrightarrow{n}|}$ коефицијената $\mathbf{c}$ полинома степена мањег или једнаког $|\overrightarrow{n}|-1$, који задовољавају хомоген систем линеарних једначина $\widetilde{M}_{\overrightarrow{n}}\mathbf{c}=\mathbf{0}$, где је $\widetilde{M}_{\overrightarrow{n}}$ матрица добијена из матрице момената $M'_{\overrightarrow{n}}$, дате са (104), брисањем r врста. Како је $\overrightarrow{n}$ нормалан мулти-индекс, то ће ранг матрице $\widetilde{M}_{\overrightarrow{n}}$ бити $|\overrightarrow{n}|-r$, па је отуда линеарни простор A димензије r. Како сваки од полинома $P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_j}$ припада линеарном простору $\mathcal{A}$, а ови полиноми за $j=1,\ldots,r$ су линеарно независни, онда из једнакости

$$\sum_{j=1}^{r}a_jP_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_j}=0$$

добијамо да је

$$\left(\sum_{j=1}^{r}a_jP_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_j},x^{n_k-1}\right)_k=a_k\left(P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_k},x^{n_k-1}\right)_k=0,$$

за свако $k=1,\ldots,r$. Како је $\left(P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_k},x^{n_k-1}\right)_k\neq0$, то следи $a_k=0$, $k=1,\ldots,r$. Дакле, полином $xP_{\overrightarrow{n}}(x)-P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}}(x)-a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k})P_{\overrightarrow{n}}(x)$ можемо писати као линеарну комбинацију посматране базе простора $\mathcal{A}$, односно добијамо рекурентну релацију (143).

Примењујући билинеарну форму $(\cdot,x^{n_k-1})_k$ на изведену рекурентну релацију добијамо једнакост

$$\left(xP_{\overrightarrow{n}},x^{n_k-1}\right)_k=\left(P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}},x^{n_k-1}\right)_k+a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k})\left(P_{\overrightarrow{n}},x^{n_k-1}\right)_k+\sum_{j=1}^{r}a_{\overrightarrow{n},j}\left(P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_j},x^{n_k-1}\right)_k,$$

одакле је $(P_{\overrightarrow{n}},x^{n_k})_k=a_{\overrightarrow{n},k}\left(P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_k},x^{n_k-1}\right)_k$, односно

$$a_{\overrightarrow{n},k}=\frac{(P_{\overrightarrow{n}},x^{n_k})_k}{\left(P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_k},x^{n_k-1}\right)_k},\quad k=1,\ldots,r.$$

Користећи В.О.П. типа I $\left(B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},1},B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},2},\ldots,B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},r}\right)$, на основу биортогоналности (105), добијамо

$$\sum_{k=1}^{r}\left(xP_{\overrightarrow{n}},B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},k}\right)_k=\sum_{k=1}^{r}\left(P_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}}},B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},k}\right)_k+a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k})\sum_{k=1}^{r}\left(P_{\overrightarrow{n}},B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},k}\right)_k$$

$$+\sum_{j=1}^{r} a_{\vec{n},j}\left(\sum_{k=1}^{r}\Big(P_{\vec{n}-\vec{e}_j}, B_{\vec{n}+\vec{e}_{\overline{k}},k}\Big)_k\right),$$

одакле изводимо $a_{\vec{n},0}(\overline{k})=\sum_{k=1}^{r}\Big(xP_{\vec{n}}, B_{\vec{n}+\vec{e}_{\overline{k}},k}\Big)_k$. □

Слично, рекурентна релација за суседне мулти-индексе важи и за В.О.П. типа I.

Теорема 4.13. *Нека су $\vec{n}$ и $\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}$ нормални мулти-индекси. Тада В.О.П. типа I, који су ортогонални у односу на билинеарне форме* (99)*, задовољавају следећу рекурентну релацију*

$$xB_{\vec{n},k}(x)=B_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}},k}(x)+b_{\vec{n},0}(\overline{k})B_{\vec{n},k}(x)+\sum_{j=1}^{r} b_{\vec{n},j}B_{\vec{n}+\vec{e}_j,k}(x),\quad 1\leqslant k\leqslant r, \tag{146}$$

где је

$$b_{\vec{n},0}(\overline{k})=\sum_{k=1}^{r}\Big(xB_{\vec{n},k}, P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}\Big)_k \tag{147}$$

и

$$b_{\vec{n},k}=\frac{\mathcal{K}_{\vec{n},k}}{\mathcal{K}_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}},\quad k=1,\ldots,r, \tag{148}$$

при чему $\mathcal{K}_{\vec{n},k}$ представља водећи коефицијент полинома $B_{\vec{n},k}(x)$.

Доказ. Нека је $\{\vec{m}_j, j=0,1,\ldots,|\vec{n}|\}$ путања од $\vec{m}_0=\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$ до $\vec{m}_{|\vec{n}|}=(n_1,n_2,\ldots,n_r)$, таква да је $|\vec{m}_j|=j$, $\vec{m}_j\leqslant\vec{m}_{j+1}$ и $\vec{m}_{|\vec{n}|-1}=\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}$. Тада полином $xB_{\vec{n},k}(x)$ можемо записати у облику

$$xB_{\vec{n},k}(x)=\sum_{j=1}^{|\vec{n}|} c_j(\vec{n})B_{\vec{m}_j,k}(x)+\sum_{i=1}^{r} d_i(\vec{n})B_{\vec{n}+\vec{e}_i,k}(x), \tag{149}$$

за свако $k=1,\ldots,r$. Примењујући билинеарну форму (99) на последњу једнакост са В.О.П. типа II $P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}$, добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r}\Big(xB_{\vec{n},k}, P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}\Big)_k=&\sum_{j=1}^{|\vec{n}|} c_j(\vec{n})\sum_{k=1}^{r}\Big(B_{\vec{m}_j,k}, P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}\Big)_k\\ &+\sum_{i=1}^{r} d_i(\vec{n})\sum_{k=1}^{r}\Big(B_{\vec{n}+\vec{e}_i,k}, P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}\Big)_k.\end{aligned}$$

Биортогоналност (105) даје следеће вредности:

$$\Big(B_{\vec{n}+\vec{e}_i,k}, P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}\Big)_k=0,\quad i=1,\ldots,r,$$

и

$$\Big(B_{\vec{m}_j,k}, P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}\Big)_k=0,\quad \text{за } j=1,\ldots,|\vec{n}|-1;\quad \Big(B_{\vec{m}_{|\vec{n}|},k}, P_{\vec{n}-\vec{e}_{\overline{k}}}\Big)_k=1,$$

па имамо

$$b_{\vec{n},0}(\bar{k}) = c_{|\vec{n}|}(\vec{n}) = \sum_{k=1}^{r} \left(xB_{\vec{n},k}, P_{\vec{n}-\vec{e}_{\bar{k}}} \right)_k .$$

Користећи сада билинеарну форму (99) уз В.О.П. типа II $P_{\vec{m}_l-1}$, добијамо једнакост

$$\sum_{k=1}^{r} \left(xB_{\vec{n},k}, P_{\vec{m}_l-1} \right)_k = \sum_{j=1}^{|\vec{n}|} c_j(\vec{n}) \sum_{k=1}^{r} \left(B_{\vec{m}_j,k}, P_{\vec{m}_l-1} \right)_k + \sum_{i=1}^{r} d_i(\vec{n}) \sum_{k=1}^{r} \left(B_{\vec{n}+\vec{e}_i,k}, P_{\vec{m}_l-1} \right)_k ,$$

при чему услови ортогоналности (100) и (101) имплицирају

$$\sum_{k=1}^{r} \left(xB_{\vec{n},k}, P_{\vec{m}_l-1} \right)_k = \begin{cases} 0, & \text{за } l = 1, \ldots, |\vec{n}| - 2 \\ 1, & \text{за } l = |\vec{n}| - 1 \end{cases}$$

а биортогоналност (105) даје

$$\sum_{k=1}^{r} \left(B_{\vec{m}_j,k}, P_{\vec{m}_l-1} \right)_k = \begin{cases} 1, & \text{за } l = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$\left(B_{\vec{n}+\vec{e}_i,k}, P_{\vec{m}_l-1} \right)_k = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Одатле можемо закључити да су коефицијенти $c_l(\vec{n})$ једнаки нули, за све индексе $l = 1, \ldots, |\vec{n}| - 2$, и да је $c_{|\vec{n}|-1}(\vec{n}) = 1$. Сада једнакост (149) постаје

$$xB_{\vec{n},k}(x) = b_{\vec{n},0}(\bar{k}) B_{\vec{n},k}(x) + B_{\vec{m}_{|\vec{n}|-1},k}(x) + \sum_{i=1}^{r} d_i(\vec{n}) B_{\vec{n}+\vec{e}_i,k}(x).$$

Упоређивањем коефицијената уз x^{n_k} на левој и десној страни последње једнакости, добијамо да је

$$\mathcal{K}_{\vec{n},k} = d_k(\vec{n}) \mathcal{K}_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}, \qquad \text{за све } k = 1, \ldots, r,$$

где $\mathcal{K}_{\vec{n},k}$ представља водећи коефицијент полинома $B_{\vec{n},k}(x)$. Ово нас доводи до формуле (148), коју је и требало показати. □

4.1.3 Коефицијенти у рекурентним релацијама најближих суседа

У претходном одељку смо показали да важе рекурентне релације најближих суседа за вишеструко ортогоналне полиноме типа I и типа II са произвољним мултииндексима. Како ће нам за конструкцију скупа анти-Gauss-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу бити потребни вишеструко ортогонални полиноми типа II, то ће наша пажња бити усмерена само на рекурентне релације које они задовољавају. Коефицијенти у овим рекурентним релацијама повезани су диференцним једначинама, којима је први део овог одељка посвећен, при чему ћемо се ограничити на две тежинске функције. Постављајући $r = 2$ у формулама представљеним теоремом 4.12 добијамо

(150) $$xP_{\vec{n}}(x) = P_{\vec{n}+\vec{e}_{\bar{k}}}(x) + a_{\vec{n},0}(\bar{k}) P_{\vec{n}}(x) + a_{\vec{n},1} P_{\vec{n}-\vec{e}_1}(x) + a_{\vec{n},2} P_{\vec{n}-\vec{e}_2}(x),$$

за

$$a_{\overrightarrow{n},0}(\overline{k}) = \left(xP_{\overrightarrow{n}}, B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},1}\right)_1 + \left(xP_{\overrightarrow{n}}, B_{\overrightarrow{n}+\overrightarrow{e}_{\overline{k}},2}\right)_2;$$

$$a_{\overrightarrow{n},k} = \frac{(P_{\overrightarrow{n}}, x^{n_k})_k}{\left(P_{\overrightarrow{n}-\overrightarrow{e}_k}, x^{n_k-1}\right)_k}, \quad k = 1, 2.$$

Приметимо овде да коефицијенти $a_{\overrightarrow{n},k}$, $k = 1, 2$, не зависе од $\overline{k}$, па због тога неће мењати вредности при различитим изборима индекса $\overline{k}$. У случају две тежинске функције мулти-индекс $\overrightarrow{n}$ је облика $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2)$, па за $\overline{k} = 1$ и $\overline{k} = 2$ из релације (150) добијамо редом

$$\begin{aligned} xP_{(n_1,n_2)}(x) =& P_{(n_1+1,n_2)}(x) + a_{(n_1,n_2),0}(1)P_{(n_1,n_2)}(x) \\ &+ a_{(n_1,n_2),1}P_{(n_1-1,n_2)}(x) + a_{(n_1,n_2),2}P_{(n_1,n_2-1)}(x), \end{aligned} \tag{151}$$

$$\begin{aligned} xP_{(n_1,n_2)}(x) =& P_{(n_1,n_2+1)}(x) + a_{(n_1,n_2),0}(2)P_{(n_1,n_2)}(x) \\ &+ a_{(n_1,n_2),1}P_{(n_1-1,n_2)}(x) + a_{(n_1,n_2),2}P_{(n_1,n_2-1)}(x). \end{aligned} \tag{152}$$

Одузимање једнакости (152) од (151) доводи до везе суседних В.О.П. типа II

$$P_{(n_1+1,n_2)}(x) - P_{(n_1,n_2+1)}(x) = \left(a_{(n_1,n_2),0}(2) - a_{(n_1,n_2),0}(1)\right) \cdot P_{(n_1,n_2)}(x). \tag{153}$$

Рекурентне релације (151), (152) и (153), за $(n_1, n_2) \to (n_1, n_2 - 1)$ и $(n_1, n_2) \to (n_1 - 1, n_2)$, редом, формирају системе који се могу записати у матричном облику на следећи начин

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{n_1+1,n_2} = R^{(1)}_{(n_1,n_2)} \cdot \widetilde{\mathbf{P}}_{n_1,n_2}, \tag{154}$$

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{n_1,n_2+1} = R^{(2)}_{(n_1,n_2)} \cdot \widetilde{\mathbf{P}}_{n_1,n_2}, \tag{155}$$

при чему је

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{n_1,n_2} = \begin{bmatrix} P_{(n_1,n_2)}(x) \\ P_{(n_1-1,n_2)}(x) \\ P_{(n_1,n_2-1)}(x) \end{bmatrix},$$

а матрице $R^{(1)}_{(n_1,n_2)}$ и $R^{(2)}_{(n_1,n_2)}$ дате са

$$R^{(1)}_{(n_1,n_2)} = \begin{bmatrix} x - a_{(n_1,n_2),0}(1) & -a_{(n_1,n_2),1} & -a_{(n_1,n_2),2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_{(n_1,n_2-1),0}(2) - a_{(n_1,n_2-1),0}(1) \end{bmatrix}$$

и

$$R^{(2)}_{(n_1,n_2)} = \begin{bmatrix} x - a_{(n_1,n_2),0}(2) & -a_{(n_1,n_2),1} & -a_{(n_1,n_2),2} \\ 1 & a_{(n_1-1,n_2),0}(1) - a_{(n_1-1,n_2),0}(2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу $\widetilde{\mathbf{P}}_{n_1+1,n_2+1}$ можемо одредити из матрице $\widetilde{\mathbf{P}}_{n_1,n_2}$ на два начина користећи формуле (154) и (155). Ако прво искористимо матричну једнакост (154), а потом једнакост (155), добијамо

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{n_1+1,n_2+1} = R^{(1)}_{(n_1,n_2+1)} \cdot \widetilde{\mathbf{P}}_{n_1,n_2+1} = R^{(1)}_{(n_1,n_2+1)} \cdot R^{(2)}_{(n_1,n_2)} \cdot \widetilde{\mathbf{P}}_{n_1,n_2}. \tag{156}$$

У супротном, уколико прво применимо једнакост (155), а затим једнакост (154), онда се матрица $\widetilde{\mathbf{P}}_{n_1+1,n_2+1}$ може одредити на следећи начин

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{n_1+1,n_2+1} = R^{(2)}_{(n_1+1,n_2)} \cdot \widetilde{\mathbf{P}}_{n_1+1,n_2} = R^{(2)}_{(n_1+1,n_2)} \cdot R^{(1)}_{(n_1,n_2)} \cdot \widetilde{\mathbf{P}}_{n_1,n_2}. \tag{157}$$

Изједначавањем десних страна добијених израза долазимо до једнакости

$$R^{(1)}_{(n_1,n_2+1)} \cdot R^{(2)}_{(n_1,n_2)} = R^{(2)}_{(n_1+1,n_2)} \cdot R^{(1)}_{(n_1,n_2)},$$

при чему је

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{(n_1,n_2+1)} \cdot R^{(2)}_{(n_1,n_2)} = &\begin{bmatrix} x - a_{(n_1,n_2+1),0}(1) & -a_{(n_1,n_2+1),1} & -a_{(n_1,n_2+1),2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_{(n_1,n_2),0}(2) - a_{(n_1,n_2),0}(1) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} x - a_{(n_1,n_2),0}(2) & -a_{(n_1,n_2),1} & -a_{(n_1,n_2),2} \\ 1 & a_{(n_1-1,n_2),0}(1) - a_{(n_1-1,n_2),0}(2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = &\left[q^{(1)}_{ij}\right]_{3\times 3}, \end{aligned}$$

за

$$\begin{aligned} q^{(1)}_{11} &= \left(x - a_{(n_1,n_2+1),0}(1)\right)\left(x - a_{(n_1,n_2),0}(2)\right) - a_{(n_1,n_2+1),1} - a_{(n_1,n_2+1),2}, \\ q^{(1)}_{12} &= \left(x - a_{(n_1,n_2+1),0}(1)\right)\left(-a_{(n_1,n_2),1}\right) - a_{(n_1,n_2+1),1}\left(a_{(n_1-1,n_2),0}(1) - a_{(n_1-1,n_2),0}(2)\right), \\ q^{(1)}_{13} &= \left(x - a_{(n_1,n_2+1),0}(1)\right)\left(-a_{(n_1,n_2),2}\right), \\ q^{(1)}_{21} &= x - a_{(n_1,n_2),0}(2), \quad q^{(1)}_{22} = -a_{(n_1,n_2),1}, \quad q^{(1)}_{23} = -a_{(n_1,n_2),2}, \\ q^{(1)}_{31} &= x - a_{(n_1,n_2),0}(1), \quad q^{(1)}_{32} = -a_{(n_1,n_2),1}, \quad q^{(1)}_{33} = -a_{(n_1,n_2),2}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{(n_1+1,n_2)} \cdot R^{(1)}_{(n_1,n_2)} = &\begin{bmatrix} x - a_{(n_1+1,n_2),0}(2) & -a_{(n_1+1,n_2),1} & -a_{(n_1+1,n_2),2} \\ 1 & a_{(n_1,n_2),0}(1) - a_{(n_1,n_2),0}(2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} x - a_{(n_1,n_2),0}(1) & -a_{(n_1,n_2),1} & -a_{(n_1,n_2),2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_{(n_1,n_2-1),0}(2) - a_{(n_1,n_2-1),0}(1) \end{bmatrix} \\ = &\left[q^{(2)}_{ij}\right]_{3\times 3}, \end{aligned}$$

за

$$\begin{aligned} q^{(2)}_{11} &= \left(x - a_{(n_1+1,n_2),0}(2)\right)\left(x - a_{(n_1,n_2),0}(1)\right) - a_{(n_1+1,n_2),1} - a_{(n_1+1,n_2),2}, \\ q^{(2)}_{12} &= \left(x - a_{(n_1+1,n_2),0}(2)\right)\left(-a_{(n_1,n_2),1}\right), \\ q^{(2)}_{13} &= \left(x - a_{(n_1+1,n_2),0}(2)\right)\left(-a_{(n_1,n_2),2}\right) - a_{(n_1+1,n_2),2}\left(a_{(n_1,n_2-1),0}(2) - a_{(n_1,n_2-1),0}(1)\right), \\ q^{(2)}_{21} &= x - a_{(n_1,n_2),0}(2), \quad q^{(2)}_{22} = -a_{(n_1,n_2),1}, \quad q^{(2)}_{23} = -a_{(n_1,n_2),2}, \\ q^{(2)}_{31} &= x - a_{(n_1,n_2),0}(1), \quad q^{(2)}_{32} = -a_{(n_1,n_2),1}, \quad q^{(2)}_{33} = -a_{(n_1,n_2),2}. \end{aligned}$$

Упоређивањем одговарајућих елемената наведених матрица добијамо жељене диференцне формуле. Изједначавањем коефицијената уз променљиву x, у изразу добијеном посматрањем једнакости елемената на позицији $(1,1)$, добијамо једнакост

$$a_{(n_1+1,n_2),0}(2)-a_{(n_1,n_2),0}(2)=a_{(n_1,n_2+1),0}(1)-a_{(n_1,n_2),0}(1), \tag{158}$$

док једнакост слободних чланова у поменутом изразу даје

$$\begin{aligned}a_{(n_1+1,n_2),1}+a_{(n_1+1,n_2),2}-\left(a_{(n_1,n_2+1),1}+a_{(n_1,n_2+1),2}\right)=&a_{(n_1+1,n_2),0}(2)\cdot a_{(n_1,n_2),0}(1)\\&-a_{(n_1,n_2+1),0}(1)\cdot a_{(n_1,n_2),0}(2),\end{aligned}$$

односно

$$a_{(n_1+1,n_2),1}+a_{(n_1+1,n_2),2}-\left(a_{(n_1,n_2+1),1}+a_{(n_1,n_2+1),2}\right)=\begin{vmatrix}a_{(n_1+1,n_2),0}(2) & a_{(n_1,n_2),0}(2)\\ a_{(n_1,n_2+1),0}(1) & a_{(n_1,n_2),0}(1)\end{vmatrix}. \tag{159}$$

Пређимо сада на позицију $(1,2)$. Једнакост елемената на овим позицијама у посматраним матрицама доводи до једнакости

$$a_{(n_1,n_2),1}\left(a_{(n_1,n_2+1),0}(1)-a_{(n_1+1,n_2),0}(2)\right)=a_{(n_1,n_2+1),1}\left(a_{(n_1-1,n_2),0}(1)-a_{(n_1-1,n_2),0}(2)\right),$$

одакле користећи формулу (159) изводимо

$$\frac{a_{(n_1,n_2+1),1}}{a_{(n_1,n_2),1}}=\frac{a_{(n_1,n_2+1),0}(1)-a_{(n_1+1,n_2),0}(2)}{a_{(n_1-1,n_2),0}(1)-a_{(n_1-1,n_2),0}(2)}=\frac{a_{(n_1,n_2),0}(1)-a_{(n_1,n_2),0}(2)}{a_{(n_1-1,n_2),0}(1)-a_{(n_1-1,n_2),0}(2)}. \tag{160}$$

Коначно, елементи са позиције $(1,3)$ дају једнакост

$$a_{(n_1,n_2),2}\left(a_{(n_1,n_2+1),0}(1)-a_{(n_1+1,n_2),0}(2)\right)=a_{(n_1+1,n_2),2}\left(a_{(n_1,n_2-1),0}(1)-a_{(n_1,n_2-1),0}(2)\right)$$

одакле, поново користећи формулу (159), имамо

$$\frac{a_{(n_1+1,n_2),2}}{a_{(n_1,n_2),2}}=\frac{a_{(n_1,n_2+1),0}(1)-a_{(n_1+1,n_2),0}(2)}{a_{(n_1,n_2-1),0}(1)-a_{(n_1,n_2-1),0}(2)}=\frac{a_{(n_1,n_2),0}(1)-a_{(n_1,n_2),0}(2)}{a_{(n_1,n_2-1),0}(1)-a_{(n_1,n_2-1),0}(2)}. \tag{161}$$

Други део овог одељка посветићемо рекурентним релацијама које задовољавају вишеструко ортогонални полиноми типа II са произвољним мулти-индексима, а помоћу којих ће нам њихова конструкција бити доста олакшана.

Лема 4.1. *В.О.П. типа II $P_{(n_1,n_2)}$ са произвољним мулти-индексима, који су ортогонални у односу на билинеарну форму* (99), *задовољавају рекурентну релацију*

$$\begin{aligned}P_{(n_1,n_2+1)}(x)=&P_{(n_1+1,n_2)}(x)+\sum_{k=0}^{n_2-1}P_{(n_1+1,k)}(x)\prod_{i=k+1}^{n_2}\left(a_{(n_1,i),0}(1)-a_{(n_1,i),0}(2)\right)\\&+P_{(n_1,0)}(x)\prod_{i=0}^{n_2}\left(a_{(n_1,i),0}(1)-a_{(n_1,i),0}(2)\right).\end{aligned} \tag{162}$$

Доказ. Доказ ћемо спровести индукцијом по броју n, који представља дужину мулти-индекса (n_1, n_2), тј. $n = n_1 + n_2$.

За $n = 0$ је посматрани мулти-индекс $(n_1, n_2) = (0, 0)$, па из (153) имамо

$$P_{(0,1)}(x) = P_{(1,0)}(x) + \big(a_{(0,0),0}(1) - a_{(0,0),0}(2)\big) \cdot P_{(0,0)}(x),$$

што даје једнакост (162) за $(n_1, n_2) = (0, 0)$.

Претпоставимо сада да (162) важи за све мулти-индексе дужине $n = n_1 + n_2$, односно да је

$$\begin{aligned}P_{(n_1,n_2)}(x) =& P_{(n_1+1,n_2-1)}(x) + \sum_{k=0}^{n_2-2} P_{(n_1+1,k)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_2-1} \big(a_{(n_1,i),0}(1) - a_{(n_1,i),0}(2)\big) \\ &+ P_{(n_1,0)}(x) \prod_{i=0}^{n_2-1} \big(a_{(n_1,i),0}(1) - a_{(n_1,i),0}(2)\big)\end{aligned}$$

и покажимо да једнакост (162) важи за мулти-индекс $(n_1, n_2 + 1)$, чија је дужина једнака $n+1$. Користећи поново једнакост (153) и индукцијску претпоставку добијамо

$$\begin{aligned}P_{(n_1,n_2+1)}(x) =& P_{(n_1+1,n_2)}(x) + \big(a_{(n_1,n_2),0}(1) - a_{(n_1,n_2),0}(2)\big) \cdot P_{(n_1,n_2)}(x) \\ =& P_{(n_1+1,n_2)}(x) + \big(a_{(n_1,n_2),0}(1) - a_{(n_1,n_2),0}(2)\big) \cdot \Bigg[P_{(n_1+1,n_2-1)}(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{n_2-2} P_{(n_1+1,k)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_2-1} \big(a_{(n_1,i),0}(1) - a_{(n_1,i),0}(2)\big) \\ &+ P_{(n_1,0)}(x) \prod_{i=0}^{n_2-1} \big(a_{(n_1,i),0}(1) - a_{(n_1,i),0}(2)\big) \Bigg] \\ =& P_{(n_1+1,n_2)}(x) + \big(a_{(n_1,n_2),0}(1) - a_{(n_1,n_2),0}(2)\big) \cdot P_{(n_1+1,n_2-1)}(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{n_2-2} P_{(n_1+1,k)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_2} \big(a_{(n_1,i),0}(1) - a_{(n_1,i),0}(2)\big) \\ &+ P_{(n_1,0)}(x) \prod_{i=0}^{n_2} \big(a_{(n_1,i),0}(1) - a_{(n_1,i),0}(2)\big) \\ =& P_{(n_1+1,n_2)}(x) + \sum_{k=0}^{n_2-1} P_{(n_1+1,k)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_2} \big(a_{(n_1,i),0}(1) - a_{(n_1,i),0}(2)\big) \\ &+ P_{(n_1,0)}(x) \prod_{i=0}^{n_2} \big(a_{(n_1,i),0}(1) - a_{(n_1,i),0}(2)\big),\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

На сличан начин доказујемо и наредну лему.

Лема 4.2. *В.О.П. типа II $P_{(n_1,n_2)}$ са произвољним мулти-индексима, који су ортогонални у односу на билинеарну форму (99), задовољавају рекурентну релацију*

$$P_{(n_1+1,n_2)}(x) = P_{(n_1,n_2+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n_1-1} P_{(k,n_2+1)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_1} \big(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\big) \tag{163}$$

$$+ P_{(0,n_2)}(x) \prod_{i=0}^{n_1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i.n_2),0}(1)\right).$$

Доказ. Као у претходној леми доказ спроводимо индукцијом по броју n, који представља дужину мулти-индекса (n_1, n_2).

За $n = 0$, тј. за мулти-индекс $(n_1, n_2) = (0, 0)$, применом формуле (153) добијамо жељену једнакост

$$P_{(1,0)}(x) = P_{(0,1)}(x) + \left(a_{(0,0),0}(2) - a_{(0,0),0}(1)\right) \cdot P_{(0,0)}(x).$$

Претпоставимо сада да релација (163) важи за све мулти-индексе дужине $n = n_1 + n_2$, односно да је

$$\begin{aligned}
P_{(n_1,n_2)}(x) =& P_{(n_1-1,n_2+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n_1-2} P_{(k,n_2+1)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_1-1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\right) \\
&+ P_{(0,n_2)}(x) \prod_{i=0}^{n_1-1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\right)
\end{aligned}$$

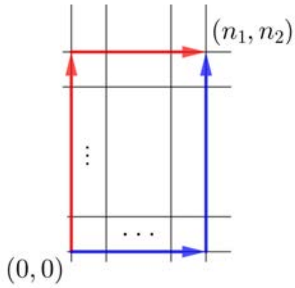
и покажимо да једнакост (163) важи за мулти-индекс $(n_1 + 1, n_2)$, дужине $n + 1$. Користећи поново једнакост (153) и индукцијску претпоставку имамо

$$\begin{aligned}
P_{(n_1+1,n_2)}(x) =& P_{(n_1,n_2+1)}(x) + \left(a_{(n_1,n_2),0}(2) - a_{(n_1,n_2),0}(1)\right) \cdot P_{(n_1,n_2)}(x) \\
=& P_{(n_1,n_2+1)}(x) + \left(a_{(n_1,n_2),0}(2) - a_{(n_1,n_2),0}(1)\right) \cdot \Bigg[P_{(n_1-1,n_2+1)}(x) \\
&+ \sum_{k=0}^{n_1-2} P_{(k,n_2+1)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_1-1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\right) \\
&+ P_{(0,n_2)}(x) \prod_{i=0}^{n_1-1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\right) \Bigg] \\
=& P_{(n_1,n_2+1)}(x) + \left(a_{(n_1,n_2),0}(2) - a_{(n_1,n_2),0}(1)\right) \cdot P_{(n_1-1,n_2+1)}(x) \\
&+ \sum_{k=0}^{n_1-2} P_{(k,n_2+1)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\right) \\
&+ P_{(0,n_2)}(x) \prod_{i=0}^{n_1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\right) \\
=& P_{(n_1,n_2+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n_1-1} P_{(k,n_2+1)}(x) \prod_{i=k+1}^{n_1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\right) \\
&+ P_{(0,n_2)}(x) \prod_{i=0}^{n_1} \left(a_{(i,n_2),0}(2) - a_{(i,n_2),0}(1)\right),
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Комбинујући сада рекурентне релације најближих суседа, које су представљене формулама (151) и (152), са рекурентним релацијама које смо доказали кроз последње две леме, показаћемо како на једноставан начин можемо одредити В.О.П. типа

II рачунајући само маргиналне полиноме. У овом поступку постоје две могуће путање за конструисање жељеног В.О.П. које су приказане на слици 1. У наставку ћемо описати оба начина.



Слика 1: Две путање за мулти-индексе од $(0,0)$ до (n_1, n_2)

(1) Додељујући вредности $n_1 = 0, 1, \ldots, n-1$ и $n_2 = 0$ у рекурентној релацији (151) добијамо

$$\begin{aligned}
&xP_{(0,0)}(x) = P_{(1,0)}(x) + a_{(0,0),0}(1)P_{(0,0)}(x),\\
&xP_{(1,0)}(x) = P_{(2,0)}(x) + a_{(1,0),0}(1)P_{(1,0)}(x) + a_{(1,0),1}P_{(0,0)}(x),\\
&xP_{(2,0)}(x) = P_{(3,0)}(x) + a_{(2,0),0}(1)P_{(2,0)}(x) + a_{(2,0),1}P_{(1,0)}(x),\\
&\quad\vdots\\
&xP_{(n-1,0)}(x) = P_{(n,0)}(x) + a_{(n-1,0),0}(1)P_{(n-1,0)}(x) + a_{(n-1,0),1}P_{(n-2,0)}(x).
\end{aligned}$$

Даље, постављање вредности $n_1 = n$ и $n_2 = 0, 1$ у формули (152) даје везе којима се врши прелазак са једне маргине на другу, тј. формуле

$$\begin{aligned}
&xP_{(n,0)}(x) = P_{(n,1)}(x) + a_{(n,0),0}(2)P_{(n,0)}(x) + a_{(n,0),1}P_{(n-1,0)}(x),\\
&xP_{(n,1)}(x) = P_{(n,2)}(x) + a_{(n,1),0}(2)P_{(n,1)}(x) + a_{(n,1),1}P_{(n-1,1)}(x) + a_{(n,1),2}P_{(n,0)}(x).
\end{aligned}$$

Користећи сада формулу (162), за $(n_1, n_2) = (n-1, 0)$, имамо

$$P_{(n-1,1)}(x) = P_{(n,0)}(x) + P_{(n-1,0)}(x) \cdot \left(a_{(n-1,0),0}(1) - a_{(n-1,0),0}(2)\right),$$

чиме се претходна једнакост своди на

$$\begin{aligned}
xP_{(n,1)}(x) =& P_{(n,2)}(x) + a_{(n,1),0}(2)P_{(n,1)}(x) + \left(a_{(n,1),1} + a_{(n,1),2}\right) P_{(n,0)}(x)\\
&+ a_{(n,1),1}\left(a_{(n-1,0),0}(1) - a_{(n-1,0),0}(2)\right) P_{(n-1,0)}(x).
\end{aligned}$$

За формирање В.О.П. чији се мулти-индекси крећу по другој маргини применимо најпре формулу (152) за $n_1 = n$ и $n_2 = 2$, а затим релацију (162) за $(n_1, n_2) = (n-1, 1)$:

$$\begin{aligned}
xP_{(n,2)}(x) =& P_{(n,3)}(x) + a_{(n,2),0}(2)P_{(n,2)}(x) + a_{(n,2),1}P_{(n-1,2)}(x) + a_{(n,2),2}P_{(n,1)}(x)\\
=& P_{(n,3)}(x) + a_{(n,2),0}(2)P_{(n,2)}(x) + a_{(n,2),2}P_{(n,1)}(x) + a_{(n,2),1}\Big[P_{(n,1)}(x)\\
&+ P_{(n,0)}(x)\left(a_{(n-1,1),0}(1) - a_{(n-1,1),0}(2)\right)\\
&+ P_{(n-1,0)}(x)\left(a_{(n-1,0),0}(1) - a_{(n-1,0),0}(2)\right)\left(a_{(n-1,1),0}(1) - a_{(n-1,1),0}(2)\right)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&P_{(n,3)}(x) + a_{(n,2),0}(2)P_{(n,2)}(x) + \left(a_{(n,2),2} + a_{(n,2),1}\right) P_{(n,1)}(x) \\
&+ a_{(n,2),1}\left(a_{(n-1,1),0}(1) - a_{(n-1,1),0}(2)\right) P_{(n,0)}(x) \\
&+ a_{(n,2),1}\left(a_{(n-1,0),0}(1) - a_{(n-1,0),0}(2)\right)\left(a_{(n-1,1),0}(1) - a_{(n-1,1),0}(2)\right) P_{(n-1,0)}(x).
\end{aligned}
$$

Истим поступком добијамо формуле за $xP_{(n,n_2)}(x)$, за све $n_2 = 3, \dots, m-1$. Последња формула у овом низу ће бити облика

$$
\begin{aligned}
xP_{(n,m-1)}(x) =&P_{(n,m)}(x) + a_{(n,m-1),0}(2)P_{(n,m-1)}(x) + \left(a_{(n,m-1),1} + a_{(n,m-1),2}\right) P_{(n,m-2)}(x) \\
&+ a_{(n,m-1),1}\sum_{k=0}^{m-3}\prod_{i=k+1}^{m-2}\left(a_{(n-1,i),0}(1) - a_{(n-1,i),0}(2)\right) P_{(n,k)}(x) \\
&+ a_{(n,m-1),1}\prod_{i=0}^{m-2}\left(a_{(n-1,i),0}(1) - a_{(n-1,i),0}(2)\right) P_{(n-1,0)}(x).
\end{aligned}
$$

Сада добијене једнакости можемо записати у матричном облику

$$
x\mathbf{P}^{(1)}_{(n,m)} = C^{(1)}_{(n,m)} \cdot \mathbf{P}^{(1)}_{(n,m)} + P_{(n,m)} \cdot \mathbf{e}_{(n,m)},
$$

где су

$$
\mathbf{P}^{(1)}_{(n,m)} = \begin{bmatrix} P_{(0,0)}(x) \\ P_{(1,0)}(x) \\ \vdots \\ P_{(n,0)}(x) \\ P_{(n,1)}(x) \\ \vdots \\ P_{(n,m-1)}(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{(n,m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^{(1)}_{(n,m)} = \begin{bmatrix} A^{(1)}_{(n,m)} \\ B^{(1)}_{(n,m)} \end{bmatrix},
$$

при чему је

$$
A^{(1)}_{(n,m)} = \left[\widehat{A}^{(1)}_{(n,m)} \,\middle|\, [0]_{n\times(m-1)}\right], \quad B^{(1)}_{(n,m)} = \left[[0]_{m\times(n-1)} \,\middle|\, \widehat{B}^{(1)}_{(n,m)}\right].
$$

Матрице $\widehat{A}^{(1)}_{(n,m)}$ и $\widehat{B}^{(1)}_{(n,m)}$ дате су са

$$
\widehat{A}^{(1)}_{(n,m)} = \begin{bmatrix} a_{(0,0),0}(1) & 1 & & & \\ a_{(1,0),1} & a_{(1,0),0}(1) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{(n-1,0),1} & a_{(n-1,0),0}(1) & 1 \end{bmatrix}
$$

и $\widehat{B}^{(1)}_{(n,m)} = \left[\widehat{b}^{(1)}_{ij}\right]_{m\times(m+1)}$, за

$$
\widehat{b}^{(1)}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{за } j > i+2, \\ 1, & \text{за } j = i+2, \\ a_{(n,0),1}, & \text{за } i = j = 1, \\ a_{(n,i-1),0}(2), & \text{за } j = i+1, \\ a_{(n,i-1),1} + a_{(n,i-1),2}, & \text{за } j = i, \quad i = 2, \dots, m, \\ a_{(n,i-1),1}\prod^{(1)}_{(j-1,i-2)}, & \text{иначе}, \end{cases}
$$

где је $\prod_{(k,l)}^{(1)} = \prod_{i=k}^{l} \left(a_{(n-1,i),0}(1) - a_{(n-1,i),0}(2)\right)$.

Ако са x_i, $i = 1, \ldots, n+m$, означимо нуле В.О.П. типа II $P_{(n,m)}(x)$, онда из претходне матричне једначине добијамо

$$x_i \mathbf{P}_{(n,m)}^{(1)}(x_i) = C_{(n,m)}^{(1)} \cdot \mathbf{P}_{(n,m)}^{(1)}(x_i),$$

одакле лако видимо да су тачке x_i сопствене вредности матрице $C_{(n,m)}^{(1)}$, а $\mathbf{P}_{(n,m)}^{(1)}(x_i)$ одговарајући сопствени вектори.

(2) Посматрајмо сада конструкцију полинома $P_{(n,m)}(x)$ на други начин. Додељујући вредности $n_1 = 0$ и $n_2 = 0, 1, \ldots, m-1$ у релацији (152) добијамо

$$\begin{aligned}
&xP_{(0,0)}(x) = P_{(0,1)}(x) + a_{(0,0),0}(2)P_{(0,0)}(x),\\
&xP_{(0,1)}(x) = P_{(0,2)}(x) + a_{(0,1),0}(2)P_{(0,1)}(x) + a_{(0,1),2}P_{(0,0)}(x),\\
&xP_{(0,2)}(x) = P_{(0,3)}(x) + a_{(0,2),0}(2)P_{(0,2)}(x) + a_{(0,2),2}P_{(0,1)}(x),\\
&\quad\vdots\\
&xP_{(0,m-1)}(x) = P_{(0,m)}(x) + a_{(0,m-1),0}(2)P_{(0,m-1)}(x) + a_{(0,m-1),2}P_{(0,m-2)}(x).
\end{aligned}$$

Даље, постављање вредности $n_1 = 0, 1$ и $n_2 = m$ у формули (151) даје везе којима се врши прелазак са једне на другу маргину, тј. формуле

$$\begin{aligned}
&xP_{(0,m)}(x) = P_{(1,m)}(x) + a_{(0,m),0}(1)P_{(0,m)}(x) + a_{(0,m),2}P_{(0,m-1)}(x),\\
&xP_{(1,m)}(x) = P_{(2,m)}(x) + a_{(1,m),0}(1)P_{(1,m)}(x) + a_{(1,m),1}P_{(0,m)}(x) + a_{(1,m),2}P_{(1,m-1)}(x).
\end{aligned}$$

Користећи сада формулу (163), за $(n_1, n_2) = (0, m-1)$, имамо

$$P_{(1,m-1)}(x) = P_{(0,m)}(x) + P_{(0,m-1)}(x) \cdot \left(a_{(0,m-1),0}(2) - a_{(0,m-1),0}(1)\right),$$

чиме се претходна једнакост своди на

$$\begin{aligned}
xP_{(1,m)}(x) =& P_{(2,m)}(x) + a_{(1,m),0}(1)P_{(1,m)}(x) + \left(a_{(1,m),1} + a_{(1,m),2}\right)P_{(0,m)}(x)\\
&+ a_{(1,m),2}\left(a_{(0,m-1),0}(2) - a_{(0,m-1),0}(1)\right)P_{(0,m-1)}(x).
\end{aligned}$$

За формирање В.О.П. чији се мулти-индекси крећу по другој маргини користимо најпре формулу (151) за $n_1 = n$ и $n_2 = 2$, а затим релацију (163) за $(n_1, n_2) = (n-1, 1)$:

$$\begin{aligned}
xP_{(2,m)}(x) =& P_{(3,m)}(x) + a_{(2,m),0}(1)P_{(2,m)}(x) + \left(a_{(2,m),1} + a_{(2,m),2}\right)P_{(1,m)}(x)\\
&+ a_{(2,m),2}\left(a_{(1,m-1),0}(2) - a_{(1,m-1),0}(1)\right)P_{(0,m)}(x)\\
&+ a_{(2,m),2}\left(a_{(1,m-1),0}(2) - a_{(1,m-1),0}(1)\right)\left(a_{(0,m-1),0}(2) - a_{(0,m-1),0}(1)\right)P_{(0,m-1)}(x).
\end{aligned}$$

Истим поступком добијамо формуле за $xP_{(n_1,m)}(x)$, за све $n_1 = 3, \ldots, n-1$. Последња формула у низу ће бити облика

$$\begin{aligned}
xP_{(n-1,m)}(x) =& P_{(n,m)}(x) + a_{(n-1,m),0}(1)P_{(n-1,m)}(x) + \left(a_{(n-1,m),1} + a_{(n-1,m),2}\right)P_{(n-2,m)}(x)\\
&+ a_{(n-1,m),2}\sum_{k=0}^{n-3}\prod_{i=k+1}^{n-2}\left(a_{(i,m-1),0}(2) - a_{(i,m-1),0}(1)\right)P_{(k,m)}(x)
\end{aligned}$$

$$+ a_{(n-1,m),2} \prod_{i=0}^{n-2} \left(a_{(i,m-1),0}(2) - a_{(i,m-1),0}(1) \right) P_{(0,m-1)}(x).$$

Добијене једнакости можемо записати у матричном облику

$$x\mathbf{P}_{(n,m)}^{(2)} = C_{(n,m)}^{(2)} \cdot \mathbf{P}_{(n,m)}^{(2)} + P_{(n,m)} \cdot \mathbf{e}_{(n,m)},$$

где су

$$\mathbf{P}_{(n,m)}^{(2)} = \begin{bmatrix} P_{(0,0)}(x) \\ P_{(0,1)}(x) \\ \vdots \\ P_{(0,m)}(x) \\ P_{(1,m)}(x) \\ \vdots \\ P_{(n-1,m)}(x) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{(n,m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{(n,m)}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_{(n,m)}^{(2)} \\ B_{(n,m)}^{(2)} \end{bmatrix},$$

при чему је

$$A_{(n,m)}^{(2)} = \left[\widehat{A}_{(n,m)}^{(2)} \,\middle|\, [0]_{m\times(n-1)} \right], \quad B_{(n,m)}^{(2)} = \left[[0]_{n\times(m-1)} \,\middle|\, \widehat{B}_{(n,m)}^{(2)} \right].$$

Матрице $\widehat{A}_{(n,m)}^{(2)}$ и $\widehat{B}_{(n,m)}^{(2)}$ дате су са

$$\widehat{A}_{(n,m)}^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{(0,0),0}(2) & 1 & & & \\ a_{(0,1),2} & a_{(0,1),0}(2) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{(0,m-1),2} & a_{(0,m-1),0}(2) & 1 \end{bmatrix}$$

и $\widehat{B}_{(n,m)}^{(2)} = \left[\widehat{b}_{ij}^{(2)} \right]_{n\times(n+1)}$, за

$$\widehat{b}_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{за } j > i+2, \\ 1, & \text{за } j = i+2, \\ a_{(0,m),2}, & \text{за } i = j = 1, \\ a_{(i-1,m),0}(1), & \text{за } j = i+1, \\ a_{(i-1,m),1} + a_{(i-1,m),2}, & \text{за } j = i, \quad i = 2, \ldots, n, \\ a_{(i-1,m),2} \prod_{(j-1,i-2)}^{(2)}, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где је $\prod_{(k,l)}^{(2)} = \prod_{i=k}^{l} \left(a_{(i,m-1),0}(2) - a_{(i,m-1),0}(1) \right)$.

Ако са x_i, $i = 1, \ldots, n+m$, означимо нуле В.О.П. типа II $P_{(n,m)}(x)$, онда из претходне матричне једначине добијамо

$$x_i \mathbf{P}_{(n,m)}^{(2)}(x_i) = C_{(n,m)}^{(2)} \cdot \mathbf{P}_{(n,m)}^{(2)}(x_i),$$

одакле лако видимо да су тачке x_i сопствене вредности матрице $C_{(n,m)}^{(2)}$, а $\mathbf{P}_{(n,m)}^{(2)}(x_i)$ одговарајући сопствени вектори.

4.2 Скуп анти-Gauss-ових квадратурних формула

У овом поглављу увешћемо скуп анти-Gauss-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу. То је заправо скуп квадратурних формула облика

$$H_{n+1}^{(k)} f = \sum_{i=1}^{n+1} A_{k,i} f(x_i), \quad k = 1, \dots, r, \tag{164}$$

таквих да су чворови x_i, $i = 1, \dots, n+1$, исти за све формуле.

Нека је $W = (w_1, \dots, w_r)$ један AT систем. По узору на [4, Definition 3] уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 4.4. *Нека је W AT систем, $n \in \mathbb{N}$ и $(n_1, \dots, n_r)$ произвољан мулти-индекс дужине $n+1$. Скуп квадратурних формула облика* (164) *назива се скупом анти-*Gauss-*ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у* Borges-*овом смислу ако и само ако чворови x_i и тежински коефицијенти $A_{k,i}$, $i = 1, \dots, n+1$, задовољавају следеће једначине:*

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_{k,i} = (1,1)_k, \tag{165}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_{k,i} x_i^j = \left(x^j, 1\right)_k, \quad j = 1, \dots, n+n_k, \tag{166}$$

за свако $k = 1, \dots, r$.

Сада можемо доказати да важи уопштење фундаменталне теореме за Gauss-Christoffel-ове квадратурне формуле.

Теорема 4.14. *Нека је W AT систем, $n \in \mathbb{N}$ и $(n_1, \dots, n_r)$ произвољан мулти-индекс дужине $n+1$. Скуп квадратурних формула облика* (164) *формира један скуп анти-*Gauss-*ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у* Borges-*овом смислу ако и само ако су испуњена следећа два услова:*

(*i*) *једнакост $H_{n+1}^{(k)} p = \left(2I_k - G_n^{(k)}\right) p$, $k = 1, \dots, r$, је задовољена за све полиноме p степена мањег или једнаког n;*

(*ii*) *полином $Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)$ је В.О.П. типа II у односу на билинеарне форме* (99).

Доказ. Претпоставимо најпре да квадратурне формуле (164) формирају скуп анти-Gauss-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу.

За свако $k = 1, \dots, r$ одговарајућа једнакост $H_{n+1}^{(k)} p = \left(2I_k - G_n^{(k)}\right) p$ је, према дефиницији 4.4, испуњена за све полиноме степена мањег или једнаког $n + n_k$, а тиме и за полиноме степена мањег или једнаког n, што доказује први услов.

Даље, за свако $k = 1, \ldots, r$ претпоставимо да је $p_k(x)$ полином степена не већег од $n_k - 1$. Тада је степен полинома $Q(x)p_k(x)$ мањи или једнак $n+1+n_k-1 = n+n_k$, па из услова (165) и (166) следи

$$(Q, p_k)_k = (Qp_k, 1)_k = \sum_{i=1}^{n+1} A_{k,i} Q(x_i) p_k(x_i).$$

Како је $Q(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n+1$, то важи $(Q, p_k)_k = 0$, $k = 1, \ldots, r$. Дакле, $Q(x)$ је В.О.П. типа II у односу на билинеарне форме (99). Тиме је доказ у овом смеру завршен.

Претпоставимо сада да услови (i) и (ii) важе за квадратурне формуле (164). Нека је $p_k(x)$ полином степена мањег или једнаког $n + n_k$, за $k = 1, \ldots, r$. Тада се он може записати у облику $p_k(x) = Q(x)s_k(x) + r(x)$, где је $s_k(x)$ полином степена не већег од $n_k - 1$, а $r(x)$ полином степена мањег или једнаког n. На основу тога важи

$$\begin{aligned}(p_k, 1)_k &= (Qs_k + r, 1)_k = (Qs_k, 1)_k + (r, 1)_k = (Q, s_k)_k + (r, 1)_k \\ &= 0 + (r, 1)_k = \left(2I_k - G_n^{(k)}\right)(r) = H_{n+1}^{(k)}(r) = \sum_{i=1}^{n+1} A_{k,i} r(x_i).\end{aligned}$$

Како је $Q(x_i) = 0$, за $i = 1, \ldots, n+1$, то добијамо

$$(p_k, 1)_k = \sum_{i=1}^{n+1} A_{k,i} r(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} A_{k,i}[Q(x_i)s_k(x_i) + r(x_i)] = \sum_{i=1}^{n+1} A_{k,i} p_k(x_i).$$

Дакле, једнакости (165) и (166) важе, па квадратурне формуле (164) образују један скуп анти-Gauss-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу. □

Као што смо показали у претходној теореми, чворови скупа анти- Gauss-ових квадратурних формула су нуле В.О.П. типа II, чији је мулти-индекс дужине $n+1$, са ортогоналношћу у односу на билинеарне форме (99).

Посматрајмо најпре случај када је мулти-индекс поменутог В.О.П. типа II скоро дијагоналан, односно када су чворови x_i, $i = 1, \ldots, n+1$, нуле В.О.П. $P_{n+1}(x)$. Тада ове тачке можемо одредити као сопствене вредности одговарајуће тракасте Hessenberg-ове матрице

$$M_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{0,r} & 1 & & & & & & \\ a_{1,r-1} & a_{1,r} & 1 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ a_{r,0} & \cdots & a_{r,r-1} & a_{r,r} & 1 & & & \\ & a_{r+1,0} & \cdots & a_{r+1,r-1} & a_{r+1,r} & 1 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1,0} & \cdots & a_{n-1,r-1} & a_{n-1,r} & 1 \\ & & & & a_{n,0} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \widehat{a}_{0,r} & 1 & & & & & & & \\ \widehat{a}_{1,r-1} & \widehat{a}_{1,r} & 1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ \widehat{a}_{r,0} & \cdots & \widehat{a}_{r,r-1} & \widehat{a}_{r,r} & 1 & & & & \\ & \widehat{a}_{r+1,0} & \cdots & \widehat{a}_{r+1,r-1} & \widehat{a}_{r+1,r} & 1 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \widehat{a}_{n-1,0} & \cdots & \widehat{a}_{n-1,r-1} & \widehat{a}_{n-1,r} & 1 \\ & & & & 2\cdot\widehat{a}_{n,0} & \cdots & 2\cdot\widehat{a}_{n,r-1} & \widehat{a}_{n,r} \end{bmatrix}.$$

Након израчунавања чворова, тежински коефицијенти $A_{k,i}$, $k = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, n+1$, могу се одредити тако да задовољавају следеће VANDERMONDE-ове системе једначина

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) \begin{bmatrix} A_{k,1} \\ A_{k,2} \\ \vdots \\ A_{k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^{(k)} \\ \mu_1^{(k)} \\ \vdots \\ \mu_n^{(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, r,$$

где је $\mu_i^{(k)} = (x^i, 1)_k$, за $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, r$.

Сопствени вектор који одговара сопственој вредности x_i матрице M_{n+1} је дат са $\mathbf{P}_{n+1}(x_i)$, где је $\mathbf{P}_{n+1} = [\ P_0(x) \quad P_1(x) \quad \dots \quad P_n(x)\ ]^T$. Ову чињеницу можемо искористити за израчунавање тежинских коефицијената $A_{k,i}$, уз услов да свака формула тачно генерише први $n+1$ модификовани момент. Дакле, тежински коефицијенти се могу одредити решавањем система

$$\tag{167} V_{n+1} \cdot \begin{bmatrix} A_{k,1} \\ A_{k,2} \\ \vdots \\ A_{k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^{*(k)} \\ \mu_1^{*(k)} \\ \vdots \\ \mu_n^{*(k)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, r,$$

где је $V_{n+1} = [\ \mathbf{P}_{n+1}(x_1) \quad \mathbf{P}_{n+1}(x_2) \quad \dots \quad \mathbf{P}_{n+1}(x_{n+1})\ ]$, а $\mu_i^{*(k)} = (P_i, 1)_k$, $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, r$ су модификовани моменти. На основу хипотезе 4.1 знамо да су у овом случају чворови међусобно различити.

Како је једнакост $G_n^{(k)} p = I_k p$ испуњена за све полиноме p степена мањег или једнаког $n-1$, као и $P_j(x) = \widehat{P}_j(x)$, за свако $j \leqslant n$, то за $i = 0, 1, \dots, n-1$ важи

$$\mu_i^{*(k)} = (P_i, 1)_k = \left(2I_k - G_n^{(k)}\right)(P_i) = I_k(P_i) + 0 = I_k(\widehat{P}_i) = \widehat{\mu}_i^{*(k)},$$

док је за $i = n$:

$$\mu_n^{*(k)} = (P_n, 1)_k = 2I_k(P_n) - G_n^{(k)}(P_n) = 2I_k(\widehat{P}_n) + 0 = 2I_k(\widehat{P}_n) = 2\widehat{\mu}_n^{*(k)}.$$

Дакле, на једноставан начин можемо израчунати потребне модификоване моменте.

Пређимо сада на случај када су чворови скупа анти-GAUSS-ових квадратурних формула нуле В.О.П. типа II са произвољним мулти-индексом дужине $n+1$, тј. полинома $P_{(n_1,n_2)}(x)$, за $n_1 + n_2 = n+1$, са ортогоналношћу у односу на билинеарне форме (99).

У претходном одељку смо видели да се, у зависности од путање конструисања В.О.П. $P_{(n_1,n_2)}(x)$, нуле овог полинома могу одредити као сопствене вредности матрица $C^{(1)}_{(n_1,n_2)}$ и $C^{(2)}_{(n_1,n_2)}$. Како је начин одређивања тежинских коефицијената у оба случаја сличан, овде ћемо представити само један од њих. Претпоставимо да смо чворове x_i, $i=1,\ldots,n+1$, израчунали као сопствене вредности матрице $C^{(1)}_{(n_1,n_2)}$. Тада су одговарајући сопствени вектори дати са $\mathbf{P}^{(1)}_{(n_1,n_2)}(x_i)$, $i=1,\ldots,n+1$, што можемо искористити за одређивање тежинских коефицијената $A_{k,i}$, $k=1,\ldots,r$, $i=1,\ldots,n+1$, уз услов да свака формула тачно генерише модификоване моменте. Дакле, тежински коефицијенти се могу одредити решавањем система

$$V^{(1)}_{(n_1,n_2)} \cdot \begin{bmatrix} A_{k,1} \\ A_{k,2} \\ \vdots \\ A_{k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{*(k)}_{(0,0)} \\ \mu^{*(k)}_{(1,0)} \\ \vdots \\ \mu^{*(k)}_{(n_1,0)} \\ \mu^{*(k)}_{(n_1,1)} \\ \vdots \\ \mu^{*(k)}_{(n_1,n_2-1)} \end{bmatrix}, \quad k=1,\ldots,r, \tag{168}$$

где је $V^{(1)}_{(n_1,n_2)} = [\ \mathbf{P}^{(1)}_{(n_1,n_2)}(x_1)\ \ \mathbf{P}^{(1)}_{(n_1,n_2)}(x_2)\ \ \ldots\ \ \mathbf{P}^{(1)}_{(n_1,n_2)}(x_{n+1})\ ]$, а $\mu^{*(k)}_{(i,j)} = (P_{(i,j)},1)_k$, $i=0,1,\ldots,n_1$, $j=0,1,\ldots,n_2-1$, $k=1,\ldots,r$ су модификовани моменти.

Коначно, са формираним скуповима квадратурних формула $\{G^{(k)}_n, k=1,\ldots,r\}$ и $\{H^{(k)}_{n+1}, k=1,\ldots,r\}$, можемо дефинисати скуп такозваних *усредњених* Gauss-*ових квадратурних формула* са

$$L^{(k)}_{2n+1}p = \frac{G^{(k)}_n + H^{(k)}_{n+1}}{2}p, \quad k=1,\ldots,r. \tag{169}$$

Ове квадратурне формуле су тачне за све полиноме степена мањег или једнаког n.

4.3 Нумерички примери

У овом поглављу ћемо посматрати AT систем састављен од Jacobi-јевих тежинских функција на интервалу $[-1,1]$, са различитим сингуларитетима у -1 и истим сингуларитетима у 1. Дакле, тежинске функције су облика

$$w_k(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta_k}, \quad k=1,\ldots,r,$$

где су $\alpha, \beta_k > -1$, $k=1,\ldots,r$, и $\beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$, кадгод је $i \neq j$. Приказаћемо вредности параметара анти-Gauss-ових квадратурних формула (164), као и грешке које настају применом оптималног скупа квадратурних формула у Borges-овом смислу, одговарајућег скупа анти-Gauss-ових квадратурних формула и скупа усредњених Gauss-ових квадратурних формула, са изабраним интеграндом.

Сва израчунавања су изведена помоћу софтвера Wolfram Mathematica уз коришћење пакета OrthogonalPolynomials (видети [12, 38]), са тачношћу од 32 значајне цифре.

Пример 4.4. *У овом примеру изаберимо $r = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta_1 = -1/4$, $\beta_2 = 1/4$, $\beta_3 = 1$ и посматрајмо само скоро дијагоналне мулти-индексе. За $n = 16$ одговарајући мулти-индекс је $(6, 5, 5)$. Чворови x_i и тежински коефицијенти $A_{k,i}$, $i = 1, \ldots, 17$, скупа анти-*Gauss*-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у* Borges*-овом смислу приказани су у табели 7. Чворови x_i су нуле В.О.П. типа II $P_{(6,6,5)}(x)$, који је ортогоналан у односу на билинеарне форме $(f, g)_k = (2I_k - G_{16}^{(k)})(fg)$, $k = 1, 2, 3$.*

Грешке настале применом оптималног скупа квадратурних формула у Borges*-овом смислу $\{G_n^{(k)}, k = 1, 2, 3\}$, одговарајућег скупа анти-*Gauss*-ових квадратурних формула $\{H_{n+1}^{(k)}, k = 1, 2, 3\}$, као и скупа усредњених* Gauss*-ових квадратурних формула $\{L_{2n+1}^{(k)}, k = 1, 2, 3\}$, за интегранд $f(x) = x^{22}$, са $n = 12, 14, 16$, дате су у табели 8. Добијене вредности потврђују једнакости наведене у дефиницији 4.4. На основу нумеричких експеримената можемо закључити да за полиноме вишег степена грешке настале применом квадратурних формула $G_n^{(k)}$ и $H_{n+1}^{(k)}$ су истог реда величине, док усредњена формула $L_{2n+1}^{(k)}$ даје бољу апроксимацију.*

Табела 7: Параметри скупа анти-Gauss-ових квадратурних формула у случају AT система Jacobi-јевих тежинских функција за $r = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta_1 = -1/4$, $\beta_2 = 1/4$, $\beta_3 = 1$

i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$	$A_{3,i}$
1	-1.031539859	$0.312899937(-5)$	$-0.503809309(-6)$	$-0.278072061(-8)$
2	-0.998780620	$0.336817565(-1)$	$0.116431522(-2)$	$0.762257336(-5)$
3	-0.986217531	$0.942656200(-1)$	$0.110663646(-1)$	$0.445156586(-3)$
4	-0.949869240	0.149840317	$0.335491068(-1)$	$0.355434152(-2)$
5	-0.883258126	0.194669748	$0.665138054(-1)$	$0.132840894(-1)$
6	-0.783540775	0.228157064	0.106150482	$0.336863569(-1)$
7	-0.650649076	0.248651112	0.146967516	$0.667832847(-1)$
8	-0.487338583	0.254990473	0.182574143	0.110614547
9	-0.299028064	0.247139226	0.206915011	0.158513944
10	$-0.934270161(-1)$	0.226334128	0.215502062	0.200218180
11	0.119995905	0.195019252	0.206388599	0.224697391
12	0.330662152	0.156634479	0.180684654	0.223857744
13	0.527607605	0.115290058	0.142494390	0.195797266
14	0.700236023	$0.753627700(-1)$	$0.982678512(-1)$	0.146316522
15	0.839059626	$0.410567572(-1)$	$0.556778619(-1)$	$0.879284479(-1)$
16	0.936433659	$0.159751609(-1)$	$0.222303628(-1)$	$0.364920716(-1)$
17	0.987875211	$0.266797674(-2)$	$0.376163453(-2)$	$0.629750378(-2)$

Пример 4.5. *У овом примеру посматрајмо две* Jacobi*-јеве тежинске функције на $[-1, 1]$ са параметрима $\alpha = -1/2$, $\beta_1 = 1/4$ и $\beta_2 = -1/4$ и мулти-индексе који нису скоро дијагонални. Конструисаћемо В.О.П. типа II који је мулти-индекса $(5, 3)$, уз ортогоналност у односу на билинеарне форме $(f, g)_k = (2I_k - G_7^{(k)})(fg)$, $k = 1, 2$. Чворови оптималног скупа квадратурних формула у* Borges*-овом смислу $\{G_7^{(k)}, k = 1, 2\}$, су нуле В.О.П. типа II који је мулти-индекса $(4, 3)$. У овом поступку користимо први метод који је описан у одељку 4.1.3. Полазимо од маргиналних*

Табела 8: Грешке квадратурних формула $G_n^{(k)}$, $H_{n+1}^{(k)}$, $L_{2n+1}^{(k)}$, за интегранд $f(x) = x^{22}$, са $r = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta_1 = -1/4$, $\beta_2 = 1/4$, $\beta_3 = 1$; када је $n = 12, 14, 16$

n	k	$I_k f - G_n^{(k)}(f)$	$I_k f - H_{n+1}^{(k)}(f)$	$I_k f - L_{2n+1}^{(k)}(f)$
12	1	$-4.22(-6)$	$3.77(-6)$	$-2.25(-7)$
	2	$-6.64(-6)$	$5.81(-6)$	$-4.17(-7)$
	3	$-1.36(-5)$	$1.18(-5)$	$-9.30(-7)$
14	1	$-3.43(-8)$	$3.37(-8)$	$-2.64(-10)$
	2	$-7.00(-8)$	$6.81(-8)$	$-9.65(-10)$
	3	$-1.83(-7)$	$1.75(-7)$	$-4.22(-9)$
16	1	$-1.66(-13)$	$1.66(-13)$	0
	2	$-2.49(-12)$	$2.49(-12)$	0
	3	$-4.84(-11)$	$4.84(-11)$	$-1.46(-14)$

коефицијената у рекурентним релацијама за билинеарне форме $(f,g)_1$ *и* $(f,g)_2$*, а затим примењујемо формуле* (158)-(161)*. Добијене полиноме наводимо у наставку.*

$$
\begin{aligned}
P_{(0,0)}(x) =& 1, \\
P_{(1,0)}(x) =& x + \frac{1}{35}, \\
P_{(2,0)}(x) =& x^2 + \frac{6x}{161} - \frac{8647}{33649}, \\
P_{(3,0)}(x) =& x^3 + \frac{9x^2}{217} - \frac{10951x}{21483} - \frac{4105}{494109}, \\
P_{(4,0)}(x) =& x^4 + \frac{4x^3}{91} - \frac{762x^2}{1001} - \frac{84x}{4433} + \frac{114319}{1768767}, \\
P_{(5,0)}(x) =& x^5 + \frac{15x^4}{329} - \frac{157510x^3}{155617} - \frac{61914x^2}{2023021} + \frac{7401027x}{38437399} + \frac{60047349}{27405865487}, \\
P_{(5,1)}(x) =& x^6 + \frac{36819250799222x^5}{92092658179935} - \frac{3957182074219109x^4}{3174126951935093} \\
& - \frac{3486062707069820x^3}{8711965463821851} + \frac{627956972406383606683x^2}{168562011782513113765} \\
& + \frac{171369769454675394 86x}{228054486529282448035} - \frac{17941812030394389799 1}{1163077881299340484978 5}, \\
P_{(5,2)}(x) =& x^7 + \frac{686261651035942392697x^6}{1056287221906346589985} - \frac{2352568656603963121776 1211x^5}{1676644707331943942283 1905} \\
& - \frac{72507647879805633695348 1411x^4}{89309274743881547325617 9473} \\
& + \frac{57802189092581071152783363534 53x^3}{10944851619862683624754479441615} \\
& + \frac{37938515083517896172782833760699x^2}{155833839730425828752456635859185} \\
& - \frac{1450726397128966586284522528285 57x}{3272510634338942403801589353042885} \\
& - \frac{3317245196464656294028570669438 9}{3272510634338942403801589353042885},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{(5,3)}(x) =& x^8 + \frac{258637642996534370927332634182268x^7}{30772210066675303742604663295276 5}\\
&- \frac{173696915190664295906999274600212 8x^6}{112831436911142780389550432082680 5}\\
&- \frac{33711904452568430550962482016347466116x^5}{270626201431375958764336711350309179 25}\\
&+ \frac{1119310185256993992561306733108581294 70x^4}{165995004603220946666723055151880551523}\\
&+ \frac{4146652183152868468634525336069699515346784 4x^3}{812636844785298305454276052648788834008422 65}\\
&- \frac{64806507222601058736566151585832489826569 84x^2}{838434839857847458008380054320178955722975 75}\\
&- \frac{8470445462155048270565819520424623695348996x}{170391596487239967272670785232810561969507975}\\
&+ \frac{3290444275804384269887602863039171973931 9}{53354944354590292782351458002193206273280275},
\end{aligned}
$$

*У табели 9 приказани су чворови x_i и тежински коефицијенти $A_{k,i}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, скупа анти-*Gauss*-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у* Borges*-овом смислу. У овом случају чворови x_i представљају нуле В.О.П. типа II $P_{(5,3)}(x)$.*

Табела 9: Параметри скупа анти-Gauss-ових квадратурних формула за оптимални скуп квадратурних формула у Borges-овом смислу у случају AT система Jacobi-јевих тежинских функција за $r = 2$, $\alpha = -1/2$, $\beta_1 = 1/4$, $\beta_2 = -1/4$

i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$
1	−0.9776060083	−0.9674162361	−0.5747720359
2	−0.8735622233	0.2500630240(1)	0.1901471946(1)
3	−0.6625532661	−0.2718353748(1)	−0.1757591078(1)
4	−0.3550296111	0.2867858974(1)	0.2166568312(1)
5	0.121934402(−1)	−0.1674539783(1)	−0.1071326077(1)
6	0.3856838627	0.1992490480(1)	0.1477743016(1)
7	0.7068462366	−0.4630853540	−0.2927318422
8	0.9235366120	0.1402253825(1)	0.1000311546(1)

Литература

[1] H. Alqahtani and L. Reichel, *Multiple orthogonal polynomials applied to matrix function evaluation*, BIT Numer. Math. 58, (2018) 835-849.

[2] H. Alqahtani and L. Reichel, *Simplified anti-Gauss quadrature rules with applications in linear algebra*, Numer. Algor. 77, (2018) 577-602.

[3] A.I. Aptekarev, *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. App. Math. 99, (1998) 423-447.

[4] C. F. Borges, *On a class of Gauss-like quadrature rules*, Numer. Math. 67, (1994) 271-288.

[5] M. G. de Bruin, *Simultaneous Padé approximation and orthogonality*, in Polynômes Orthogonaux et Applications, vol. 1171, Springer, 1985, pp. 74-83.

[6] D. Calvetti and L. Reichel, *Symmetric Gauss-Lobatto and modified anti-Gauss rules*, BIT 43, (2003) 541-554.

[7] L. Chakalov, *General quadrature formulae of Gaussian type*, East J. Approx. 2, (1995) 261-276 [превод на енглески са: Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst. 1 (1954), 67-84.]

[8] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[9] A. Ghizzetti and A. Ossicini, *Quadrature Formulae*, Akademie Verlag, Berlin, 1970.

[10] R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad, *Quadrature rules for periodic integrands. Bi-orthogonality and para-orthogonality*, Ann. Math. et Informancae 32, (2005) 5-44.

[11] R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and O. Njåstad, *On bi-orthogonal systems of trigonometric functions and quadrature formulas for periodic integrands*, Numer. Algor. 44 (4), (2007) 309-333.

[12] A. S. Cvetković and G. V. Milovanović, *The Mathematica package "Orthogonal polynomials"*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 19, (2004) 17-36.

[13] A. S. Cvetković and M. P. Stanić, *Trigonometric orthogonal systems*, In: Approximation and Computation - In Honor of Gradimir V. Milovanović, Series: Springer Optimization and Its Applications, vol. 42 (W. Gautschi, G. Mastroianni, Th. M. Rassias, eds.), pp. 103-116, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2011.

[14] P. J. Davis, *Errors of numerical approximation for analytic functions*, J. Rational Mech. Anal. 2, (1953) 303-313.

[15] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[16] V. I. Devyatko, *On a two-sided approximation for the numerical integration of ordinary differential equations*, USSR Comput. Math. Math. Phys. 3, (1963) 336-350.

[17] H. Engels, *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press, London, 1980.

[18] C. Fenu, D. Martin, L. Reichel and G. Rodriguez, *Block Gauss and anti-Gauss quadrature with application to networks*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 34(4), (2013) 1655-1684.

[19] G. Filipuk, M. Haneczok and W. Van Assche, *Computing recurrence coefficients of multiple orthogonal polynomials*, Numer. Algorithms 70(3), (2015) 519-543.

[20] C. F. Gauss, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, Commentationes Societatis Regiae Scientarium Recentiores 3, (1814) Werke III, pp. 123-162.

[21] W. Gautschi, *Algorithm 726: ORTHPOL - A package of routines for generating orthogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules*, ACM Trans. Math. Software 20, (1994) 21-62.

[22] W. Gautschi, *Orthogonal polynomials: applications and computation*, Acta Numerica 5, (1996) 45-119.

[23] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials, Computation and Approximation*, Oxford University Press, Oxford, 2004.

[24] G. H. Golub and J. H. Welsch, *Calculation of Gauss quadrature rule*, Math. Comput. 23, (1969) 221-230.

[25] W. B. Gragg, *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices*, J. Comput. Appl. Math. 16, (1986) 1-8.

[26] W. B. Gragg and L. Reichel, *A divide and conquer method for the unitary and orthogonal eigenproblems*, Numer. Math. 57, (1990) 695-718.

[27] M. Gu, R. Guzzo, X-B. Chi and X-Q. Cao, *A stable divide and conquer algorithm for the unitary eigenproblem*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 25, (2003) 385-404.

[28] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, vol. 98, Cambridge Univ. Press, 2005.

[29] C. Jagels and L. Reichel, *Szegő-Lobatto quadrature rules*, J. Comput. Appl. Math. 200, (2007) 116-126.

[30] C. Jagels, L. Reichel and T. Tang, *Generalized averaged Szegő quadrature rules*, J. Comput. Appl. Math. 311, (2017) 645-654.

[31] S-M. Kim and L. Reichel, *Anti-Szegő quadrature rules*, Math. Comp. 76, (2007) 795-810.

[32] D. P. Laurie, *Anti-Gaussian quadrature formulas*, Math. Comp. 65 (214) (1996) 739-747.

[33] G. Mastroianni and G. V. Milovanović, *Interpolation Processes: Basic Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

[34] G. V. Milovanović, *Numerička analiza, I deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[35] G. V. Milovanović, *Numerička analiza, II deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[36] G. V. Milovanović, *Numerical quadratures and orthogonal polynomials*, Stud. Univ. Babes-Bolyai, Math. 56 (2) (2011) 449-464.

[37] G. V. Milovanović and A. S. Cvetković, *Note on a construction of weights in Gauss-type quadrature rule*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 15, (2000) 69-83.

[38] G. V. Milovanović and A. S. Cvetković, *Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type*, Math. Balkanica 26, (2012) 169-184.

[39] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić, *A generalized Birkhoff–Young–Chebyshev quadrature formula for analytic functions*, Appl. Math. Comput. 218, (2011) 944-948.

[40] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić, *A special Gaussian rule for trigonometric polynomials*, Banach J. Math. Anal. 1(1), (2007) 85-90.

[41] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić, *Explicit formulas for five-term recurrence coefficients of orthogonal trigonometric polynomials of semi-integer degree*, Appl. Math. Comput. 198, (2008) 559-573.

[42] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković and M. P. Stanić, *Trigonometric orthogonal systems and quadrature formulae*, Comput. Math. Appl. 56, 11, (2008) 2915-2931.

[43] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović and Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, NJ, London, Hong Kong, 1994.

[44] G. V. Milovanović and M. P. Stanić, *Construction of multiple orthogonal polynomials by discretized Stieltjes–Gautschi procedure and corresponding Gaussian quadratures*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 18, (2003) 9-29.

[45] G. V. Milovanović and M. P. Stanić, *Multiple orthogonality and applications in numerical integration*, in Nonlinear Analysis: Stability, Approximation, and Inequalities, Series: Springer Optimization and its Applications, P. Georgiev, P. M. Pardalos and H. M. Srivastava, vol. 68, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2012, ch. 26, pp. 431-455.

[46] D. S. Mitrinović, *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[47] C. R. Morrow and T. N. L. Patterson, *Construction of algebraic cubature rules using polynomial ideal theory*, SIAM J. Numer. Anal. 15(5), (1978) 953-976.

[48] I. P. Mysovskikh, *Quadrature formulae of the highest trigonometric degree of accuracy*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. 25 No. 8, (1985) 1246-1252 (in Russian); U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. 25, (1985), 180-184 (English).

[49] I. P. Mysovskikh, *Algorithms to construct quadrature formulae of highest trigonometric degree of precision*, Metody Vychisl. 16, (1991) 5-16.

[50] E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, vol. 92, American Mathematical Society Providence, RI, 1991.

[51] F. Peherstorfer, *Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle*, Math. Comp. 80(275), (2011) 1685-1701.

[52] N. Z. Petrović, M. P. Stanić and T. V. Tomović Mladenović, *Anti-Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, Filomat 36(3), (2022) 1005-1019.

[53] N. Z. Petrović, M. S. Pranić, M. P. Stanić and T. V. Tomović Mladenović, *The set of anti-Gaussian quadrature rules for the optimal set of quadrature rules in Borges' sense*, J. Comput. Appl. Math. 442C, (2024) 115733.

[54] L. R. Piñeiro-Díaz, *On simultaneous approximations for some collection of Markov functions*, Vestnik Mosk. Univ. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, (1987) 67-70.

[55] M. S. Pranić and L. Reichel, *Generalized anti-Gauss quadrature rules*, J. Comput. Appl. Math. 284, (2015) 235-243.

[56] Yu V., Rakitskii, *Some properties of the solutions of systems of ordinary differential equations by one-step methods of numerical integration*, USSR Comput. Math. Math. Phys. 1, (1962) 1113-1128.

[57] L. Reichel, M. M. Spalević and T. Tang, *Generalized averaged Gauss quadrature rules for the approximation of matrix functionals*, BIT Numer. Math. 56, (2016) 1045-1067.

[58] N. P. Salikhov, *Polar difference methods of solving Cauchy's problem for a system of ordinary differential equations*, USSR Comput. Math. Math. Phys. 2, (1963) 535-553.

[59] J. A. Shohat, *On a certain formula of mechanical quadratures with non-equidistant ordinates*, Trans. Amer. Math. Soc. 31, (1929) 448-463.

[60] V. N. Sorokin, *A generalization of classical orthogonal polynomials and the convergence of simultaneous Padé approximants*, J. Soviet Math. 45(6), (1989) 1461-1499.

[61] V. N. Sorokin, *Hermite-Padé approximations for Nikishin systems and the irrationality of $\zeta(3)$*, Uspekhi Mat. Nauk 49(2), (1994) 167-168.

[62] V. N. Sorokin, *Simultaneous Padé approximations of functions of Stieltjes type*, Sib. Mat. Zh. 31(5), (1990) 128-137.

[63] M. M. Spalević, *A note on generalized averaged Gaussian formulas*, Numer. Algorithms 46(3), (2007) 253-264.

[64] M. M. Spalević, *Error estimates of anti-Gaussian quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. 236, (2012) 3542-3555.

[65] M. M. Spalević, *On generalized averaged Gaussian formulas*, Math. Comp. 76(259), (2007) 1483-1492.

[66] M. M. Spalević, *On generalized averaged Gaussian formulas. II*, Math. Comp. 86(306), (2017) 1877-1885.

[67] M. P. Stanić, A. S. Cvetković and T. V. Tomović, *Error estimates for quadrature rules with maximal even trigonometric degree of exactness*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas, Fis. Nat. Ser. A. Mat. RACSAM 108(2), (2014) 603-615.

[68] M. P. Stanić, A. S. Cvetković and T. V. Tomović, *Error estimates for some quadrature rules with maximal trigonometric degree of exactness*, Math. Methods Appl. Sci. 37 (11), (2014) 1687-1699.

[69] T. V. Tomović, *Анализа и примене квадратурних формула Gauss-овог типа за тригонометријске полиноме*, Докторска дисертација, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу, 2014.

[70] T. V. Tomović and M. P. Stanić, *Quadrature rules with an even number of multiple nodes and a maximal trigonometric degree of exactness*, Filomat 29(10), (2015) 2239-2255.

[71] T. V. Tomović and M. P. Stanić, *Construction of the optimal set of two or three quadrature rules in the sense of Borges*, Numer. Algorithms 78, (2018) 1087-1109.

[72] A. H. Turetzkii, *On quadrature formulae that are exact for trigonometric polynomials*, East J. Approx. 11, (2005) 337-359.

[73] W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence*, Contempor. Math. 236, (1999) 325-342.

[74] W. Van Assche, *Non-symmetric linear difference equations for multiple orthogonal polynomials*, in CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 25, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2000, pp. 391-405.

[75] W. Van Assche and E. Coussement, *Some classical multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 127, (2001) 317-347.

Биографија

Невена Петровић је рођена 14.03.1986. године у Крагујевцу. Завршила је основну школу „Радоје Домановић”као носилац дипломе Вук Караџић и Аласове дипломе за математику и физику, а затим Прву крагујевачку гимназију, одељење обдарених ученика математичке гимназије, као носилац Аласових диплома за математику, физику и информатику. Током школовања била је полазник Математичке радионице младих, Регионалног центра за таленте и учесник семинара астрономије, математике и информатике у ИС Петница. Дипломирала је 2010. године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу, смер математика-информатика, са просечном оценом 9.46, као најбољи студент у генерацији. Током студија била је стипендиста Министарства просвете РС, фонда „Академик Драгослав Срејовић”, фонда српске народне одбране у Америци „Михајло Пупин”и фонда за младе таленте.

Од 2011. до 2019. године је била учесник пројекта Министарства просвете и науке РС, под називом *Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене*. У оквиру ERASMUS+ пројекта TeComp, у организацији Универзитета у Генту, 2021. године је завршила курс за стручно усавршавање "Educational Interaction and Communication in Higher Education", а 2022. године је учествовала у обуци „Универзитетска настава - Може ли ефикасније?”. Године 2023. била је један од реализатора пројекта „Савремени наставник за интерактивну наставу”, у организацији ДМС Подружнице Крагујевац.

Члан је Друштва математичара Србије. Од 2008. године је радила као предавач у оквиру Математичке радионице младих, од 2010. до 2016. као ментор у области математике у Регионалном центру за таленте, од 2021. године је члан Државне комисије за математичка такмичења ученика средњих школа, а од 2023. и члан комисије за такмичење Кенгур без граница.

Референце

Невена до сада има два публикована рада, један категорије M21 и један категорије M22, и 8 учешћа на домаћим и међународним скуповима.

1. **N.Z. Petrović**, M.P. Stanić and T.V. Tomović Mladenović, *Anti-Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, Filomat 36(3), (2022) 1005-1019. [M22, ISSN 2406-0933, DOI: 10.2298/FIL2203005P]

2. **N. Z. Petrović**, M. S. Pranić, M. P. Stanić and T. V. Tomović Mladenović, *The set of anti-Gaussian quadrature rules for the optimal set of quadrature rules in Borges' sense*, J. Comput. Appl. Math. 442C, (2024) 115733. [M21, DOI: 10.1016/j.cam.2023.115733]

3. M. P. Stanić, **N. Z. Petrović** and T. V. Tomović Mladenović, *Anti-Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, The 2nd Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas, August 28th-31st, 2019, Paris, France, (Abstract Booklet, p. 41) [M34]

4. **N.Z. Petrović**, M.P. Stanić and T.V. Tomović Mladenović, *Anti-Gaussian quadrature rules for the optimal set of quadrature rules in Borges' sense*, Numerical Methods for Large Scale Problems, Dedicated to Professor Lothar Reichel (Kent State University, Ohio, USA) on the occasion of his 70th Anniversary, June 6th - 14th, 2022, Belgrade, Serbia, (Book of Abstract, p. 67) [M34]

5. **N.Z. Petrović**, M.P. Stanić and T.V. Tomović Mladenović, *Averaged Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, Analysis, Topology and Applications, June 29th – July 2nd, 2022, Vrnjačka banja, Serbia, (Book of Abstract, p. 24) [M34]

6. **N.Z. Petrović**, M.P. Stanić, T.V. Tomović Mladenović and M. Pranić, *The set of anti-Gaussian quadrature rules and corresponding multiple orthogonal polynomials*, Analysis, Approximation, Applications, Vrnjačka banja, Serbia, 21-24 June 2023, (Book of Abstract, p. 87) [M34, ISBN 978-86-6009-094-4]

7. **N.Z. Petrović**, T.V. Tomović Mladenović and M.P. Stanić, *Anti-Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, 14th Serbian Mathematical Congress, May 16th-19th, 2018, Kragujevac, Serbia, (Book of Abstract, p. 179) [M64, ISBN 978-86-6009-055-5]

8. **N.Z. Petrović**, T.V. Tomović Mladenović and M.P. Stanić, *Anti-Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, Kongres mladih matematičara u Novom Sadu (KMMNS), 03-05. oktobar 2019, Novi Sad, Srbija, (Knjiga sažetaka, str. 33) [M64]

9. **N.Z. Petrović**, T.V. Tomović Mladenović and M.P. Stanić, *Anti-Gaussian quadrature rule for trigonometric polynomials*, Mathematical meeting of Serbia and Montenegro, October 11th-14th, 2019, Budva, Montenegro, (Book of Abstract, p. 12) [M64]

10. **N.Z. Petrović**, *Set of anti-Gaussian quadrature rules for the optimal set of quadrature rules in Borges' sense*, Kongres mladih matematičara u Novom Sadu (KMMNS2), 29. septembar-01. oktobar 2022, Novi Sad, Srbija, (Knjiga sažetaka, str. 62) [M64]

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Нестандардне анти-Гаусове квадратурне формуле

представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада.*

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,

У Крагујевцу, 08.03.2024. године,

Невена Петровић

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да су штампана и електронска верзија докторске дисертације под насловом:

Нестандардне анти-Гаусове квадратурне формуле

истоветне.

У Крагујевцу, 08.03.2024. године,

Невена Петровић

потпис аутора

Образац 3

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Невена Петровић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Нестандардне анти-Гаусове квадратурне формуле

и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

---

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 08.03.2024. године,

Невена Петровић

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/